Coordinatore del progetto
Antonio Bernardo

Autori
Claudio Carboncini
Anna Cristina Mocchetti
Angela D'Amato
Antonio Bernardo
Germano Pettarin
Nicola Chiriano
Erasmo Modica
Francesco Daddi

Hanno collaborato
Laura Todisco
Nicola De Rosa
Vittorio Patriarca
Luciano Sarra
Mauro Paladini
Giuseppe Pipino
Gemma Fiorito
Nicoletta Passera
Anna Rita Lorenzo
Luca Frangella
Mario Bochicchio
Daniele Zambelli
Paolo Baggiani
Francesco Speciale
Maria Rosaria Agrello
Francesca Lorenzoni
Anna Maria Cavallo
Silvia Bonatti
Dorotea Jacona
Pierluigi Cunti
Alessandro Castelli
Raffaele Santoro
Angela Iaciofano
Michela Todeschi
Luca Tedesco
Alessandro Paolino
Alberto Giuseppe Brudaglio
Sara Gobbato
Elena Stante
Andrea Celia

Collaborazione, commenti e suggerimenti
Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento
Versione 1.3 del 31.08.2010

Stampa
Seconda edizione, settembre 2010

ISBN 978-88-96354-04-9

Stampato da Universal Book, via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS) – tel/fax 0984.408929

Stampato con il contributo di

INDICE

1. Numeri
1.1 I numeri naturali N 02
1.2 Numeri interi relativi N 19
1.3 Frazioni e numeri razionali N 31
1.4 Introduzione ai numeri reali N 65
1.5 I sistemi di numerazione N 73

2. Insiemi
2.1 Generalità sugli insiemi I 02
2.2 Rappresentazione degli insiemi I 06
2.3 Operazioni con gli insiemi I 10
2.4 Relazioni I 28
2.5 Corrispondenze tra insiemi I 53
2.6 Rappresentazione grafica di funzioni I 70

3. Le basi del calcolo letterale
3.1 Espressioni letterali e valore numerici L 02
3.2 Monomi L 09
3.3 Polinomi L 19
3.4 Prodotti notevoli L 25
3.5 Divisione tra due polinomi L 31
3.6 M.C.D. e m.c.m tra monomi L 39

4. Equazioni numeriche intere
4.1 Identità ed equazioni, principi di equivalenza E 02
4.2 Problemi di primo grado in una incognita E 12
4.3 Le equazioni con il software Derive E 19

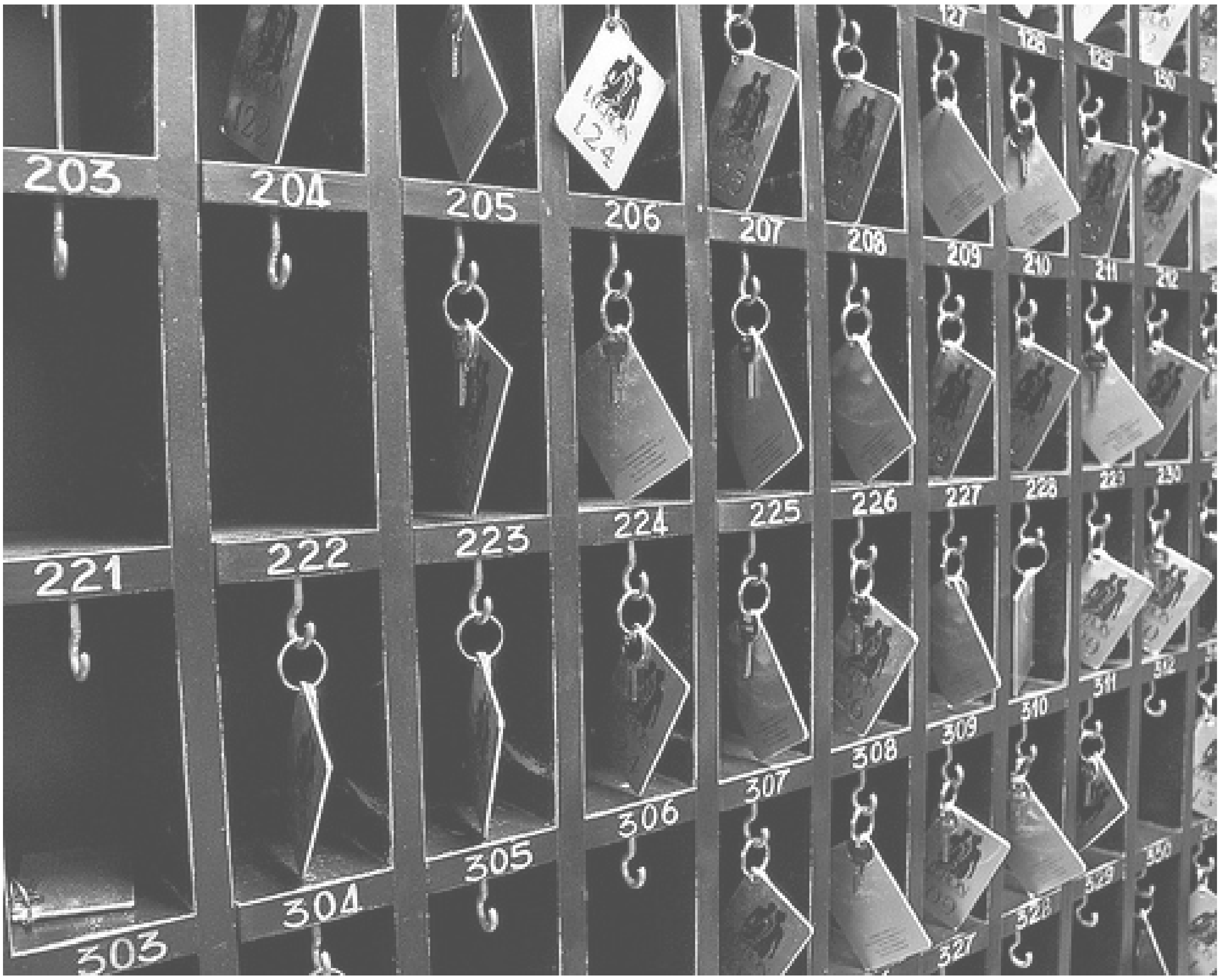
5. Scomposizioni e frazioni
5.1 Scomposizione in fattori S 02
5.2 Riconoscimento di prodotti notevoli S 06
5.3 Altre tecniche di scomposizione S 13
5.4 Scomposizione mediante metodi combinati S 17
5.5 M.C.D. e m.c.m. tra polinomi S 23
5.6 Frazioni algebriche S 25

6. Algebra di primo grado
6.1 Equazioni P 02
6.2 Disequazioni P 21
6.3 Sistemi di equazioni P 42

7. Introduzione alla statistica S 02

MATEMATICA C^3 -ALGEBRA 1

1 NUMERI



One door, one key...
Photo by: Silv3rFoX
Taken from: http://www.flickr.com/photos/12030514@N08/2272118558/

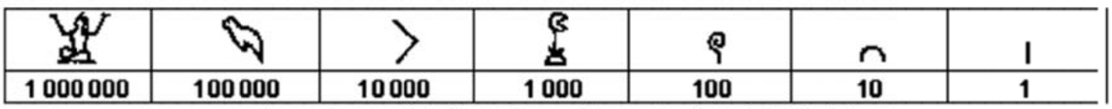
1. NUMERI NATURALI

►1. L'origine dei numeri

L’origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana.
Sono stati ritrovati tronchi fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto “Osso di Ishango” in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo Belga tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20.000 a.C. e il 18.000 a.C.,

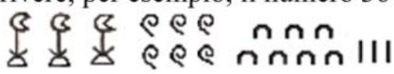
L'osso di Ishango [http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango]

Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. E' possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.
Sappiamo per certo che circa 6000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:

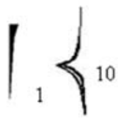


Le potenze del 10 nella scrittura degli antichi Egizi

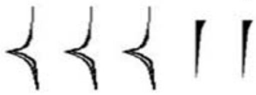
Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3673 così:



Gli antichi Babilonesi usavano invece i seguenti simboli



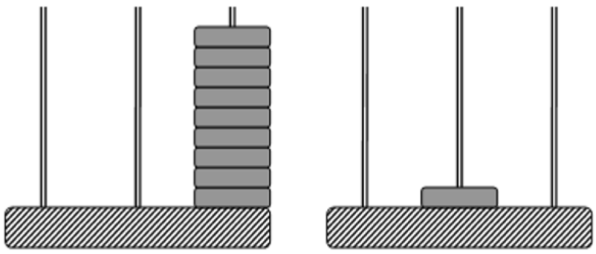
In questo modo il numero 32 veniva scritto



I Romani usavano invece sette simboli con i quali, seguendo determinate regole, rappresentavano qualunque numero.
I simboli sono I=1 V=5 X=10 L=50 C=100 D=500 M=1000.
Il numero MM rappresenta 1000+1000 = 2000.
Il numero VI rappresenta 5+1=6, mentre il numero IV rappresenta 5-1=4.

►2. Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell’esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti **cifre**. Un numero non è altro che una sequenza ordinata di cifre, eventualmente ripetute.
Per rappresentare il numero dieci che segue il 9 non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra.



Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: per rappresentare il numero 10 dispongo un dischetto nell'asta a sinistra e vuoto la prima asta: il numero dieci viene rappresentato dalla scrittura 10.
I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero 10.
Per rappresentare il numero cento si fa uso della scrittura 100. Ovvero si sposta il numero 1 ancora a sinistra ponendo uno zero nel posto lasciato vuoto.
Questo metodo può essere ripetuto per rappresentare tutti i numeri che risultino potenza di dieci, ovvero dieci, cento, mille…
Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale poiché rappresentano il peso di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.
Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3\cdot 10^2=300$. Il numero 219 si rappresenta tenendo conto di questa scrittura $2\cdot 10^2+1\cdot 10+9$.
Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è decimale o a base dieci, perché usiamo dieci simboli (cifre) per scrivere i numeri, posizionale perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

►3. I numeri naturali

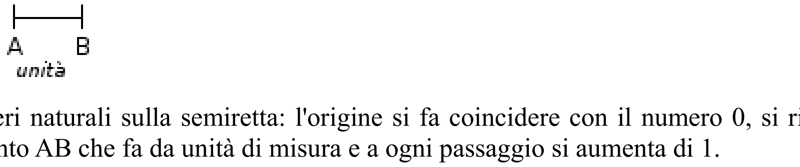
I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano **numeri naturali**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13…

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.
Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie...? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a se stante, un oggetto astratto di tipo matematico.
Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto **cardinale** del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto **ordinale**), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo...
Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli, e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi i matematici ne discutono. Il dibattito su cosa siano i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del XX secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

►4. Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra, e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



I numeri naturali sulla semiretta: l'origine si fa coincidere con il numero 0, si riporta il segmento AB che fa da unità di misura e a ogni passaggio si aumenta di 1.

Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un

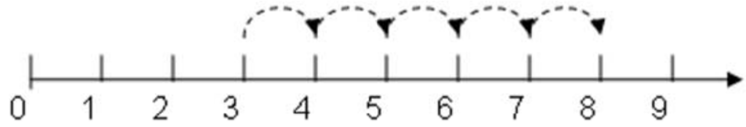
elemento massimo.
I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra. Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una relazione d'ordine, che si rappresenta con il simbolo di disuguaglianza ≤ o disuguaglianza stretta < .
Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi n, m, ottenendo uno solo dei seguenti tre casi:
legge di tricotomia $n > m$, $n < m$, $n = m$

►5. Addizione e moltiplicazione di numeri naturali

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali n e m, detti **addendi**, l'operazione di **addizione** associa ai due addendi un terzo numero s, detto **somma**, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi di n tante volte quante indica il secondo addendo m. Si scrive n+m=s.

Ad esempio se vogliamo eseguire la somma 3 + 5 dobbiamo partire da 3 e contare 5 numeri successivi:



DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali n e m, detti **fattori**, l'operazione di **moltiplicazione** associa ai due fattori un terzo numero p, detto **prodotto**, che si ottiene sommando n volte il numero m.

L'operazione di moltiplicazione si indica con diversi simboli:

$$p = n \times m \quad , \quad p = n \cdot m \quad , \quad p = n * m$$

Per eseguire la moltiplicazione $4 \cdot 2$ dobbiamo addizionare 2+2+2+2, otteniamo 8.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione si dicono **operazioni interne** all'insieme dei numeri naturali, esse infatti danno sempre come risultato un numero naturale.

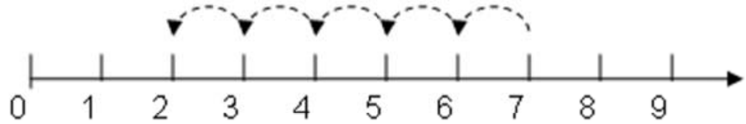
1 *Rispondi alle seguenti domande*
a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

►6. Sottrazione e divisione di numeri naturali

Diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali n e m, il primo detto **minuendo** e il secondo **sottraendo**, si dice **differenza** il numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad m dà come somma n. Si scrive n-m=d.

Per esempio, 7-5 = 2 perché 5+2=7.
Non esiste invece la differenza tra 5 e 7, in quanto nessun numero naturale aggiunto a 7 può dare 5.
Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7, infatti partendo dal 5 non è possibile andare indietro di 7 posizioni, poiché non è possibile andare oltre il numero 0 che è il più piccolo dei numeri naturali.

Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione a - b è possibile solo se $b \leq a$

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, con *m ≠0*, il primo detto **dividendo** e il secondo **divisore**, si dice **quoziente esatto** un numero naturale *q*, se esiste, che moltiplicato per *m* dà come prodotto *n*. Si scrive *n:m=q*.

Se il quoziente esiste, il numero *m* si dice **divisore** di *n*, oppure *n* è **divisibile** per *m*.

DEFINIZIONE. Un numero naturale *a* si dice **multiplo** di un numero naturale *b* se esiste un numero *c* che moltiplicato per *b* dà *a,* cioè $a=c \cdot b$.

Esempi

- 12:3=4 perché 3x4=12.

Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3.

- 20 è divisibile per 4 perché 20:4=5.
- 7 è divisore di 35 perché 35:7=5.
- 6 è multiplo di 3 perché 6=2x3.
- 5 non è multiplo di 3, non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5

Osservazione
In $\mathbb{N}$ la divisione tra due numeri a e b è possibile solo se a è multiplo di b.

2 Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

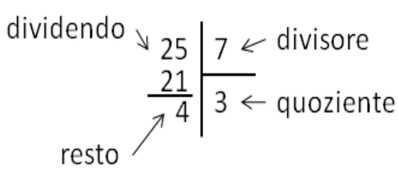
a)	7 - ... = 1	3 - 3 = …	5 - 6 = ...
b)	3 - ... = 9	15 : 5 =....	18 : .... = 3
c)	…. : 4 = 5	12 : 9 = ….	36 · … = 9

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile. Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto.

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m* , con *m ≠0*, si dice **quoziente** tra *n* e *m*, il più grande numero naturale *q* che moltiplicato per *m* dà un numero minore o uguale a *n*. Si dice **resto** della divisione tra *n* e *m* la differenza *r* tra il dividendo *n* e il prodotto tra il divisore *m* e il quoziente *q*.
In simboli $r=n-m\times q$ o anche $n=m\times q+r$

Esempi

Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti 7x3=21 mentre 7x4=28 supera il dividendo) e resto 4 (infatti 25-21=4). Pertanto si può scrivere 25=7x3+4.



- 0:2 = 0
- 1:2 = 0 con resto 1
- 5:2 = 2 con resto 1

Osservazione
Nella definizione di quoziente abbiamo sempre richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero.
Per esempio, nella divisione 5:0 dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dà 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0.
Invece nella divisione 0:0 un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.
Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo n:0, con n≠0, è **impossibile**; mentre la divisione 0:0 diciamo che è **indeterminata**.

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, con *m ≠0*, la **divisione intera** $n \operatorname{div} m$ è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha $q \times m \leqslant n$.

Non è possibile eseguire la divisione intera per 0.

- $3 \operatorname{div} 0 = \mathit{non\ si\ può\ fare}$ $\quad$ $0 \operatorname{div} 5 = 0$
- $9 \operatorname{div} 2 = 4$ $\quad$ $3 \operatorname{div} 5 = 0$

DEFINIZIONE. Dati due numeri naturali *n* e *m*, con *m ≠0*, l'operazione che restituisce il resto della divisione intera tra *n* e *m* si chiama **modulo di n rispetto a m** e si indica con $n \bmod m$.

- $3 \ mod\ 0 = \mathit{non\ si\ può\ fare}$ $\quad$ $0\ mod\ 5 = 0$
- $9\ mod\ 2 = 1$ $\quad$ $10\ mod\ 5 = 0$
- $3\ mod\ 5 = 3$ $\quad$ $11\ mod\ 5 = 1$

3 Vero/falso?

a) 5:0=0	V	F	e) 0:1=0	V	F
b) 0:5=0	V	F	f) 0:0=0	V	F
c) 5:5=0	V	F	g) 1:1=1	V	F
d) 1:0=1	V	F	h) 1:5=1	V	F

4 Se è vero che $p = n \times m$ quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n	V	F	e) p è divisibile per m	V	F
b) p è multiplo di m	V	F	f) m è divisibile per n	V	F
c) m è multiplo di p	V	F	g) p è divisore di m	V	F
d) m è multiplo di n	V	F	h) n è divisore di m	V	F

5 Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3	V	F	c) 8 è un multiplo di 2	V	F
b) 3 è un divisore di 12	V	F	d) 5 è divisibile per 10	V	F

6 Esegui le seguenti operazioni

a) 18 div 3= ……
b) 18 mod 3 = …….
c) 20 div 3= ……
d) 20 mod 3 = …….
e) 185 div 7= ……
f) 185 mod 7 = …….
g) 97 div 5= ……
h) 97 mod 5 = …….
i) 240 div 12= ……
j) 240 mod 12 = …….

►7. Potenza

La **potenza** di un numero naturale è una moltiplicazione particolare con tutti i fattori uguali.

> DEFINZIONE. Dati due numeri naturali *a* e *b*, con b>1 il primo detto **base**, il secondo **esponente**, la **potenza** di *a* con esponente *b* è il numero *p* che si ottiene moltiplicando fra loro b fattori tutti uguali ad *a*. Si scrive $a^b = p$ e si legge "a elevato a b uguale a p".

Per esempio 5^3=5x5x5=125

esponente

$$5^3 = \underbrace{5x5x5}_{3\ volte}=125$$

base   potenza

Alla definizione precedente vanno aggiunti i seguenti casi particolari che completano la definizione:

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1, se\ a \neq 0$$
$$0^0\ non\ ha\ significato$$

Proprietà delle potenze

$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{m+n}}$ Il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti. Esempio: $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n \cdot a^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\, volte}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\, volte}) = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m\, volte} = a^{n+m}$$

$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$ Il quoziente di due potenze con la stessa base, la prima con esponente maggiore o uguale all'esponente della seconda, è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti. Esempio: $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n : a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\, volte} : \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\, volte} = \underbrace{(a:a) \cdot (a:a) \cdot \ldots \cdot (a:a)}_{n\, volte} \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n-m\, volte} = a^{n-m}$$

$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$ La potenza di una potenza è uguale a una potenza che ha la base della prima potenza e per esponente il prodotto degli esponenti. Esempio: $(6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m\, volte} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\, volte}) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = a^{n \cdot m}$$

$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ Prodotto di potenze con lo stesso esponente. La potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori. Esempio: $(2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8$.

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\, volte} = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\, volte}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\, volte}) = a^n \cdot b^n$$

$\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n}$ La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze dei singoli fattori. Esempio: $(4:2)^8 = 4^8 : 2^8$.

7 Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\dots+\dots+\dots} = 3^{\dots}$

b) $3^4 : 3^2 = 3^{\dots-\dots} = 3^{\dots}$

c) $(3:7)^5 = 3^{\dots} : 7^{\dots}$

d) $6^3 : 5^3 = (6:5)^{\dots}$

e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\dots}$

f) $(2^6)^2 = 2^{(\dots\cdot\dots)} = 2^{\dots}$

g) $(18^6):(9^6) = (\dots\dots)^{\dots\dots} = 2^{\dots\dots}$

h) $(5^6 \cdot 5^4)^2 : [(5^2)^3]^6 = \dots\dots\dots = 5^{\dots\dots}$

8 Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$ $[6^6]$

b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$ $[5^4]$

c) $((2^1)^4 \cdot 3^4)^2 : 6^5 \cdot 6^0$ $[6^3]$

►8. Proprietà delle operazioni

Proprietà commutativa

Una operazione gode della proprietà commutativa se, cambiando l'ordine dei numeri sui quali essa va eseguita, il risultato non cambia.
La proprietà commutativa vale sia per l'addizione che per la moltiplicazione.

$$a+b=b+a; \qquad a\cdot b=b\cdot a;$$
$$3+5=5+3=8 \qquad 3\cdot 5=5\cdot 3=15$$

La proprietà commutativa non vale per le seguenti operazioni: sottrazione, divisione, divisione intera, modulo e potenza.

$$a-b\neq b-a; \qquad a:b\neq b:a;$$
$$8-3=5\neq 3-8=\text{non si può fare} \qquad 8-4=2\neq 4-8=0$$
$$a \text{ div } b \neq b \text{ div } a \qquad a \bmod b \neq b \bmod a$$
$$17 \text{ div } 5=3 \neq 5 \text{ div } 17=0 \qquad 9 \bmod 2=1 \neq 2 \bmod 9=2$$
$$a^b\neq b^a$$
$$3^2=9\neq 2^3=8$$

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà associativa se, presi arbitrariamente tre numeri legati da due operazioni, è indifferente da quale operazione si inizia, in quanto il risultato che si ottiene è sempre lo stesso.
La proprietà associativa vale per l'addizione

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$(3+5)+2=3+(5+2)=10$$

La proprietà associativa vale per la moltiplicazione

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$
$$(3\cdot 5)\cdot 2=3\cdot(5\cdot 2)=30$$

La proprietà associativa non vale per le operazioni sottrazione, divisione, divisione intera e modulo.

$$(a-b)-c\neq a-(b-c); \qquad (a:b):c\neq a:(b:c);$$
$$(10-5)-2=3\neq 10-(5-2)=7 \qquad (16:4):2=2\neq 16:(4:2)=8$$

$$(a \text{ div } b) \text{ div } c \neq a \text{ div } (b \text{ div } c) \qquad (a \bmod b) \bmod c \neq a \bmod (b \bmod c)$$
$$(17 \text{ div } 5) \text{ div } 2=1 \neq 17 \text{ div } (5 \text{ div } 2)=8 \qquad (17 \bmod 7) \bmod 2=1 \neq 17 \bmod (7 \bmod 2)=0$$
$$3 \text{ div } 2=1 \neq 17 \text{ div } 2=8 \qquad 3 \bmod 2=1 \neq 17 \bmod 1=0$$

Elemento neutro

Una operazione ha un elemento neutro se composto con qualsiasi altro numero lo lascia invariato, sia quando il numero è a destra, sia quando è a sinistra.
L'elemento neutro dell'addizione è 0, sia che si trovi a destra che a sinistra:

$$a+0=0+a=a$$

L'elemento neutro della moltiplicazione è 1, sia che si trovi a destra che a sinistra:

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

La divisione intera ha l'elemento neutro a destra, che è 1, ma non ha elemento neutro a sinistra.

$$a \text{ div } 1=a \qquad 1 \text{ div } a=0 \quad \text{se } a\neq 1$$

L'operazione modulo ha l'elemento neutro a sinistra, lo 0, ma non ha elemento neutro a destra.

$$0 \bmod a=0$$
$$a \bmod 0=\text{non si può fare}$$

Proprietà distributiva
La proprietà distributiva coinvolge due operazioni differenti.
Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:
Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b\ +\ a\cdot c \qquad (a+b)\cdot c=a\cdot c\ +\ b\cdot c$$

Esempi

- $3\cdot(2+4)=3\cdot 2\ +\ 3\cdot 4=18$ $\qquad (2+4)\cdot 3=2\cdot 3\ +\ 4\cdot 3=18$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b\ -\ a\cdot c \qquad (a-b)\cdot c=a\cdot c\ -\ b\cdot c$$

Esempi

- $6\cdot(10-4)=6\cdot 10\ -\ 6\cdot 4=36$ $\qquad (10-4)\cdot 6=10\cdot 6\ -\ 4\cdot 6=36$

Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione solo se le somme sono a sinistra:

$$(a+b+c):d=a:d\ +\ b:d\ +\ c:d$$

Esempio

- $(20+10+5):5=20:5\ +\ 10:5\ +\ 5:5=7$

quindi vale la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione se le somme sono a sinistra.

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra.

Esempio

- $120:(3+5)$

Eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120:8=15$.
Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120:3+120:5=40+24=64$.
Il risultato corretto è il primo.

Proprietà distributiva della divisione rispetto la sottrazione solo se la sottrazione è a sinistra:

$$(a-b):c=a:c\ -\ b:c$$

Esempi

- $(20-10):5=10:5=2$ $\qquad 20:5\ -\ 10:5=4-2=2$

In questo caso la sottrazione è a sinistra

- $120:(5-3)=120:2=60\ \neq\ 120:5-120:3=24-40=$...non si può fare

In questo caso la sottrazione è a destra

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO. Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se almeno uno dei fattori è nullo. $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ oppure $b=0$

9 Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

a) 80 – 52 + 36 = (20 – 13 + 9) · 4	proprietà	V	F
b) 33 : 11 = 11 : 33	proprietà	V	F
c) 108 – 72 : 9 = (108 – 72) : 9	....	V	F
d) 8 – 4 = 8 + 4	....	V	F
e) 35 · 10 = 10 · 35	....	V	F
f) 9 · (2 + 3) = 9 · 3 + 9 · 2	....	V	F
g) (28 – 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7	....	V	F
h) (8 · 1) : 2 = 8 : 2	....	V	F
i) (8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)	....	V	F
j) (13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)	....	V	F
k) 0 + (100 + 50) = 100 + 50	....	V	F
l) $2^3+5^3=(2+5)^3$	....	V	F

10 Calcola:

m) $2^2\cdot(2^3+5^2)$

n) $[(3^6:3^4)^2\cdot 3^2]^0$

o) $4^4\cdot(3^4+4^2)$

p) $3^4\cdot(3^4+4^2-2^2)^0:3^3+0\cdot 100$

11 Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a\circ b=2\cdot a+3\cdot b$ verifica se è

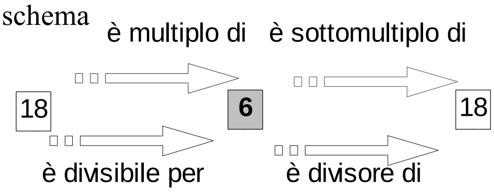
a) commutativa, cioè se $a\circ b=b\circ a$

b) associativa, cioè se $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$

c) 0 è elemento neutro

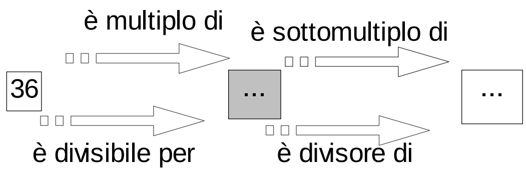
►9. Numeri primi

Osserva il seguente schema



In esso sono descritte alcune caratteristiche del numero 18 e i suoi legami con il numero 6.

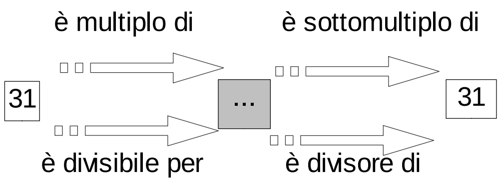
12 Prova a completare il seguente schema scegliendo opportunamente dei numeri da inserire nelle caselle vuote.



Quali numeri puoi mettere nella casella centrale?

DEFINIZIONE. Chiamiamo divisore proprio di un numero un divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.

Osserva ora il seguente schema



Nella casella centrale grigia puoi inserire soltanto i numeri 31 o 1.

DEFINIZIONI
Un numero p > 1 si dice ***primo*** se è divisibile solo per se stesso e per l'unità.
Un numero naturale maggiore di 1 si dice ***composto*** se non è primo.

0 non è primo né composto
1 non è primo né composto
2 è primo
3 è primo
4 è composto
5 è primo
6 è composto
7 è primo
8 è composto
9 è composto
10 è composto
11 è primo
12 è composto
13 è primo
…...........

13 Per ognuno dei seguenti numeri indica i divisori propri

a) 15 ha divisori propri …, …, …, …, …, …, …

b) 19 ha divisori propri …, …, ..., …, …, …, …

c) 24 ha divisori propri …, …, …, …, …, …, …

<u>Esempi</u>

- $10 = 2\cdot 5$.
- $30 = 3\cdot 10 = 3\cdot 2\cdot 5$
- $48 = 16\cdot 3 = 2^4\cdot 3$

Ma quanti sono i numeri primi? La risposta a questa domanda venne data da Euclide con il seguente teorema che porta il suo nome:

TEOREMA DI EUCLIDE. I numeri primi sono infiniti.

Euclide infatti ci ha fatto vedere come sia possibile costruire numeri primi comunque grandi, dato un numero primo infatti è sempre possibile costruirne uno più grande.

14 *Crivello di Eratostene*. Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Procedura
Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero.

Esempi

Per verificare se 31 è primo calcolo il valore approssimato $\sqrt{31} \simeq 5{,}5$ e verifico se è divisibile per i numeri primi $\leqslant 5$, cioè 2, 3, 5. Allora 31 è primo, in quanto non è divisibile per 2 in quanto è dispari, non è divisibile per 3 poiché la somma delle sue cifre è 4 e 4 non è divisibile per 3, non è divisibile per 5 in quanto non finisce per 0 o 5.
Per verificare se 59 è un numero primo calcolo $\sqrt{59} \simeq 7{,}6$ e verifico se 59 è divisibile per un numero primo $\leqslant 7$, cioè per 2, 3, 5, 7. Eseguendo le divisioni si vede che 59 non è divisibile per nessuno dei numeri precedenti, quindi è primo.

►10. Criteri di divisibilità

Per verificare se un numero è divisibile per i primi numeri interi si possono applicare i seguenti criteri di divisibilità.

Divisibilità per 2: un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra, quella delle unità, è un numero pari, cioè è 0, 2, 4, 6, 8.

Esempi

- 1236 finisce per 6 quindi è divisibile per 2.
- 109230 finisce per 0 quindi è divisibile per 2.
- 10923 finisce per 3 quindi non è divisibile per 2.
- 2221 finisce per 1 quindi non è divisibile per 2

Divisibilità per 3: un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle cifre che lo compongono è divisibile per 3.

Esempi

- 24 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 2+4 = 6, dato che 6 è divisibile per 3 anche 24 è divisibile per 3.
- 1236 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 1+2+3+6 = 12; 12 è divisibile per 3 dato che la somma delle sue cifre è 1+2 = 3, quindi anche 1236 è divisibile per 3.
- 31 non è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 3+1 = 4, dato che 4 non è divisibile per 3 neanche 31 è divisibile per 3.
- 2363 non è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è 2+3+6+3 = 14; 14 non è divisibile per 3 dato che la somma delle sue cifre è 1+4 = 5, quindi anche 2363 non è divisibile per 3.

Divisibilità per 5: un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5 .

Esempi

- 1230 finisce per 0 quindi è divisibile per 5
- 59235 finisce per 5 quindi è divisibile per 5
- 109253 finisce per 3 quindi non è divisibile per 5
- 5556 finisce per 6 quindi non è divisibile per 5.

Divisibilità per 7: un numero (maggiore di 10) è divisibile per 7 se la differenza (in valore assoluto) fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 7 o un multiplo di 7.

Esempi

- 252 è divisibile per 7, infatti $|25-2\cdot 2|=21$ è multiplo di 7.
- 49 è divisibile per 7, infatti $|4-2\cdot 9|=14$ è multiplo di 7.
- 31 non è divisibile per 7, infatti $|3-2\cdot 1|=1$ non è multiplo di 7.
- 887 non è divisibile per 7, infatti $|88-2\cdot 7|=74$ non è divisibile per 7.

Divisibilità per 11: un numero è divisibile per 11 se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è 0 o 11 o multiplo di 11.

Esempi

- 253 è divisibile per 11, infatti $|5-(2+3)|=0$.
- 9482 è divisibile per 11, infatti $|(9+8)-(4+2)|=11$.
- 31 non è divisibile per 11, infatti $|3-1|=2$.
- 887 non è divisibile per 11, infatti $|8-(8+7)|=7$.

15 Per quali numeri sono divisibili seguenti numeri? Segnali con una crocetta

a) 1320 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
b) 2344 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
c) 84 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
d) 1255 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
e) 165 è divisibile per 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11

►11. Scomporre in fattori primi

Possiamo pensare di scrivere un numero naturale qualsiasi come prodotto di altri numeri. Scomporre in fattori un numero significa appunto scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

16 I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi.

a) $68=17\cdot 4=17\cdot 2^2=2\cdot 34$
b) $45=5\cdot 9=15\cdot 3=5\cdot 3^2$
c) $36=6\cdot 6=6^2$
d) $44=2\cdot 22=4\cdot 11=2^2\cdot 11$
e) $17=17\cdot 1$
f) $48=6\cdot 8=12\cdot 4=3\cdot 2^4=16\cdot 3$
g) $60=2\cdot 30=15\cdot 4=2^2\cdot 3\cdot 5=10\cdot 6=20\cdot 3$
h) $102=6\cdot 17=3\cdot 34=2\cdot 3\cdot 17=2\cdot 51$
i) $200=2\cdot 10^2=2^3\cdot 5^2=2\cdot 4\cdot 25=2^2\cdot 50$
j) $380=19\cdot 10\cdot 2=19\cdot 5\cdot 2^2$

17 *Rispondi alle domande:*

a) Ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
b) Ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?
c) Quando un numero è scomposto in fattori primi?

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA. Ogni numero naturale n>1 si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi.

Esempio

Scomporre in fattori primi il numero 630.

630	2	630 è divisibile per 2 perché l'ultima cifra è pari
315	3	315 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 9 divisibile per 3
105	3	105 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 6 divisibile per 3
35	5	35 è divisibile per 5 perché l'ultima cifra è 5
7	7	
1		$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

In generale, quindi, un numero può essere scomposto in fattori in più modi. Per esempio, $12=3\cdot 4$, ma anche $12=6\cdot 2$. Il teorema appena enunciato ci assicura che, se si scompone un numero in fattori primi, questa scomposizione è unica, a meno dell'ordine con cui si scrivono i fattori. Tornando all'esempio precedente $12=2^2\cdot 3$ è l'unico modo in cui il 12 si può scomporre in fattori primi, a meno che non si scambiano di posto i fattori $12=3\cdot 2^2$.

18 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

1) 16	7) 40	13) 81	19) 525	25) 4050
2) 18	8) 42	14) 105	20) 360	26) 4536
3) 24	9) 48	15) 120	21) 675	27) 12150
4) 30	10) 52	16) 135	22) 715	28) 15246
5) 32	11) 60	17) 180	23) 1900	29) 85050
6) 36	12) 72	18) 225	24) 1078	30) 138600

►12. Massimo comune divisore e Minimo comune multiplo

DEFINIZIONE: Il **massimo comune divisore** di numeri naturali *a* e *b*, si indica con **MCD(a,b),** è il più grande tra tutti i divisori comuni ad *a* e *b*.

Esempio

Applicando la definizione, il massimo comune divisore tra 18 e 12 si ottiene prendendo tutti i divisori di 18 e 12

divisori di 18:	18,	9,	6,	3,	2,	1
divisori di 12:	12,	6,	4,	2,	1	

I divisori comuni sono 6, 2, 1.

Il più grande dei divisori comuni è 6.

19 Applicando la definizione trova il M.C.D. tra i numeri 54 e 132.

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente

Procedura per calcolare il M.C.D. di due o più numeri naturali

1. **si scompongono i numeri in fattori primi**
2. **si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con il minore esponente.**

Esempi

- Calcolare MCD(60, 48, 36)

si scompongono in fattori i singoli numeri

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad , \quad 48 = 2^4 \cdot 3 \quad , \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

I fattori comuni sono 2 e 3, il 2 compare con l'esponente minimo 2; il 3 compare con esponente minimo 1. Pertanto

MCD(60, 48, 36) = $2^2 \cdot 3=12$

- Calcolare MCD(60, 120, 90)

si scompongono in fattori i singoli numeri

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad , \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{e} \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

I fattori in comune sono 2, 3, 5. L'esponente minino è 1 per tutti, pertanto

MCD(60, 120, 90) = $2 \cdot 3 \cdot 5=30$

DEFINIZIONE. **Due numeri a e b si dicono primi tra loro** o **coprimi se** MCD(a,b) = 1.

Esempi

- I numeri 12 e 25 sono primi tra loro infatti il MCD(12, 25) = 1 dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni: $12 = 2^2 \cdot 3$ e $25 = 5^2$.
- I numeri 35 e 16 sono primi tra loro. Infatti $35=5\times 7$, $16=2^4$, i due numeri non hanno divisori comuni, il loro M.C.D. è 1.
- I numeri 11, 19 sono primi tra loro infatti il MCD(11, 19) = 1 dato che 11 e 19 sono numeri primi.
- I numeri 12 e 15 non sono primi tra di loro in quando hanno 3 come divisore comune.

DEFINIZIONE. Il **minimo comune multiplo** di due numeri naturali *a* e *b*, si indica con mcm(a,b), è il più piccolo tra tutti i multipli di *a* e di *b*.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra 6 e 15 applicando la definizione occorre calcolare i primi multipli dei due numeri

multipli di 6:	6,	12,	18,	24,	**30**,	36,	42,	48,	54,	**60**, ...
multipli di 15:	15,	**30**,	45,	**60**,	75,	90,	...			

Sono multipli comuni 30, 60, 90, …

Il più piccolo dei multipli comuni è 30.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente

Procedura per calcolare il m.c.m. di due o più numeri naturali

1. **si scompongono i numeri in fattori primi**
2. **si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con il maggiore esponente.**

Esempi

- Calcolare il m.c.m.(60, 48, 36).

Scomponendo in fattori i numeri si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Tutti i fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono: 2^4, 3^2, 5. Il m.c.m. è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5=720$

- Calcolare il m.c.m.(20, 24, 450).

Scomponendo in fattori si ha $20 = 2^2 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si ha

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2=1800$$

20 Calcola MCD e m.c.m. dei numeri 180, 72, 90

Scomponendo in fattori si ha $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

M.C.D = $2^{...} \cdot 3^{...} =...$

m.c.m. = $2^{...} \cdot 3^{...} \cdot 5^{...}=...$

21 Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi:

"a e b sono due numeri primi"

"a e b sono due numeri primi tra di loro"

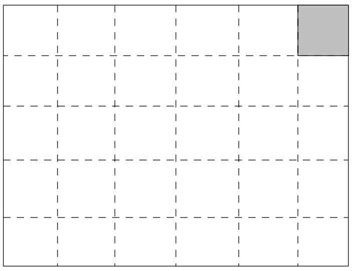
Fai degli esempi che mettono in evidenza la differenza tra le due osservazioni.

Esempio

Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate più grandi possibili, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune. La soluzione del problema è data quindi dal M.C.D. (315,435).

```
315|3 435|3
105|3 145|5
 35|5  29|29
  7|7   1
  1
```



$315=3^2\cdot 5\cdot 7$ $\quad 435=3\cdot 5\cdot 29$ $\quad M.C.D.(315,435)=3\cdot 5=15$

Le mattonelle devono avere il lato di 15cm. Ci vogliono $435:15=29$ mattonelle per ricoprire il lato di 435cm e $315:15=21$ mattonelle per ricoprire il lato da 315cm. In tutto occorrono $29\times 21=609$ mattonelle.

►13 Espressioni numeriche

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue. Per esempio "Luca ha detto Mario è stato promosso" può avere due significati diversi a seconda di come si inserisce la punteggiatura:
scrivendo "Luca, ha detto Mario, è stato promosso" significa che è stato promosso Luca;
scrivendo "Luca ha detto: Mario è stato promosso" significa che è stato promosso Mario.
Ambiguità di questo tipo si possono incontrare anche nella matematica, quando per esempio ci sono più operazioni da eseguire. Per esempio l'espressione $2+3\cdot 4$ può valere 20 oppure 14, infatti:

- eseguendo per prima la moltiplicazione diventa $2+3\cdot 4=2+12=14$;
- eseguendo per prima l'addizione diventa $2+3\cdot 4=5\cdot 4=20$.

Per eliminare queste ambiguità sono state fissate alcune regole che bisogna rispettare nell'esecuzione dei calcoli. Intanto diamo la seguente

DEFINIZIONE. Un'espressione aritmetica è una successione di operazioni da eseguire su più numeri.

Regole

I Se un'espressione contiene solo addizioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, e ciò grazie alla proprietà associativa dell'addizione.

Esempio

$3+2+5=5+5=10$ in questo caso si sono eseguite le operazioni nell'ordine in cui compaiono;
$3+2+5=3+7=10$ in questo caso si è eseguita per prima l'ultima addizione indicata.
Il risultato ottenuto è lo stesso.

II Se un'espressione contiene solo moltiplicazioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, anche in questo caso grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione.

Esempio

$2\cdot 3\cdot 4=6\cdot 4=24$ in questo caso si è seguito l'ordine in cui compaiono;
$2\cdot 3\cdot 4=2\cdot 12=24$ in questo caso di è seguito l'ordine opposto; il risultato è lo stesso.

III Se un'espressione, senza parentesi, contiene più sottrazioni, si deve procedere eseguendole nell'ordine in cui sono scritte, la sottrazione infatti non gode né della proprietà associativa né di quella commutativa.

Esempio

$10-6-3=4-3=1$ eseguendo le sottrazioni nell'ordine con cui compaiono;
$10-6-3=10-3=7$ eseguendo le sottrazioni nell'ordine inverso il risultato è un altro.
Il risultato corretto è il primo.

IV Se un'espressione senza parentesi contiene solo addizioni e sottrazioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

Esempio

$12+6-5-1=18-5-1=13-1=12$

V Se un'espressione senza parentesi contiene solo divisioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

Esempio

$360:12:3=30:3=10$

VI Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine.

Esempio

$18:2:9+5^2-2\cdot 3^2:3-1$
$18:2:9+25-2\cdot 9:3-1$
$9:9+25-18:3-1$
$1+25-6-1 = 26-6-1 = 20-1=19$

VII Se l'espressione contiene una coppia di parentesi si devono eseguire prima le operazioni racchiuse nelle parentesi, rispettando le regole precedenti; si eliminano poi le parentesi e si ottiene un'espressione senza parentesi.

Esempio

$5\cdot(4+3^2)-1$
$5\cdot(4+9)-1$
$5\cdot 13-1$
$65-1$
64

VIII Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi tonde e si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre. Dopo aver eliminato le parentesi quadre, si eseguono le operazioni nelle parentesi graffe. Si ottiene così un'espressione senza parentesi.

L'uso di parentesi di diverso tipo rende visivamente più semplice l'ordine da seguire nelle operazioni ma in un'espressione tutte le parentesi possono essere tonde. Ciò accade, per esempio, quando si usano gli strumenti di calcolo elettronico come il computer e la calcolatrice.

22 Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine

a) $15+7-2$
b) $16-4+2$
c) $18-8-4$
d) $16\times 2-2$
e) $12-2\times 2$
f) $10-5\times 2$
g) $20\times 4:5$
h) $16:4\times 2$
i) $2+2^2+3$
j) $4\times 2^3+1$
k) $2^4:2-4$
l) $(1+2)^3-2^3$
m) $(3^2)^3-3^2$
n) 2^4+2^3
o) $2^3\times 3^2$
p) $3^3:3^2\times 3^2$

►14 Altri esercizi

23 *Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?*

a) 5+3-1	d) 7+2-10	g) 3·4-12	j) 27:9:3
b) 6+4-10	e) 2·5:5	h) 12:4-4	k) 18:2-9
c) 5-6+1	f) 2·3:4	i) 11:3+2	l) 10-1:3

24 *Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale*

a) 5 : 5 =	e) 10 : 2 =	i) 10 : 5 =	m) 0 · 0 =
b) 5 : 0 =	f) 0 : 5 =	j) 1 : 5 =	n) 1 · 0 =
c) 1 · 5 =	g) 5 · 1 =	k) 0 · 5 =	o) 1:0 =
d) 1 – 1 =	h) 0 : 0 =	l) 5 : 1 =	p) 1:1 =

25 *Completa la tabella come nell'esempio*

Numero	è pari	dispari	è primo	è multiplo di	è un quadrato	è un cubo
12	SI	NO	NO	2, 3, 4, 6	NO	NO
15	…	…	…	…..................	…	...
49	…	…	…	…..................	…	...
8	…	…	…	…..................	…	...
51	…	…	…	…..................	…	...
28	…	…	…	…..................	…	...
144	…	…	…	…..................	…	...
30	…	…	…	…..................	…	...
63	…	…	…	…..................	…	...

26 *Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato*

a) Aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4. [36]
b) Sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27. [18]
c) Moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8.
d) Al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5.
e) Sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2.
f) Moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2.
g) Sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4.
h) Il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2
i) La somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2
j) La differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5

27 Determina tutti i divisori di

a) 32 …, …, …, …, …, …, …, …
b) 18 …, …, …, …, …, …, …, …

28 Calcola MCD e m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri

a) 15; 5; 10	sol. [5; 30]	f) 6; 16; 26	sol. [2,...]	k) 30; 60; 27
b) 2; 4; 8	sol. [2; 8]	g) 6; 8; 12	sol. […,24]	l) 45; 15; 35
c) 2; 1; 4	sol. [1; 4]	h) 50; 120; 180		m) 6; 8; 10; 12
d) 5; 6; 8	sol. [1, …]	i) 20; 40; 60		n) 30; 27; 45
e) 24; 12; 16	sol. [4, …]	j) 16; 18; 32		o) 126; 180

Completa applicando le proprietà delle potenze

29 $7^4\cdot 7^{...}=7^5$ $\quad 3^9\cdot 5^9=(......)^9$ $\quad 5^{15}:5^{...}=5^5$ $\quad (......)^6\cdot 5^6=15^6$

30 $8^4:2^4=2^{...}$ $\quad (18^5:6^5)^2=3^{...}$ $\quad 20^7:20^0=20^{...}$ $\quad (...^3)^4=1$

Calcola il valore delle seguenti espressioni

31 $(1+2\cdot 3):(5-2\cdot 2)+1+2\cdot 4$ [16]

32 $(18-3\cdot 2):(16-3\cdot 4)\cdot(2:2+2)$ [9]

33 $2+2\cdot 6-[21-(3+4\cdot 3:2)]:2$ [8]

34 $\{[15-(5\cdot 2-4)]\cdot 2\}:(30:15+1)-\{[25\cdot 4]:10-(11-2)\}$ [5]

35 $[6\cdot(2\cdot4-2\cdot3)-6]+\{3\cdot(21:7-2)\cdot[(6\cdot5):10]-3\cdot2\}$ [9]

36 $100:2+3^2-2^2\cdot6$ [35]

37 $2^7:2^3-2^2$ [12]

38 $30-5\cdot3+7\cdot2^2-2$ [41]

39 $(3+4)^2-(3^2+4^2)$ [24]

40 $5\cdot5^3\cdot5^4:(5^2)^3+5$ [30]

41 $32^5:16^4-2^9$ [0]

42 $[3^0+(2^4-2^3)^2:(4^3:4^2)+3]:(2^6:2^4)$ [5]

43 $[(4^5:4^3)-2^3]\cdot[(3^4\cdot3^3):(3^2\cdot3)]:(2^2+2^0+3^1)$ [81]

44 $(12-5^2:5)\cdot4^2:2^3+2^2-1+[(2^4:2^3)^3+4^3:4+2^5]:7$ [25]

45 $(5^2\cdot2^2-(2^5-2^5:(2^2\cdot3+4^2:4)+2^3\cdot(3^2-2^2))):(3\cdot2)\cdot5$ [25]

46 $(3^4\cdot3^3:3^6)^2+(7^2-5^2):2^2$ [15]

47 $(3\cdot2^2-10)^4\cdot(3^3+2^3):7-10\cdot2^3$ [0]

48 $(195:15)\cdot\{[3^2\cdot6+3\cdot4^2-5\cdot(6-1)^2]\}:(4^2-3)$ [-23]

49 $5+[(16:8)\cdot3+(10:5)\cdot3]\cdot(2^3\cdot5-1)^2-[(3\cdot10):6-1]$ [18253]

50 $[4\cdot(3\cdot2-3\cdot1^2)-5]-\{2\cdot(14:7+4):[2\cdot(3+2)^2:10+1-4^2:8]\}$ [4]

Risolvi i seguenti problemi.

51 Un'automobile percorre 18km con 1 litro di benzina. Quanta benzina deve aggiungere il proprietario dell'auto sapendo che l'auto ha già 12 litri di benzina nel serbatoio, che deve intraprendere un viaggio di 432km e che deve arrivare a destinazione con 4 litri di benzina nel serbatoio?

52 Ho comprato tre sacchi di fagioli, uno di 120 kg, uno di 75 kg e uno di 51 kg. Voglio confezionare per la vendita al dettaglio pacchi di ugual peso in modo che siano quanto più grandi possibile, che non avanzi nessun fagiolo. Se ho pagato i fagioli a 1 € al kg e intendo rivendere i pacchi a 5 € l'uno quanto guadagno?

53 In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?

54 Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19.00 e spente contemporaneamente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?

55 *Spiega brevemente il significato delle seguenti parole*

a) numero primo
b) numero dispari
c) multiplo
d) cifra

56 *Rispondi brevemente alle seguenti domande*

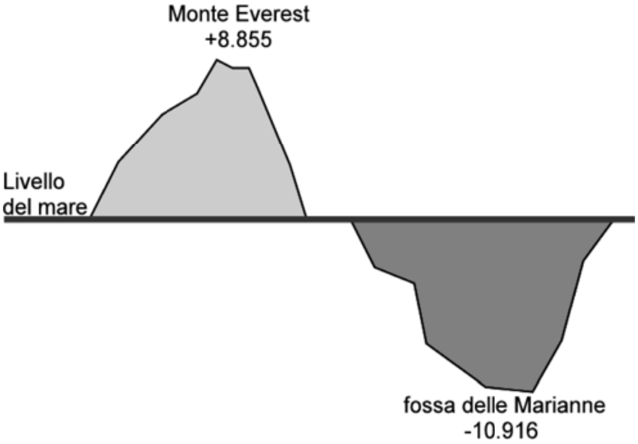
e) Cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?
f) Ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
g) Cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?

2. NUMERI INTERI RELATIVI

►1. I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio 5-12. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di 12.000 euro pur avendo soltanto risparmi in banca di soli 5.000 euro. In questo caso si tratta di togliere dai 5.000 euro i 12.000 euro che servono per acquistare l 'auto.
Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: “domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi”. Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: “il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero”, altri “domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero” e altri ancora “la temperatura sarà di –1 grado”.
Leggiamo nel testo di geografia: “Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare”. Se attribuiamo al livello del mare il valore zero, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero -10916 e l’altezza del monte Everest con il numero $+8855$.

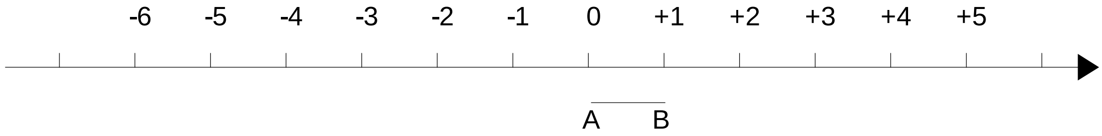


Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i numeri interi relativi che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno + se sono numeri maggiori di 0 e dal segno – se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si indica in questo modo:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}$$

►2. I numeri relativi e la retta

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento AB come un'unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e camminando nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.
L'insieme dei numeri relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei soli numeri interi relativi con segno positivo si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, l'insieme dei soli numeri interi negativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$.

DEFINZIONE. Due numeri relativi con lo stesso segno sono detti **concordi**, se hanno segni opposti si dicono **discordi.**

Esempi

+3 e +5 sono concordi   +3 e -5 sono discordi
-5 e -2 sono concordi   -3 e +2 sono discordi

DEFINIZIONE. Il **valore assoluto** di un numero relativo è il numero senza il segno: quindi un numero naturale.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali.
In linguaggio matematico:

$|a| = a \text{ se } a \geqslant 0 \qquad |a| = -a \text{ se } a < 0$

Esempi

$|+2| = 2 \qquad |-5| = 5 \qquad |-73| = 73 \qquad |+13| = 13$

DEFINIZIONE. Due numeri interi relativi sono **uguali** se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Sono numeri opposti +3 e -3; +5 e -5; +19 e -19.

Osservazione
Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno +.
Per esempio si può scrivere indifferentemente +1 o 1, +12 o semplicemente 12.

►3. Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare,

- ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
- tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
- ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
- tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
- 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

Per indicare che un numero è maggiore di un altro si usa separare i due numeri con il simbolo >; per indicare che il primo è minore del secondo si usa mettere tra i due numeri il simbolo <.

Esempi

- $+4 > +2$ i numeri sono positivi, il maggiore è +4 perché ha valore assoluto maggiore.
- $-1 > -3$ i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore.
- $+4 > -2$ il numero positivo è maggiore del numero negativo.
- $+4 > 0$ ogni numero positivo è maggiore di 0.
- $0 > -2$ ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

57 Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

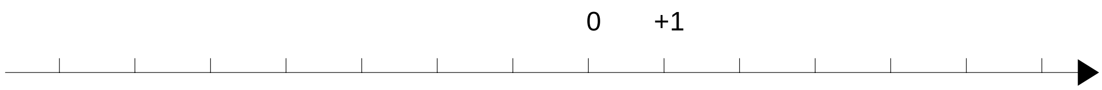
+11 -3 0 +2 -5 -7 +1

58 Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

-5 -2 +3 -1 0 +7 -9 +13 -21

59 Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri relativi, e riscrivili in ordine crescente separando i numeri con il simbolo <

-3 +2 +5 -7 -5 -1 +3



60 *Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto*

a) |+3| = …
b) |-5| = …
c) |-1| = …
d) |+10| = …
e) |-11| = …
f) |+7| = ...

61 *Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra > e <*

a) -5 … -2
b) -3 … +5
c) -2 … +2
d) -5 … 0
e) -3 … -5
f) -1 … +1
g) +3 … -3
h) -1 … -5
i) 0 … +1
j) +3 … 0
k) 0 … -2
l) +7 … +2
m) -11 … -101
n) +100 … -99
o) -101 … +110
p) -1010 … -1100

►4. Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.

Addizione

Osserviamo prima di tutto che il simbolo di addizione + è lo stesso che si usa per indicare il segno dei numeri positivi, pertanto occorre prestare attenzione quando si incontra il segno + al significato che esso ha. Almeno all'inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2)+(+5)$ per indicare la somma tra i numeri +2 e +5.
L'addizione di due numeri relativi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi.
La **somma di due numeri relativi concordi** è il numero che per ha valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

Esempi

- $(+3)+(+5)=...$ i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è +, i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8 pertanto $(+3)+(+5)=+8$.
- $(-2)+(-5)=...$ i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è -, pertanto $(-2)+(-5)=-7$.

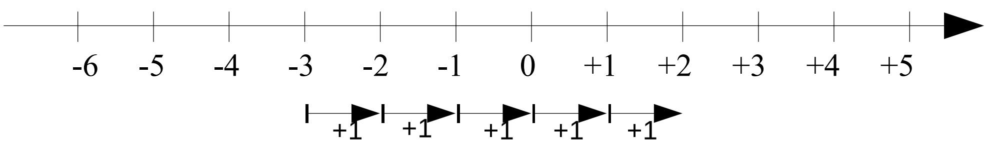
La **somma di due numeri relativi discordi** è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempi

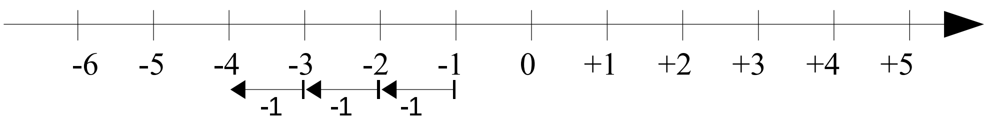
- $(-5)+(+2)=...$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo, in definitiva $(-5)+(+2)=-3$.
- $(+5)+(-2)=...$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è +5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di +5, cioè è positivo, in definitiva $(+5)+(-2)=+3$.
- $(+3)+(-7)=...$ i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo, in definitiva $(+3)+(-7)=-4$.

L'addizione si può rappresentare nella retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicata dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.

(-3)+(+5) = +2



$(-1)+(-3) = -4$



Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo.

$$(+2)-(+3)=(+2)+(-3)$$

Cambio la sottrazione in addizione

Cambio il numero +3 con il suo opposto -3

Esempi

- $(+1)-(+3)=(+1)+(-3)=-2$
- $(-2)-(-1)=(-2)+(+1)=-1$
- $(+3)-(-7)=(+3)+(+7)=+10$
- $(-5)-(+5)=(-5)+(-5)=-10$

Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno + dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama **somma algebrica**.

Esempi

- $(+1)+(-2)$ se omettiamo il segno di addizione + e le parentesi otteniamo $1-2$.
- $(+1)-(+3)$ si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1)+(-3)$ omettendo il segno di addizione + ed eliminando le parentesi si ottiene $1-3$.
- $(-1)+(+2)+(-3)+(+2)+(-7)+(-5)$ si scrive in modo sintetico $-1+2-3+2-7-5$.

62 *Esegui le seguenti somme algebriche*

a) +3 -1 = +...
b) +2 -3 = -...
c) -5 +2 = -...
d) -2 +2 = … ...
e) -5 -2 = … 7
f) -3 +5 = …2
g) +8 -0 = … …
h) -9 +0 = … …
i) 0 -5 = … …
j) +1 -1 = … …
k) -2 -2 = … …
l) +9 -3 = … 6
m) +7 -6 = +...
n) -101 +9 = -...
o) -10 +5 = … 5

Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano fattori i due numeri e prodotto il risultato dell'operazione.

DEFINIZIONE. Il prodotto di due numeri interi relativi è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno + se i fattori sono concordi, il segno – se i fattori sono discordi.

Esempi

- $(+3)\cdot(-2)=-6$ il numero 6 si ottiene da 3·2, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.
- $(-2)\cdot(-3)=+6$ il numero 6 si ottiene da 3·2, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.
- $(+5)\cdot(+3)=+15$ il numero 15 si ottiene da 5·3, il segno è positivo perché i fattori sono concordi.
- $(-1)\cdot(+2)=-2$ il numero 2 si ottiene da 1·2, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.
Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori; se il segno negativo è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

•	+	−
+	+	−
−	−	+

Esempi

- $(+3)\cdot(+2)\cdot(-2)=-12$ il risultato è negativo perché vi è un solo segno - tra i fattori.
- $(-2)\cdot(-3)\cdot(+5)\cdot(-2)\cdot(-1)=+60$ il risultato è positivo perché ci sono quattro segni -.
- $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+2)\cdot(-3)=-72$ il risultato è negativo poiché ci sono cinque -.

63 Calcola i seguenti prodotti

a) $(+3)\cdot(-2)=-...$
b) $(-5)\cdot(-2)=+...$
c) $(+2)\cdot(+4)=...8$
d) $(+1)\cdot(-1)=...1$
e) $(+3)\cdot 0=......$
f) $(-2)\cdot(-2)=......$
g) $0\cdot(-3)=......$
h) $(-2)\cdot(+2)=......$
i) $(+10)\cdot(-1)=...$

Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno + se i numeri da dividere sono concordi, il segno – se i numeri sono discordi.
Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempi

- $(+8):(+2)=+4$ il risultato è 4 perché 8:2=4, il segno è + perché sono concordi.
- $(+9):(-3)=-3$ il risultato è 3 perché 9:3=3, il segno è – perché sono discordi.
- $(-12):(-4)=+3$ il risultato è 3 poiché 12:4=3, il segno è + perché sono concordi.

Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempi

- $(+3)^2=(+3)\cdot(+3)=+9$
- $(+3)^3=(+3)\cdot(+3)\cdot(+3)=+27$
- $(-2)^2=(-2)\cdot(-2)=+4$
- $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$

Ricordiamo poi che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0=1 \qquad a^1=a \qquad \text{con} \quad a\neq 0$$

Esempi

$(-3)^0=1$ $\quad(+5)^0=1$ $\quad(-2)^1=-2$ $\quad(+7)^1=+7$

64 *Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi*

a) (+3)+(+2) = f) (-3)+(+13) = k) (+7)+(-6) =
b) (-5)+(-5) = g) (+10)+(-5) = l) (-9)+(-3) =
c) (-3)+(+5) = h) (+1)+(+1) = m) (-101)+(+2) =
d) (+12)+(+2) = i) (-10)+0 = n) 0+(-9) =
e) (-2)+(-3) = j) (-4)+(+4) = o) (-10)+(+10) =

65 *Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi*

a) (-1)-(+2) = f) (-3)-(+1) = k) (+7)-(-2) =
b) (-5)-(+3) = g) (+11)-(-5) = l) (-3)-(-3) =
c) (-2)-(+5) = h) (+21)-(+11) = m) 0-(-11) =
d) (+12)-(+2) = i) (-1)-0 = n) (-6)-(-6) =
e) (+1)-(-3) = j) (-3)-(+4) = o) (+5)-(-5) =

66 *Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto*

a) +3 → … c) +1 → … e) -3 → …
b) -2 → … d) -11 → … f) +5 → …

67 *Esegui le seguenti somme algebriche*

a) -5 -2 = g) +8 -7 = m) +4 -6 =
b) +3 -4 = h) +2 -1 = n) -10 +5 =
c) -1 +2 = i) -6 +2 = o) -16 -4 =
d) -3 +4 = j) +5 -2 = p) -3 -9 =
e) -6 +7 = k) +4 -3 = q) +14 -7 =
f) -1 -9 = l) +4 +1 = r) -10 -10 =

68 *Esegui le seguenti moltiplicazioni*

a) (+3)·(+1) = e) (+3)·(-3) = i) (+1)·(-10) =
b) (+1)·(-2) = f) (-2)·(+5) = j) (-4)·(+3) =
c) (+3)·(-3) = g) (-1)·(-7) = k) (+5)·(-6) =
d) (-5)·(-1) = h) (+3)·(+11) = l) (-3)·(-2) =

69 *Esegui le seguenti divisioni*

a) (+4):(+2) = e) (-8):(+4) = i) (-12):(+6) =
b) (+5):(-1) = f) (-4):(+2) = j) (-12):(+4) =
c) (+6):(+2) = g) (-10):(+5) = k) (+12):(-3) =
d) (+8):(-2) = h) (+10):(-2) = l) (-12):(+1) =

70 *Calcola il valore delle seguenti potenze*

a) $(+3)^2 =$ f) $(+2)^3 =$ k) $(-4)^2 =$
b) $(-1)^2 =$ g) $(-3)^2 =$ l) $(-2)^4 =$
c) $(+1)^3 =$ h) $(-3)^3 =$ m) $(-3)^0 =$
d) $(-2)^2 =$ i) $(-4)^1 =$ n) $(-1)^5 =$
e) $(-2)^3 =$ j) $(+4)^1 =$ o) $(-2)^4 =$

71 *Applica le proprietà delle potenze*

a) $(-3)^2\cdot(-3)^3=(-3)^{\dots}$ h) $(-6)^4:(+2)^4=(\dots\dots)^4$
b) $(-2)^4\cdot(-2)^5=(-2)^{\dots}$ i) $[(-3)^2]^3=(-3)^{\dots}$
c) $(-5)\cdot(-5)^2=(-5)^{\dots}$ j) $[(-5)^2]^3=(+5)^{\dots}$
d) $(-10)^2\cdot(-5)^2=(\dots\dots)^2$ k) $(-3)^3\cdot(+3)^3=\dots$
e) $(-3)^4:(-3)^2=(-3)^{\dots}$ l) $(-8)^2:(-4)^2=\dots$
f) $(-7)^3:(-7)^3=(-7)^{\dots}$ m) $[(-7)^2]^3:(-7)^3=\dots$
g) $(-2)^4:(-2)^2=(-2)^{\dots}$ n) $[(-3)^3]^2:(-3)^4=\dots$

Completa le seguenti tabelle

72

a	+1	−2	0	+2	−3	+3	−1	+4	−5	−10
b	0	−2	−3	+1	−5	−3	−10	−5	+4	+4
a+b										

73

a	−2	−2	−3	+2	−10	+3	−1	−7	+8	−9
b	0	−3	−3	−5	−5	−1	−10	−5	+8	+4
a-b										

74

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
a·b										

75

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−32
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	−7	−2	−4	−4
a:b										

76

a	−2	+1	+2	−1	+3	−3	−4	−2	+2	−3
b	1	3	2	4	2	3	2	4	5	2
a^b										

77

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
c	−3	−5	−6	+1	−1	−2	−2	−5	−3	+2
a-(b+c)										

78

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
c	−3	−5	−6	+1	−1	−2	−2	−5	−3	+2
(a+b)·c										

79

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−12
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4	−8
$(a-b)^2$										

80

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4
(a+b)·(a-b)									

►5. Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi

Proprietà commutativa

Una operazione gode della proprietà commutativa se cambiando l'ordine dei termini il risultato non cambia.

- Addizione $a+b=b+a$
  $(-3)+(+5)=(+5)+(-3)=(+2)$

Nell'addizione tra numeri relativi **vale** la proprietà commutativa.

- Sottrazione $a-b \neq b-a$
  $(+17)-(-5)=(+22) \neq (-5)-(+17)=(-22)$

In realtà $a-b$ è l'opposto di $b-a$.

Nella sottrazione tra numeri relativi **non vale** la proprietà commutativa.

- Somma algebrica $a+b=b+a$
  $-3+5=5-3=+2$

Nella somma algebrica tra numeri relativi **vale** la proprietà commutativa.

- Moltiplicazione $a \cdot b=b \cdot a$
  $(-3)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-3)=(+15)$

Nella moltiplicazione tra numeri relativi **vale** la proprietà commutativa.

- Potenza $a^b \neq b^a$
  $3^2=9 \quad 2^3=8$

Per la potenza **non vale** la proprietà commutativa.

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà associativa se presi tre numeri si ottiene sempre lo stesso risultato indipendentemente da come si raggruppano i numeri per eseguire l'operazione.

- Addizione

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

Per esempio, dovendo sommare $(+3)+(-5)+(-2)$
Si possono raggruppare i primi due numeri e si ha $[(+3)+(-5)]+(-2)=(-2)+(-2)=(-4)$
Raggruppando gli ultimi due numeri si ha $(+3)+[(-5)+(-2)]=(+3)+(-7)=(-4)$
Il risultato è sempre lo stesso.
Nell'addizione tra numeri relativi **vale** la proprietà associativa.

- Somma algebrica $(a+b)+c=a+(b+c)$

Vediamo un esempio. Dovendo sommare $+3-5-2$
Raggruppando i primi due numeri si ha $(+3-5)-2=-2-2=-4$
Raggruppando gli ultimi due numeri si ha $3+(-5-2)=3-7=-4$
Nella somma algebrica tra numeri relativi **vale** la proprietà associativa

- Moltiplicazione

Dovendo moltiplicare tre o più numeri relativi si può procedere scegliendo a piacere da quale moltiplicazione iniziare

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Per esempio, dovendo moltiplicare $(-3)\cdot(-5)\cdot(-2)$
Si può cominciare dalla prima moltiplicazione

$$[(-3)\cdot(-5)]\cdot(-2)=(+15)\cdot(-2)=(-30)$$

Oppure si può cominciare dalla seconda moltiplicazione

$$(-3)\cdot[(-5)\cdot(-2)]=(-3)\cdot(+10)=(-30)$$

Nella moltiplicazione tra numeri relativi **vale** quindi la proprietà associativa.

- Sottrazione

Nella sottrazione tra numeri relativi **non vale** la proprietà associativa, infatti

$$(a-b)-c \neq a-(b-c)$$

Per esempio, dovendo sottrarre $(-3)-(+5)-(+8)$

Se eseguiamo per prima la prima sottrazione abbiamo

$$[(-3)-(+5)]-(+8)=(-8)-(+8)=-16$$

Se eseguiamo per prima la seconda sottrazione abbiamo

$$(-3)-[(+5)-(+8)]=(-3)-(-3)=0$$

Elemento neutro

Una operazione su uno specifico insieme numerico ha elemento neutro se esiste ed è unico un numero dell'insieme numerico preso in considerazione che composto tramite quella operazione a un qualsiasi altro numero lascia inalterato questo numero.

Nell'addizione e nella somma algebrica l'elemento neutro è 0 sia che si trovi a destra sia che si trovi a sinistra dell'operazione:

$$a+0=0+a=a$$

Esempi

- $+3+0=+3$ $\quad -2+0=-2$ $\quad 0+5=+5$ $\quad 0-4=-4$

Nella moltiplicazione l'elemento neutro è +1 sia a destra sia a sinistra .

$$a\cdot(+1)=(+1)\cdot a=a$$

Esempi

- $-5\cdot(+1)=-5$ $\quad +3\cdot(+1)=+3$ $\quad +1\cdot(-3)=-3$ $\quad +1\cdot(+7)=+7$

Nella sottrazione 0 è elemento neutro solo a destra

$$a-0=a \qquad 0-a=-a$$

Esempi

- $-3-0=-3$ $\quad +2-0=+2$ $\quad$ 0 è elemento neutro se si trova a destra
- $0-(+2)=-2$ $\quad 0-(-5)=+5$ $\quad$ 0 non è elemento neutro se si trova a sinistra in quanto come risultato si trova l'opposto del secondo numero.

Nella divisione l'elemento neutro è +1 solo se si trova a destra

$$a:(+1)=a \qquad +1:a=...$$

Dividendo +1 per un numero intero relativo si ottiene un numero intero solo se il divisore è +1 o -1.

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà, detta distributiva, vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

►6. Altri esercizi

81 In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?

- □ misurare la temperatura
- □ contare le persone
- □ esprimere la data di nascita di un personaggio storico
- □ esprimere l'età di un personaggio storico
- □ indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente
- □ indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari

82 La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

83 La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

84 Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile)

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D] i due numeri sono entrambi negativi

85 Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando

[A] i due numeri sono concordi [B] i due numeri sono discordi
[C] i due numeri sono entrambi positivi [D i due numeri sono entrambi negativi

86 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere?*

- Ogni numero relativo è minore di zero [V] [F]
- La somma di due numeri discordi è zero [V] [F]
- Il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo [V] [F]
- La somma di due numeri opposti è nulla [V] [F]
- Il quoziente di due numeri opposti è l'unità [V] [F]
- Il quoziente di due numeri concordi è positivo [V] [F]
- Il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato [V] [F]
- Il doppio di un numero intero negativo è positivo [V] [F]
- La somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo [V] [F]
- Il quadrato dell'opposto di un intero relativo è uguale all'opposto del suo quadrato [V] [F]

87 *Inserisci l'operazione corretta*

a) (+2) … (-1) = -2 d) (+15) … (-20) = -5 g) (+1) … (+1) = 0
b) (-10) … (+5) = -2 e) (-12) … (+4) = -3 h) (+5) … (-6) = +11
c) (-18) … (-19) = +1 f) (-4) … 0 = 0 i) -8 … (-2) = +16

88 *Inserisci il numero mancante*

a) +5 + (…...) = -5 d) 0 - (…...) = -2 g) (+16) : (…...) = -2
b) -8 + (…...) = -6 e) $+3\cdot(......)=-3$ h) (-6) : (…...) = -1
c) +7 - (…...) = 0 f) $-5\cdot(......)=0$ i) (-10) : (…...) = +5

89 Scrivi tutti i numeri interi relativi

a) interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;
b) interi relativi il cui prodotto è -12
c) interi negativi maggiori di -5

90 Il risultato di 3^5+5^3 è

[A] 368 [B] $(3+5)^5$ [C] 15+15 [D] 8^8

91 Il risultato di $(73+27)^2$ è

[A] 200 [B] 73^2+27^2 [C] 10^4 [D] 1000

Calcola il valore delle seguenti espressioni

92 $-5+7+4-9$ [-3]

93 $+1-1+1-1+1-1+1$ [+1]

94 $+1-2+3-4+5-6$ [-3]

95 $+1-2+2-3+3-4+5-6+6-7+7-8+8-9+9-10$ [-8]

96 $(-3+10)-(2-3)$ [+8]

97 $(+5-2-1)+(+2+4+6)$ [14]

98 $(-5+7-9)+(+1-2+3)-(+4-6+8)$ [-11]

99 $+4-3-[+2-1-(8-3)-(-5-2)]-(2+3)$ [-7]

100 $-2+(-5+1)+(-7+4)-2\cdot(-6+1)$ [+1]

101 $15-9\cdot(-14+12)+8\cdot(-3+6)+5\cdot(-3+1)$ [+47]

102 $(50-36-25)\cdot(-15+5+20)-10\cdot(-3-7)$ [-10]

103 $[+3-(10-5+25)]\cdot[-16+5-(-2-14)]:(9+6)$ [-9]

104 $20:(+15-5)-30:(-10+5)+40:(15-20)$ [0]

105 $18:(-3)+6\cdot[1-5\cdot(-2+4)+3]:(-6)$ [0]

106 $3\cdot4-3\cdot[18:(-2)-17+(14-26+5)\cdot3-12]+[16-1\cdot(-1-3+5)-37+16]$ [183]

Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

107 $100:2+3^2-2^2\cdot6$ hai applicato le proprietà delle potenze? ☐SI ☐NO [35]

108 $2^7:2^3-2^2$ hai applicato le proprietà delle potenze? ☐SI ☐NO [12]

109 $30-5\cdot3-7\cdot2^2-2$ hai applicato le proprietà delle potenze? ☐SI ☐NO [-15]

110 $(3^2+4^2)-(-3-4)^2$ ….................. ☐SI ☐NO [-24]

111 $5\cdot5^3\cdot5^4:(5^2)^3+5$ ….................. ☐SI ☐NO [+30]

112 $32^5:16^4+(-2)^9$ …..................... ☐SI ☐NO [0]

113 $(3^4\cdot3^3:3^6)^2+(7^2-5^2):2^2$ ….................. ☐SI ☐NO [+15]

114 $(3\cdot2^2-10)^4\cdot(3^3+2^3):7-10\cdot2^3$ …..................... ☐SI ☐NO [0]

Calcola il valore delle seguenti espressioni

115 $-5\cdot(12-3+4)-2\cdot[3-16:(-2+4)]^2$ [-115]

116 $[-3+(-5)\cdot(-1)]^3+[-4-(1-2)]^2$ [+17]

117 $[2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)]^2:[2^4-3\cdot(+6)]^2$ [225]

118 $[3\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)\cdot(-3)]^3:[2^2+5\cdot(-2)^2]^3$

119 $(-3)^2\cdot(4-1)^5:[(-4)^3:(2^5)-3^3:(-3)^3]$ [-3^7]

120 $[-(-2)\cdot2+(-10)^2:(-5)^2]\cdot[3-5+2\cdot(-3)^2-5]$ [88]

121 $13-3-4\cdot(-2)^2-5^3:5^2+3\cdot(2^3-3^2)-6:(-3)-(4-7+3)^4$ [-12]

122 $-1-3\cdot(-3)^2-4^3:4^2+(-3-3)\cdot(2^2+3^2)-(-12):(-3)$

123 $[10-6\cdot(-2)^2]:(-7)+(3^2:3)\cdot2^3-15:(-3)+[(-3)^3:(-3)^0]$ [+4]

124 $|-5+8|-|-11|+(-|+4|\cdot|-2\cdot(+5)|)^2$ [1592]

125 $(-29+37)^5\cdot(-5+|23-28|)^7$ [0]

126 $-2\cdot(-2\cdot|-2|)^2-(|3-5|\cdot(3-5))^2\cdot(-2)$ [0]

127 $(-1)^3\cdot(-1\cdot|-1|)^2-(|-3-2|\cdot(-5+3))^2\cdot(-2+1)^3$

128 *Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità*

a) Il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo. [V] [F]

b) Il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo. [V] [F]

c) La differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5. [V] [F]

d) Il prodotto tra il quadrato di un numero negativo e l'opposto dello stesso numero è uguale all'opposto del suo cubo. [V] [F]

129 Sottrarre dal cubo di -3 la somma dei quadrati di +2 e -2. Il risultato è?

130 Partendo dal pian terreno scendo di 15 gradini, salgo 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al pian terreno?

131 Giocando a carte contro due avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e perso 60 gettoni con il secondo giocatore, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo e vinto 10 gettoni con il secondo. Quanti gettoni ho vinto complessivamente?

132 Un polpo congelato è stato appena tolto dal congelatore, la sua temperatura è -12°; viene immerso nell'acqua bollente e la sua temperatura media è aumentata di 6°. A quale temperatura media si trova ora il polpo? [-6°]

133 Il prodotto di due numeri interi relativi è +80, aumentando di 1 il primo numero il prodotto è +72. Quali sono i due numeri? [-10; -8]

134 Il prodotto di due numeri interi relativi è +6, la loro somma è -5. Quali sono i due numeri?

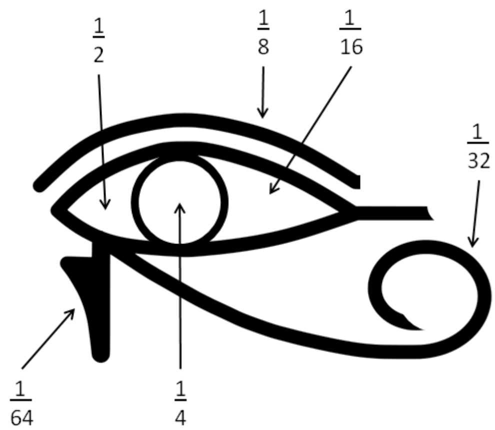
135 Determina due numeri relativi aventi come prodotto +12 e come somma -7.

136 Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di due metri ma di notte scende di un metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima al muro?

3. FRAZIONI E NUMERI RAZIONALI

►1. Premessa storica

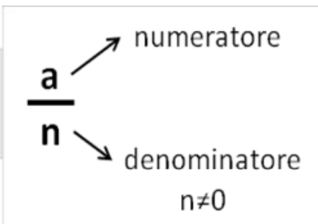
Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.
Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni, ad esempio il simbolo  rappresentava sia il numero 20 sia la frazione 20/60, il valore corretto andava interpretato dal contesto.
Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con n numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata .
Nel papiro di Ahmes (detto anche papiro di Rhind) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$ con n dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo: $\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$.
Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus; secondo la leggenda Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48… Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni: *semis* per indicare $\frac{1}{2}$ il cui simbolo era S oppure Z; *sextans* per indicare 1/6, *dracma* per indicare 1/96 e *obolus* per indicare la sesta parte della dracma.
Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini "numeratore" e "denominatore".
La notazione attuale per le frazioni si deve sostanzialmente agli arabi, in Europa fu diffusa da Leonardo Pisano (Fibonacci) che con il suo "Liber Abaci" (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

►2. Frazioni

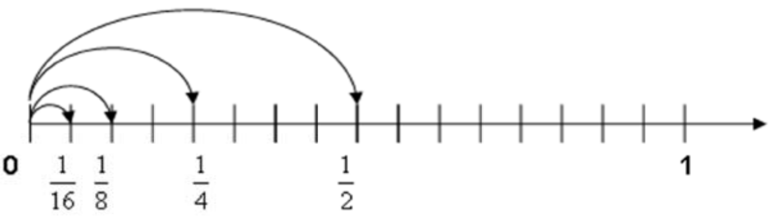
DEFINIZIONE. Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama numeratore e il secondo denominatore. Il denominatore deve essere diverso da zero.



Quando si chiede, per esempio un quarto di litro di latte, $\frac{1}{4}$ *l*, si danno le informazioni su come operare sulla grandezza unitaria litro per ottenere la quantità desiderata. Le frazioni possono essere viste come *operatori* che si applicano a una grandezza fissata, considerata come l'intero o il tutto, per ottenere una nuova grandezza ben determinata e omogenea alla prima.

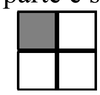
Una frazione con numeratore uguale a 1 è detta **frazione unitaria**; indicata con *a* una grandezza (segmento, peso, superficie, angolo...) la scrittura $\frac{1}{n}A$ sta ad indicare l'operazione di divisione della grandezza A, intesa come "il tutto", in *n* parti uguali.

Nella figura, il segmento unitario da 0 a 1 è stato diviso in due parti uguali ottenendo la frazione $\frac{1}{2}$; dividendolo in quattro parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{4}$; dividendolo in otto parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{8}$; dividendolo in sedici parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{16}$.



DEFINIZIONE. Il **denominatore** di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero, poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

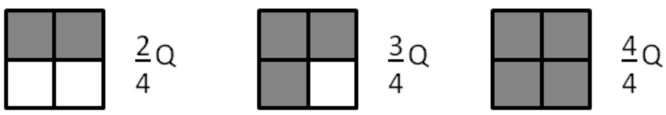
Vediamo un altro esempio. Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di grigio; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\frac{1}{4}Q$.



Un frazione $\frac{1}{n}A$ significa l'ennesima parte di *A,* dove *A* è il tutto che si deve dividere in *n* parti uguali. In altre parole, A si può ottenere moltiplicando per *n* la *frazione* $\frac{1}{n}A$.

Partendo da $\frac{1}{n}A$ si possono considerare i suoi multipli interi: $\frac{2}{n}A,\ \frac{3}{n}A,\ \ldots,\ \frac{n}{n}A$, che rappresentano il doppio di un ennesimo, il triplo di un ennesimo… l'intera grandezza A.

Riferendoci all'esempio del quadrato



La frazione $\frac{m}{n}A$ (si legge emme ennesimi di *A*) con $m < n$ indica il multiplo secondo *m* della frazione unitaria $\frac{1}{n}A$ essa indica la grandezza che si ottiene dividendo *A* in *n* parti uguali e prendendone *m*.

DEFINIZIONE. Il **numeratore** di una frazione è quel numero che esprime quante parti, dell'intero suddiviso in parti secondo il denominatore, sono state prese.

Per leggere una frazione si legge prima il numeratore e poi il denominatore, quest'ultimo si legge come numero ordinale (terzo, quarto, quinto, …) fino a 10, se è maggiore di dieci si aggiunge la terminazione "esimo".

Esempi

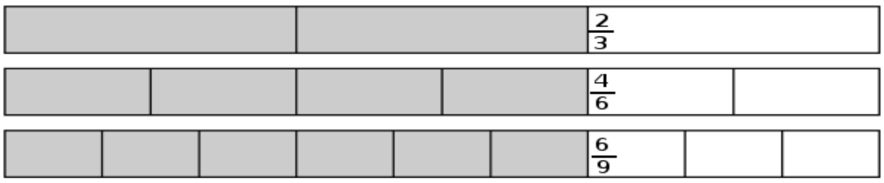
$\frac{1}{2}$ si legge "un mezzo"; $\frac{2}{3}$ si legge "due terzi"; $\frac{5}{7}$ si legge "cinque settimi";

$\frac{1}{10}$ si legge "un decimo"; $\frac{1}{11}$ "un undicesimo" $\frac{1}{12}$ "un dodicesimo"

A volte per scrivere le frazioni si utilizza la scrittura del tipo a/b, quindi 2/3; 4/6; 6/9...

DEFINIZIONE. Si chiamano **proprie** le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Vi sono frazioni che pur essendo formate da numeratori e denominatori diversi rappresentano la stessa parte dell'intero.



DEFINIZIONE. Si dicono **equivalenti** due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

PROPRIETA' INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI. Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.

Per trovare una frazione equivalente a una frazione assegnata è sufficiente moltiplicare per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione assegnata.

Esempio

Trovare due frazioni equivalenti a $\dfrac{4}{7}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 2 si ha la frazione equivalente $\dfrac{4\cdot 2}{7\cdot 2}=\dfrac{8}{14}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 3 si ha la frazione equivalente $\dfrac{4\cdot 3}{7\cdot 3}=\dfrac{12}{21}$.

DEFINIZIONE. Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** se numeratore e denominatore sono due interi primi tra loro.

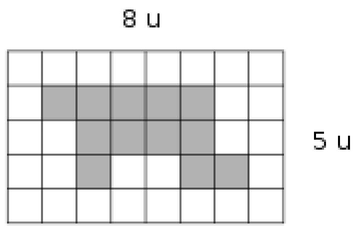
Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Esempio

Ridurre ai minimi termini la frazione $\dfrac{8}{12}$.

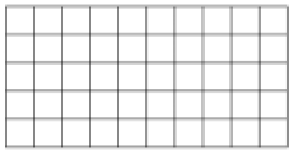
Scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8=2^3$ e $12=3\cdot 2^2$;
calcolo il M.C.D. prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo, in questo caso 2^2 cioè 4;
divido numeratore e denominatore per 4:

$$\frac{8}{12}=\frac{8:4}{12:4}=\frac{2}{3} \ .$$



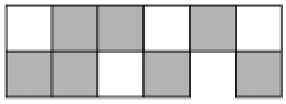
137 Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura.
Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la forma ritagliata?
[A] "La forma ottenuta è più piccola del cartoncino."
[B] "La forma ottenuta è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato."
[C] "La forma ottenuta rappresenta i 12/40 del cartoncino."
Sbaglio se affermo che la parte colorata è i 3/10 del cartoncino?

138 Il monte-premi di una lotteria è di 50.000 €; il primo premio è di 25.000 €, il secondo di 10.000 €, il terzo di 5.000 €, il quarto di 4.000 €, il quinto e il sesto premio sono uguali.
Nella figura un quadretto rappresenta 1.000 €

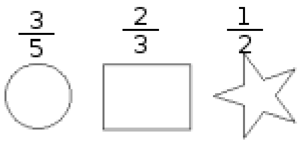


1. Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio.
2. Quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione.
3. Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

139 La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi.
Completa:
La figura è divisa in due parti mediante la colorazione: la parte grigia rappresenta .... dell'intera figura, mentre la parte bianca ne è ....



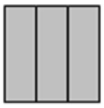
140 Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione

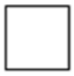


Tutte le frazioni che hanno il denominatore (numero di parti in cui va divisa l'unità) uguale al numeratore (numero delle parti che vanno considerate) rappresentano l'intero:

$$\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{10}{10}=1$$

Per esempio, se divido un quadrato in due parti uguali e ne prendo due parti ottengo l'intero; se divido un quadrato in tre parti uguali e ne prendo tre parti ottengo l'intero, ...

 $\frac{2}{2}=1$  $\frac{3}{3}=1$.

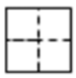
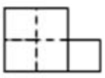
Cosa significa costruire la grandezza $\frac{6}{2}$ del quadrato Q ? 

Tutte le frazioni che hanno il numeratore che è multiplo del denominatore rappresentano un multiplo dell'intero:

$$\frac{6}{2}=3;\ \frac{15}{3}=5;\ \frac{72}{6}=12$$

DEFINIZIONE. Si chiamano **apparenti** le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

Le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore rappresentano grandezze più grandi dell'intero. Infatti le parti da considerare (indicate dal numeratore) sono di più delle parti in cui è divisa l'unità (indicate dal denominatore).

Per esempio $\frac{5}{4}$ di  si ottiene dividendo il quadrato in 4 parti uguali  e prendendone 5, si ha  . La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè $\frac{5}{4}=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$

DEFINIZIONE. Si chiamano **improprie** le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

141 Indica se queste frazioni sono proprie [P], improprie [I] o apparenti [A]

a) $\frac{3}{4}$ [P] [I] [A] c) $\frac{12}{3}$ [P] [I] [A] e) $\frac{5}{3}$ [P] [I] [A]

b) $\frac{8}{3}$ [P] [I] [A] d) $\frac{5}{2}$ [P] [I] [A] f) $\frac{3}{2}$ [P] [I] [A]

142 Trova le frazioni equivalenti completando

a) $\frac{3}{4}=\frac{...}{12}$ b) $\frac{12}{16}=\frac{3}{...}$ c) $\frac{5}{2}=\frac{...}{10}$ d) $\frac{21}{35}=\frac{...}{5}$

143 Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti

$\frac{5}{6}=$ $=$ $=$ $\frac{5}{2}=$ $=$ $=$

$\frac{3}{5}=$ $=$ $=$ $\frac{2}{3}=$ $=$ $=$

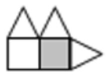
$\frac{12}{60}=$ $=$ $=$ $\frac{1}{2}=$ $=$ $=$

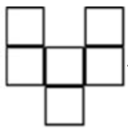
144 Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta 1/4 del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti 8/4 del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali

145 Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni

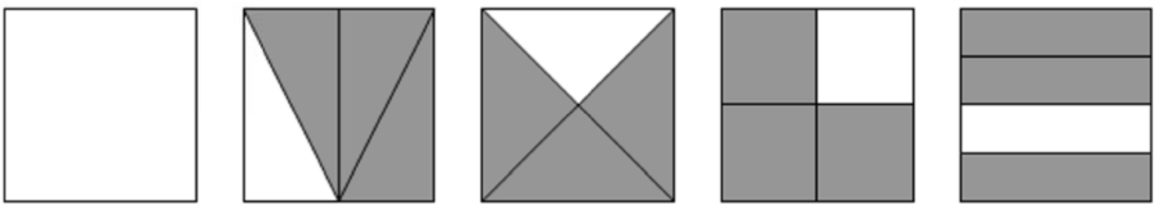
a)	$\frac{4}{6}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{20}$
b)	$\frac{80}{100}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{14}{49}$	$\frac{15}{21}$
c)	$\frac{16}{6}$	$\frac{18}{15}$	$\frac{20}{12}$	$\frac{21}{9}$	$\frac{24}{30}$	$\frac{25}{15}$
d)	$\frac{27}{21}$	$\frac{28}{14}$	$\frac{30}{16}$	$\frac{32}{24}$	$\frac{35}{10}$	$\frac{36}{81}$
e)	$\frac{40}{6}$	$\frac{42}{21}$	$\frac{45}{27}$	$\frac{48}{60}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{135}{77}$
f)	$\frac{121}{22}$	$\frac{87}{99}$	$\frac{15}{360}$	$\frac{110}{30}$	$\frac{240}{75}$	$\frac{140}{294}$

146 Si può dire che la parte colorata in grigio della figura corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa?

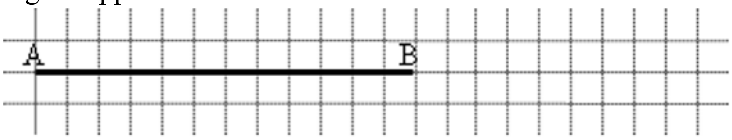


147 Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura .

148 Per ciascuno dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\frac{3}{4}$ del quadrato bianco?

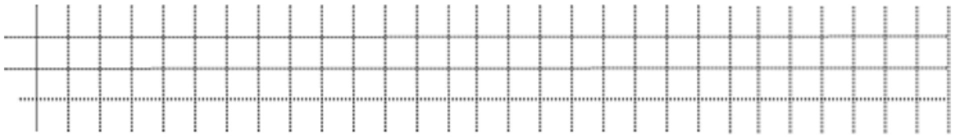


149 Il segmento nel disegno rappresenta i 3/5 dell'intero



Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

150 Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione 3/5 è equivalente a 6/10 ma non a 9/25.

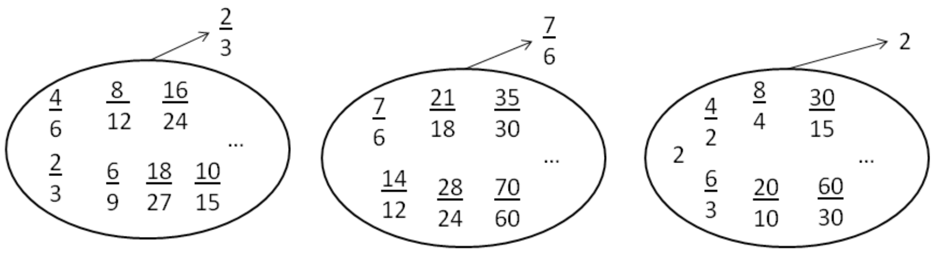


151 Usando una grandezza unitaria arbitraria, stabilisci quale delle seguenti frazioni rappresenta l'intero e quale un suo multiplo:

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{6}{3} \qquad \frac{5}{5} \qquad \frac{8}{4} \qquad \frac{9}{4}$$

►3. Dalle frazioni ai numeri razionali

Abbiamo visto che ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate “frazioni equivalenti”. Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nel disegno.



DEFINIZIONE. Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un **numero razionale assoluto** ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Nel nostro esempio $\frac{2}{3}$ è il numero razionale rappresentante del raggruppamento

$$\frac{2}{3}=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\frac{10}{15},\frac{14}{21},\ldots\right\}$$

In questo modo abbiamo dato al simbolo a/b un nuovo significato, quello di numero e come tale la scrittura a/b rappresenta il quoziente indicato tra i due numeri naturali a e b. Scriveremo 2:3= 2/3

DEFINIZIONE. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto **numero razionale**. L'insieme dei numeri razionali relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

Esempi

$$\frac{-2}{-3}=+\frac{2}{3} \quad ; \qquad \frac{2}{-3}=-\frac{2}{3} \quad ; \qquad \frac{-2}{3}=-\frac{2}{3} \quad .$$

Le frazioni proprie, che hanno numeratore minore del denominatore, rappresentano sempre un numero compreso tra 0 e 1.

Le frazioni improprie, che hanno numeratore maggiore del denominatore, si possono scrivere come somma di un numero naturale e di una frazione propria:

- il numero naturale è il risultato della divisione intera tra numeratore e denominatore;
- il numeratore della frazione unitaria è il resto della divisione tra numeratore e denominatore;
- il denominatore della frazione unitaria è il denominatore stesso della frazione.

Esempi

$\frac{11}{3}$

11 *div* 3 = 3 il numero naturale
11 mod 3 = 2 numeratore della frazione
3 = denominatore della frazione

$\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$

$\frac{19}{7}$

19 *div* 7 = 2 il numero naturale

19 mod 7 = 5 numeratore della frazione

7 = denominatore della frazione

$\frac{19}{7}=2+\frac{5}{7}$

Le frazioni apparenti, del tipo $\frac{2}{2};\frac{6}{3};\frac{20}{5};\frac{12}{4};\frac{12}{3};\ldots$ corrispondono a un numero intero, rispettivamente a 1, 2, 4, 3, 4.

152 Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini

$\frac{1}{3};\ \frac{2}{4};\ -\frac{5}{2};\ \frac{6}{-14};\ \frac{-12}{4};\ \frac{3}{6};\ \frac{-3}{-9};\ \frac{10}{-4};\ \frac{10}{20};\ \frac{-18}{42};\ \frac{5}{15};\ -\frac{9}{21};\ -\frac{15}{6};\ \frac{4}{12}$

153 Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria

$\frac{10}{3};\ \frac{17}{9};\ \frac{11}{2};\ \frac{25}{3};\ \frac{17}{10};\ \frac{15}{6}$

►4. La scrittura dei numeri razionali

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

$\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 3 \\ \hline 10 & 0{,}3333\ldots \\ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots & \end{array}$$

$\frac{11}{8}=1{,}375$

$$\begin{array}{l|l} 11 & 8 \\ \hline \ \ 3 & 1{,}375 \\ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali finiti come $1{,}375$ e numeri decimali periodici come $1{,}333333333\ldots$, quest'ultimo si scrive mettendo un barra sulla parte periodica $1{,}\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $1{,}(3)$.

I numeri decimali finiti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.
I numeri decimali periodici semplici si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.
I numeri decimali periodici misti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

Esempi

$\frac{11}{8}=\frac{11}{2^3}=\frac{11\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3}=\frac{1375}{1000}=1{,}375$

$\frac{13}{40}=\frac{13}{2^3\cdot 5}=\frac{13\cdot 5^2}{2^3\cdot 5^3}=\frac{325}{1000}=0{,}325$

$\frac{7}{25}=\frac{7}{5^2}=\frac{7\cdot 2^2}{5^2\cdot 2^2}=\frac{28}{100}=0{,}28$

$\frac{50}{7}=\frac{\ldots}{10}$ non è possibile

154 Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito [DF], quali come numero decimale periodico [DP] e quali come numeri intero [I] :

a) $-\frac{3}{2}$ [DF] [DP] [I]

b) $-\frac{6}{5}$ [DF] [DP] [I]

c) $\frac{2}{25}$ [DF] [DP] [I]

d) $\frac{5}{8}$ [DF] [DP] [I]

e) $\frac{5}{6}$ [DF] [DP] [I]

f) $-\frac{5}{12}$ [DF] [DP] [I]

g) $\frac{12}{6}$ [DF] [DP] [I]

h) $\frac{5}{10}$ [DF] [DP] [I]

Procedura per trasformare una frazione in numero decimale

1. **eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;**
2. **se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per 10 il resto;**
3. **continuare la divisione finché il resto è zero oppure fino a che non si trova un resto già trovato prima;**
4. **se la divisione si conclude con resto 0 si ottiene un numero decimale finito;**
5. **se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ottiene un numero decimale periodico.**

Esempi

```
113|20
100 5,65
 130
 120
   100
   100
     0
```

$$\frac{113}{20}=5{,}65$$

numero decimale finito

```
17 |6
12  2,83
 50
 48
  20
  18
   2
```

$$\frac{17}{6}=2{,}8\overline{3}$$

numero decimale periodico misto di periodo 3

```
15 |7
14  2,142857
 10
  7
  30
  28
   20
   14
    60
    56
     40
     35
      50
      49
       1
```

$$\frac{15}{7}=2{,}\overline{142857}$$

numero decimale periodico di periodo 142857

155 Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali

a) $\frac{13}{2}=$ c) $\frac{3}{5}=$ e) $\frac{17}{7}=$ g) $\frac{12}{9}=$ i) $\frac{122}{11}=$

b) $\frac{11}{3}=$ d) $\frac{15}{6}=$ f) $\frac{15}{8}=$ h) $\frac{127}{10}=$ j) $\frac{13}{12}=$

Viceversa un numero decimale finito o periodico può essere sempre scritto sotto forma di frazione.

Procedura per trasformare un numero decimale finito in una frazione

1. **contare le cifre significative dopo la virgola**
2. **moltiplicare numeratore e denominatore per la potenza del 10 che ha esponente uguale al numero delle cifre significative dopo la virgola.**

Per facilitare questa operazione possiamo considerare i numeri decimali finiti come frazioni particolari che hanno il numeratore uguale al numero decimale e il denominatore uguale a 1.

1,360 ha due cifre significative dopo la virgola $\frac{1{,}36}{1}=\frac{1{,}36\cdot 10^2}{1\cdot 10^2}=\frac{136}{100}=\frac{34}{25}$

0,00043000 ha cinque cifre significative dopo la virgola $\frac{0{,}00043}{1}=\frac{0{,}00043\cdot 10^5}{1\cdot 10^5}=\frac{43}{100000}$

156 *Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali*

a) 12,5	d) 3,75	g) 100,100	j) 0,00100
b) 4,2	e) 12,33	h) 0,12	k) 100,001
c) 6,25	f) 1,135	i) 1,1030	l) 0,0001

Un numero decimale periodico, generalmente, presenta tre elementi:

- **la parte intera**, composta dalle cifre poste prima della virgola;
- **il periodo**, che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola;
- **l'antiperiodo**, la parte, talvolta assente, composta da una o più cifre poste tra la virgola e il periodo.

Per esempio, nel numero 253,485795795795795... la parte intera è 253, il periodo è 579, l'antiperiodo è 48.
Dato che il numero è infinito non può essere scritto con tutte le sue cifre, si usano due modi per scriverlo in forma compatta, mettendo una lineetta sopra le cifre del periodo o racchiudendo le cifre del periodo tra parentesi tonde.
Il numero 253,485795795795795... può essere scritto $253{,}48\overline{579}$, oppure $253{,}48(579)$.
I numeri decimali periodici si dividono in:

- **semplici** se subito dopo la virgola è presente il periodo $2{,}\overline{3}$
- **misti** se dopo la virgola è presente l'antiperiodo $2{,}5\overline{12}$

Anche i numeri periodi possono essere trasformati in una frazione, che si dice **frazione generatrice** del numero:

Procedura per determinare la frazione generatrice di un numero periodico

1. **scrivere il numero senza la virgola** $2{,}5\overline{12} \rightarrow 2512$;
2. **il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo** $2512-25=2487$;
3. **Il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le eventuali cifre dell'antiperiodo:** $2{,}5\overline{12}=\frac{2487}{990}$.

Ma perché questa regola? Una possibile spiegazione

Consideriamo il numero periodico semplice $2{,}\overline{3}$. Considero la frazione $\frac{2{,}\overline{3}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 10 $\frac{2{,}\overline{3}\cdot 10}{1\cdot 10}$ e ottengo $\frac{23{,}\overline{3}}{10}$.
L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale, per ottenere questo risultato tolgo $2{,}\overline{3}$ da $23{,}\overline{3}$ cioè $23{,}\overline{3}-2{,}\overline{3}=21$.
Come mai $2{,}\overline{3}$ e non $1{,}\overline{3}$ o $0{,}\overline{3}$? Perché in questo modo posso sapere quanto vale il denominatore: se $23{,}\overline{3}$ è il risultato della moltiplicazione di $2{,}\overline{3}\cdot 10$, 21 è il risultato della moltiplicazione di $2{,}\overline{3}\cdot 9$ in quanto $21=23{,}\overline{3}-2{,}\overline{3}$. In definitiva $2{,}\overline{3}=\frac{23-2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$.
Possiamo usare lo stesso procedimento per il numero periodico misto. $2{,}5\overline{12}$.
Considero la frazione $\frac{2{,}5\overline{12}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 1000 e ottengo: $\frac{2512{,}\overline{12}}{1000}$
L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale che contiene il periodo che si ripete all'infinito e per ottenere questo risultato tolgo da $2512{,}\overline{12}$ questa volta $25{,}\overline{12}$ cioè $2512{,}\overline{12}-25{,}\overline{12}=2487$. Per avere una frazione equivalente occorre che al denominatore abbia 990 in quanto dal numeratore ho tolto 10 volte $2{,}5\overline{12}$.

$$2{,}5\overline{12}=\frac{2512-25}{990}=\frac{2487}{990}$$.

157 Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

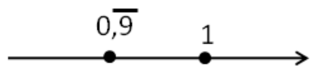
a) $-1{,}25$	g) $-0{,}38$	m) $0{,}08$	s) $0{,}25$
b) $0{,}03$	h) $11,\overline{175}$	n) $0{,}2$	t) $31,\overline{02}$
c) $-2,\overline{1}$	i) $0{,}01\overline{02}$	o) $0{,}1$	u) $0,\overline{21}$
d) $0,\overline{13}$	j) $0{,}12\overline{345}$	p) $0{,}03$	v) $2{,}3\overline{4}$
e) $5{,}080$	k) $100,\overline{100}$	q) $23,\overline{5}$	w) $3{,}21\overline{8}$
f) $3{,}7\overline{52}$	l) $100{,}00\overline{1}$	r) $22,\overline{32}$	x) $0{,}03\overline{4}$

Numeri periodici particolari

Numeri periodici particolari sono quelli che hanno come periodo il numero 9, come $2,\overline{9}$, $1{,}1\overline{9}$, $21{,}22\overline{9}$ ecc. Se, per esempio, applichiamo la regola per il calcolo della frazione generatrice al numero periodico $2,\overline{9}$ otteniamo un risultato inatteso.

$$2,\overline{9}=\frac{29-2}{9}=\frac{27}{9}=3$$

Quindi $2,\overline{9}$ coincide con il numero intero 3.
Per lo stesso motivo $1{,}1\overline{9}=1{,}2$, $21{,}22\overline{9}=21{,}23$.
Questo fatto si può anche dimostrare in modo grafico, rappresentando, ad esempio, il numero $0,\overline{9}$ e il numero 1 sulla retta reale.



Se i due numeri fossero veramente diversi sarebbero rappresentati da due punti distinti come in figura. Dato che la retta reale non può avere “buchi”, tra un suo punto e un altro ci deve essere almeno un altro numero compreso tra i due. Ma qual è questo numero? Qualunque numero decimale minore di 1 è sicuramente superato dal numero $0,\overline{9}$, ad esempio 0,9999999998 è sicuramente più piccolo di $0,\overline{9}$. Quindi non esiste nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1 , di conseguenza i due numeri coincidono.

►5. Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali.
Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

DEFINIZIONE. **Le percentuali** sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100};\ \ 7\% = \frac{7}{100};\ \ 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = \frac{125}{1000}$$

- Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:
  $$35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35;\ \ 7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07;\ \ 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$$
- Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:
  $$0{,}02 = \frac{0{,}02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%;\ \ 0{,}23 = \frac{0{,}23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%;\ \ 1{,}21 = \frac{1{,}21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%$$
- Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:
  $$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = \frac{0,\overline{6}}{1} = \frac{66,\overline{6}}{100} = 66,\overline{6}\%$$

158 Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.
$12\%;\ 0{,}03\%;\ 4{,}3\%;\ 80\%;\ 3{,}5\%;-0{,}2\%\ 15\%;\ -0{,}38\%$

159 Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.
$-1{,}25;\ 0{,}03;\ -2,\overline{1};\ 0,\overline{13};\ 5{,}080;\ 3{,}7\overline{52};\ -0{,}38$

160 Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.
$12\%;\ 0{,}03\%;\ 4{,}3\%;\ 80\%;\ 3{,}5\%; -0{,}2\%\ \ 15\%;\ -0{,}38\%$

161 Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.
$-\frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ -\frac{6}{5};\ \frac{2}{25};\ \frac{5}{8};\ \frac{5}{6};\ -\frac{5}{12}$

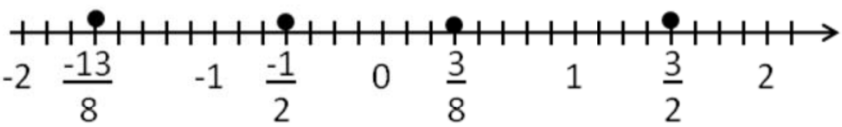
►6. I numeri razionali e la retta

Anche i numeri razionali si possono rappresentare su una retta orientata. Per fare questo occorre scegliere un punto **O** sulla retta e associare ad esso il numero zero. Fissiamo poi un segmento unitario e scegliamo un verso di percorrenza.

Dato un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ il punto corrispondente al numero razionale sulla retta viene determinato nel seguente modo. Dividiamo il segmento unitario *u* in tante parti uguali quante sono quelle indicate dal denominatore *n* della frazione, ottenendo così la frazione unitaria $\frac{1}{n}$. A partire dal punto O procedendo verso destra, si contano *a* frazioni unitarie. L'ultimo punto rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

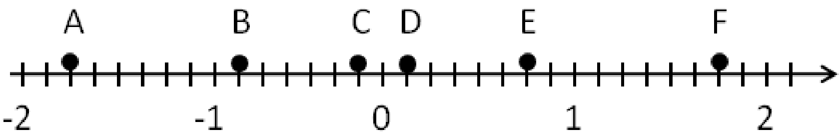
Per le frazioni improprie la singola unità *u* non è sufficiente, occorre prendere la unità successiva di *u* e dividere anche questa in *n* parti. Il procedimento si ripete fino a che si considerano tutte le frazioni unitarie indicate da ***a*.** Anche in questo caso, il punto individuato dall'ultima frazione unitaria rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$. In alternativa si può scomporre la frazione impropria nella somma di un numero intero e di una frazione propria, quindi si rappresenta la frazione impropria a partire dal suo numero intero invece che partire da 0. Per esempio, per rappresentare la frazione $\frac{3}{2}$ trasformiamo la frazione in $1+\frac{1}{2}$, quindi rappresentiamo $\frac{1}{2}$ partendo dal numero 1 invece che da 0.

Se il numero razionale è negativo, ci comportiamo come prima con l'avvertenza di muoverci nel senso opposto a quello precedente cioè da destra verso sinistra.



162 Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti numeri razionali: $\frac{2}{3};\ -\frac{3}{4};\ \frac{5}{2};\ -\frac{7}{12};\ \frac{3}{2};\ -\frac{11}{6};\ \frac{9}{4}$

163 Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura



164 Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali:

0,6 2,3 -1,2 -0,06

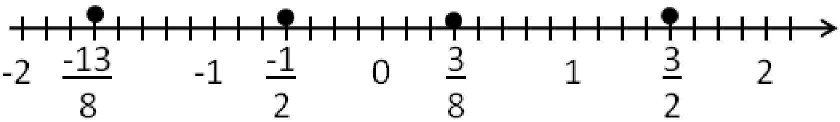
►7. Confronto tra numeri razionali

Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ **è minore** del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} < \frac{b}{m}$.

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ **è maggiore** di $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} > \frac{b}{m}$.

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ **è equivalente** a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle frazioni $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$ coincidono.

Esempi



$$-\frac{13}{8} < -\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8} > -\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{8} < \frac{3}{2} \quad -1 > -\frac{13}{8};$$

Per certe frazioni è facile vedere se una frazione precede o segue un'altra. Per altre non è così semplice. Consideriamo per esempio le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$. Quale frazione precede e quale segue? Il confronto non è immediato perché con la prima frazione si conta per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{9}$, con la seconda per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{7}$.

In generale, senza ricorrere alla rappresentazione sulla retta, come si possono confrontare i numeri razionali? Conviene sostituire le frazioni date con altre equivalenti che hanno unità frazionarie dello stesso tipo: cioè occorre ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

Procedura per confrontare due frazioni

1. si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni;
2. si trasforma ciascuna frazione come segue:
2.1 il nuovo denominatore è il m.c.m. trovato
2.2 il nuovo numeratore si ottiene dividendo il m.c.m. per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data;
3. si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.

Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel 'moltiplicare in croce' numeratori e denominatori delle frazioni, come nel seguente esempio:

Esempio

- Confronta $\frac{3}{2}$ con $\frac{5}{3}$

Moltiplichiamo il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda frazione e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda, così:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3} \quad \text{perché} \quad 3 \cdot 3 < 2 \cdot 5$$

Esempio

- Confronta le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$.

$m.c.m.(7,9) = 63 \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{49}{63} \quad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{54}{63}$

$\frac{54}{63} > \frac{49}{63} \rightarrow \frac{6}{7} > \frac{7}{9}$

165 Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).

a) $\frac{4}{5} \cdots \frac{5}{7}$; c) $-1 \cdots \frac{1}{12}$; e) $-\frac{1}{2} \cdots -\frac{3}{4}$

b) $-\frac{9}{5} \cdots -\frac{8}{3}$; d) $\frac{2}{7} \cdots \frac{6}{21}$; f) $\frac{3}{5} \cdots \frac{6}{9}$

166 Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore?

$\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{3}{5}; \frac{7}{12}$

167 Quale dei seguenti numeri razionali è il minore?

$-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}$;

168 Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri razionali.

$-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; -\frac{5}{6}; \frac{1}{2}; -1; -\frac{2}{5}; 0$

169 Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri razionali.

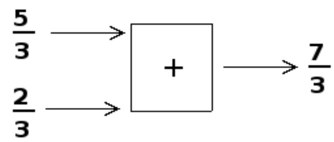
$-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; -\frac{6}{5}; \frac{2}{5}; -1; \frac{5}{2}; 0$

►8. Le operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

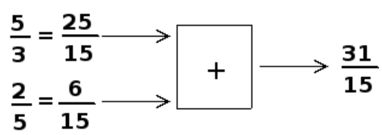
Addizione

Se due frazioni hanno la stessa unità frazionaria allora è sufficiente sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore l'unità frazionaria comune.

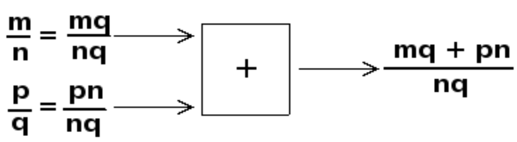


DEFINIZIONE. La **somma di due frazioni con lo stesso denominatore** è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.



In generale data l'addizione di due frazioni $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ la somma si può scrivere come $\frac{mq + pn}{nq}$:



Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il *minimo comune multiplo* dei denominatori delle frazioni da sommare.

Procedura per sommare due o più frazioni:
1. **ridurre le frazioni ai minimi termini;**
2. **calcolare il minimo comune multiplo dei denominatori;**
3. **mettere il minimo comune multiplo come denominatore della frazione somma;**
4. **per ogni frazione dividere il m.c.m. per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il**
5. **numeratore della frazione mantenendo il segno;**
6. **calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;**
7. **mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;**
8. **ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.**

Esempio

- *Sommare le frazioni* $\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-1$

Passo 1: riduco ai minimi termini le frazioni $\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-\frac{1}{1}$

Passo 2: calcolo $mcm(3,6,5,1)=30$

Passo 3: la frazione somma avrà come denominatore il m.c.m. trovato $\frac{...}{30}$

Passo 4: per ogni frazione divido il m.c.m. per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore:

$$\frac{2\cdot(30:3)-5\cdot(30:6)+8\cdot(30:5)-1\cdot(30:1)}{30}=\frac{2\cdot10-5\cdot5+8\cdot6-1\cdot30}{30}=\frac{20-25+48-30}{30}$$

Passo 5: calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore +13

Passo 6: metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\frac{13}{30}$

Passo 7: vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\frac{13}{30}$.

Esempio

- *Sommare i numeri razionali* $-0{,}2-1{,}\overline{2}+25\%+\frac{7}{12}$

Trasformo i numeri razionali in frazioni: $-\frac{2}{10}-\frac{12-1}{9}+\frac{25}{100}+\frac{7}{12}=-\frac{1}{5}-\frac{11}{9}+\frac{1}{4}+\frac{7}{12}$

$mcm(5,9,4,12)=180$

$$\frac{-1\cdot(180:5)-11\cdot(180:9)+1\cdot(180:4)+7\cdot(180:12)}{180}=\frac{-1\cdot36-11\cdot20+1\cdot45+7\cdot15}{180}$$

$$\frac{-36-220+45+105}{180}=-\frac{106}{180}=-\frac{53}{90}$$

Sottrazione di frazioni

La sottrazione di frazioni si può sempre trasformare in una addizione tra la prima frazione e l'opposto della seconda frazione. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si intenderà sempre somma algebrica di frazioni.

170 *Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni:*

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$
b) $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$
c) $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$
d) $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$
e) $\frac{6}{5}+0$
f) $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$
g) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
h) $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$
i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$
j) $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$
k) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$
l) $1-\frac{3}{2}$
m) $\frac{11}{5}+5$
n) $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$
o) $3-\frac{2}{3}$
p) $\frac{1}{5}-1$
q) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$
r) $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$

171 Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1,\overline{6}+\frac{2}{3}$

b) $5,1-1,\overline{5}$

c) $0,03+\frac{0}{3}$

d) $0,1\overline{6}-1,\overline{45}$

e) $50\%+\frac{1}{2}$

f) $\frac{2}{5}-1,2+5\%$

g) $-1,\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$

h) $\frac{3}{2}-13\%+0,15$

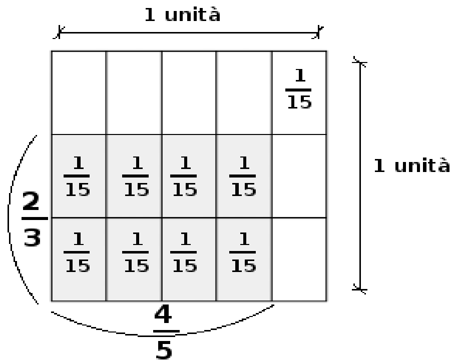
i) $1,\overline{2}+1,2+\frac{1}{2}+1,2\%$

172 *Completa la seguente tabella*

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a+b$							
$a-b$							
$b-a$							
$-a-b$							
$-a+b$							

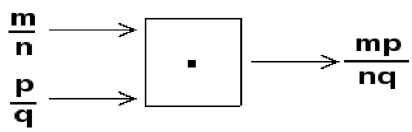
Moltiplicazione

Il risultato della moltiplicazione tra frazioni può essere interpretato come l'area di un rettangolo in cui le frazioni fattori sono la base e l'altezza.



Moltiplicare $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ è come calcolare l'area del rettangolo di base $\frac{4}{5}$ e altezza $\frac{2}{3}$. Ogni rettangolino di base $\frac{1}{5}$ e altezza $\frac{1}{3}$ ha area $\frac{1}{15}$. I rettangolini da prendere in considerazione sono 8. Il risultato è quindi $\frac{8}{15}$.

Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.



173 *Calcola i seguenti prodotti fra frazioni:*

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$

b) $6\cdot\frac{5}{2}$

c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}$

e) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$

174 Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$-1,\bar{1}\cdot\frac{18}{5}$ $\qquad$ $2\%\cdot 5\%$ $\qquad$ $-\frac{3}{4}\cdot 1{,}4\cdot(-120\%)$

175 Completa la seguente tabella.

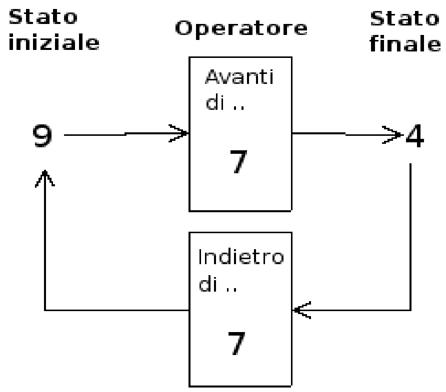
a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1,\bar{6}$	$+\frac{17}{3}$	$-0{,}21$
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2,\bar{3}$		$+\frac{5}{3}$
$a\cdot b$		1		-1		0	

Operazione inversa e aritmetica dell'orologio

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Ma cosa significa operazione inversa?
Una operazione può essere interpretata come qualsiasi azione che provoca un cambiamento di stato.
Consideriamo come esempio l'addizione nell'orologio che segna le ore dodici (12 = 0). Addizionare significa spostare le lancette in avanti di un determinato numero di ore.

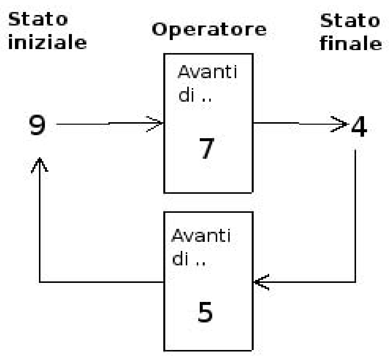
Si riporta la tabella dell'addizione dell'orologio.

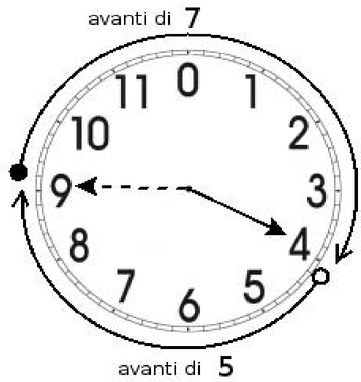
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Consideriamo l'addizione $9+7=4$
Il primo elemento 9 può essere interpretato come *stato iniziale*, + 7 come *operatore* formato dall'operazione “spostare le lancette avanti di...” e dall'argomento 7; il risultato 4 è lo *stato finale.*
Si indica come operazione inversa quella operazione che applicata allo stato finale con argomento uguale a quello precedente dell'operazione diretta, riporta allo stato iniziale.
Notiamo che anche nella matematica dell'orologio l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, ha l'elemento neutro che è 0, ogni numero ha l'inverso.

L'inverso di 0 è 0 perché 0+0=0
L'inverso di 1 è 11 perché 1+11=0
L'inverso di 2 è 10 perché 2+10=0
L'inverso di 3 è 9 perché 3+9=0
L'inverso di 4 è 8 perché 4+8=0
L'inverso di 5 è 7 perché 5+7=0
e così via.
L'elemento inverso è molto importante in quanto ci permette di sostituire l'operazione inversa, con l'operazione diretta che ha come argomento l'elemento inverso dell'argomento dell'operazione diretta.

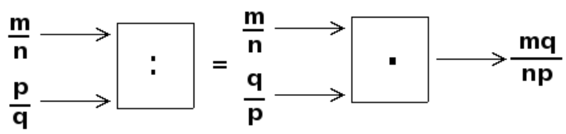




Così per tornare allo stato iniziale invece di operare con portare indietro le lancette di 7, otteniamo lo stesso risultato portando avanti le lancette di 5 che è appunto l'inverso di 7.

Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni:



$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$$

Il prodotto di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempi

- $\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$ il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$ pertanto $\frac{2}{3} : \frac{7}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$.
- $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right)$ il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$ pertanto $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{9}$.
- $\frac{2}{3} : 0$ il reciproco di 0 non esiste quindi la divisione non è eseguibile.
- $0 : \frac{2}{3}$ il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$ pertanto $0 : \frac{2}{3} = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$

176 Calcola i seguenti quozienti fra frazioni

a) $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$ b) $-\frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$ c) $\frac{2}{5} : \frac{5}{8} : \left(-\frac{5}{6}\right)$

177 Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1,\overline{1} : \frac{18}{5}$ b) $2\% : 5\%$ c) $-\frac{3}{4} : 1{,}4 : (-120\%)$

178 Completa la seguente tabella

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0{,}21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a : b$							
$b : a$							

►9. Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la potenza di una frazione non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n}=\frac{a^n}{b^n}$$

<u>Esempi</u>

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}$
- $-\frac{2^3}{3}=-\frac{8}{3}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=+\frac{4}{9}$

Potenza con esponente uguale a zero

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero.
Consideriamo l'esempio della divisione di due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente:
$a^n:a^n=1$ la divisione di due numeri uguali è 1.
$a^n:a^n=a^0$ applicando le proprietà delle potenze.
Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale a diverso da zero $a^0=1$. Non è invece possibile la potenza 0^0.

Potenza con esponente un numero intero negativo

La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo: $a^{-n}=a^0:a^n=1:a^n=\frac{1}{a^n}=\frac{1^n}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero $a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

La potenza di un numero diverso da zero elevato a un esponente intero negativo è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base rispetto alla moltiplicazione e per esponente l'opposto dell'esponente rispetto all'addizione.
Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0 , il numero 0 infatti non ha il reciproco. Pertanto, 0^{-n} è una scrittura priva di significato.

179 Calcola il valore delle seguenti potenze

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ d) $\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$ g) -2^4 h) $(-2)^4$ k) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$ i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ l) -2^{-4} m) $(-2)^{-4}$

c) $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$ j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ n) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$

180 Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^5=-\frac{3^5}{2^5}$

c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^6=+\frac{3^6}{2^6}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2:\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}=-\frac{2}{3}$

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2:\left(\frac{25}{10}\right)^2=\left(\frac{5}{2}:\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)^2=1^2$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{25}\right)^2=\left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{25}\right)^2=\left(-\frac{3}{5}\right)^2=+\frac{3^2}{5^2}$

181 Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$-\frac{2}{3}$							
$-1,\overline{6}$							
-1							

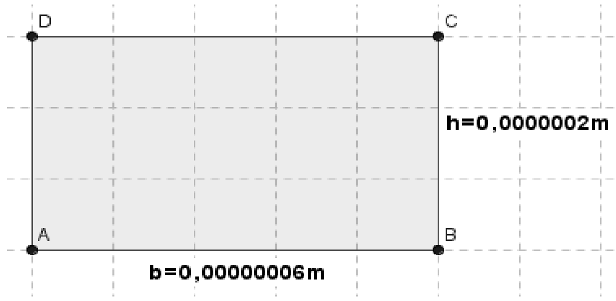
►10. Notazione scientifica e ordine di grandezza

Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia etc., si trovano spesso a doversi confrontare con misurazioni di grandezze espresse da numeri molto grandi. Per esempio:

- il raggio della Terra è circa 6 400 000 m;
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000 m/s;
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000007 m.

I primi due numeri sono "molto grandi", mentre l'ultimo è "molto piccolo" e operare con numeri simili, non è affatto semplice.
Per renderci conto di ciò, consideriamo un rettangolo di dimensioni
b = 0,00000006 m e h = 0,0000002 m e calcoliamone l'area:

$$A=b\cdot h=0{,}00000006\cdot 0{,}0000002=0{,}000000000000012 \quad .$$



Come si può notare, per scrivere il risultato di un'operazione tra due numeri in questo caso "molto piccoli", è necessario fare particolare attenzione in quanto, per l'eccessiva quantità di cifre decimali, è facile commettere degli errori.
Per risolvere questo problema, si preferisce utilizzare una scrittura compatta che permette di scrivere questo tipo di numeri in forma più agevole. Una tale scrittura prende il nome di **notazione scientifica**.

DEFINIZIONE. Un numero α è scritto in **notazione scientifica** se si presenta nella forma: $\alpha=K\cdot 10^n$ dove *k* è un numero decimale compreso tra 1 e 9 ed *n* è un numero intero.

Esempio

I numeri $3{,}5\cdot 10^7$ e $8{,}9\cdot 10^{-5}$ sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri $0{,}5\cdot 10^3$ e $11{,}3\cdot 10^{-8}$ non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 11,3 che è maggiore di 10.

Come trasformare un numero in notazione scientifica?

Consideriamo la misura del diametro del globulo rosso, ovvero 0,000007 m. Per esprimere questa misura in notazione scientifica basta considerare la sua frazione generatrice, ovvero:

$$0{,}000007m=7\cdot\frac{1}{1000000}m=7\cdot\frac{1}{10^6}m=7\cdot 10^{-6}m$$

Allo stesso modo il numero 0,000000026 viene scritto in notazione scientifica come segue:

$$0{,}000000026=2{,}6\cdot\frac{1}{100000000}=2{,}6\cdot\frac{1}{10^8}=2{,}6\cdot 10^{-8}$$

Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero *k* deve essere compreso tra 1 e 9.
Consideriamo ora la misura del raggio della Terra, ovvero 6.400.000 m, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6{,}4\cdot 10^6$.
Allo stesso modo il numero 340 000 000 000 viene scritto in notazione scientifica $3{,}4\cdot 10^{11}$.
Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 3,4 anziché 34, in quanto, come si è già detto, il numero *k* deve essere compreso tra 1 e 9.

Osservazione
A numeri "piccoli", corrisponde una potenza di dieci con esponente negativo; a numeri "grandi", corrisponde una potenza di dieci con esponente positivo.

Procedura per scrivere un numero decimale positivo *a* in notazione scientifica

- **se** $a>1$, per esempio $348.000.000.000.000$
  - si divide il numero decimale per una potenza del 10 in modo da avere un numero decimale compreso tra 1 e 9;
  - per trovare la potenza del 10 per la quale dividere il numero bisogna contare le cifre significative del numero prima della eventuale virgola e togliere 1. Per esempio le cifre significative di $348.000.000.000.000$ sono 15, si divide quindi il numero per 10^{14} , si ottiene

$348.000.000.000.000 \ : \ 10^{14} = 3{,}48$;

- per scrivere il numero *a* in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero trovato al passo precedente per la potenza di 10 utilizzata. Nell'esempio precedente $3{,}48 \cdot 10^{14}$

● **se** $0<a<1$, per esempio $0{,}000034$

- si moltiplica il numero decimale per una opportuna potenza del 10 in modo da ottenere un numero compreso tra 1 e 9;
- per trovare la potenza del 10 bisogna contare gli zeri che si trovano tra la virgola e la prima cifra significativa del numero. Nel caso di $0{,}000034$ gli zeri sono 4, si moltiplica allora il numero per 10^5 e si ottiene $0{,}000034 \cdot 10^5 = 3{,}4$;
- per scrivere il numero a in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero ottenuto al passo precedente per la stessa potenza di 10 utilizzata presa però con esponente negativo. Nell'esempio considerato si ottiene $3{,}4 \cdot 10^{-5}$.

182 Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri

a) $780000000000000 = 7{,}8 \cdot 10^{\cdots}$
b) $423000000000 = 4{,}23 \cdot 10^{\cdots}$
c) $76000000000000 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$
d) $0{,}00000000098 = 9{,}8 \cdot 10^{\cdots}$
e) $0{,}0000045 = 4{,}5 \cdot 10^{\cdots}$
f) $0{,}000000987 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$

183 Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?

[A] $5{,}67 \cdot 10^{-12}$ [B] $4{,}28 \cdot 10^{8}$ [C] $10{,}3 \cdot 10^{-2}$ [D] $9{,}8 \cdot 10^{7}$

Esempio

Riprendendo il problema della lamina rettangolare, le sue dimensioni in notazione scientifica vengono scritte come: $\begin{array}{l} b = 6 \cdot 10^{-8}\, m \\ h = 2 \cdot 10^{-7}\, m \end{array}$ L'area sarà quindi:

$$A = b \cdot h = 6 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^{-7}\, m^2 = 12 \cdot 10^{-15}\, m^2 = 1{,}2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-15}\, m^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-14}\, m^2$$

Com'è possibile vedere, utilizzando le note proprietà delle potenze, si riesce ad eseguire l'operazione in maniera molto agevole.

184 Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata avente il lato di misura 0,00000000021 m.

185 Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri

$34000;\ 0{,}000054;\ 26;\ 0{,}54000;\ 5;\ 0{,}00001;\ 990000;\ 222$

186 Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato

$0{,}00036 \cdot 20000000 = \ldots$
$84000 : 42 = \ldots$
$900000000 : 0{,}0003 = \ldots$
$3 : 10000000 = \ldots$

187 Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato

a) $\dfrac{(0{,}00002)^2 : 3.000.000.000 \cdot (0{,}1)^5}{4.000 \cdot 0.02 : 0{,}000003}$

b) $\dfrac{(3.000)^2 : 0{,}000003 : 20.000.000}{0{,}00002 : 0{,}00000004}$

c) $\dfrac{(2000)^3 \cdot (0{,}000001)^5 : 20}{(0{,}0003)^2 : 3.000.000}$

d) $\dfrac{3000 : 6\, milioni}{5000 \cdot 0{,}000002}$

Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri "molto grandi" o "molto piccoli", non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere "quanto è grande", cioè l'entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

DEFINIZIONE. Dato un numero, si definisce **ordine di grandezza** (abbreviato con la sigla **o.d.g.**), la potenza di 10 più vicina al numero.

Procedura per determinare l'ordine di grandezza di un numero

1. **scrivi il numero dato in notazione scientifica** $k \cdot 10^n$ **;**
2. **se** $k<5$ **l'ordine di grandezza è** 10^n
3. **se** $k \geq 5$ **l'ordine di grandezza è** 10^{n+1} **.**

<u>Esempio</u>

- Determinare l'ordine di grandezza dei numeri 0,000074 e 47000000000.

Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica: $0{,}000074 = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$, $47000000000 = 4{,}7 \cdot 10^{10}$

l'o.d.g. del primo numero è 10^{-4} in quanto il numero 7,4 è maggiore di 5.

l'o.d.g del secondo numero è 10^{10} in quanto il numero 4,7 è minore di 5.

188 Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri

126 000 000   0,0000098   7 000 000   0,0000000027

189 Completare la seguente tabella:

Numero	26 000 000	0,000083	490 000	0,0000081
Notazione scientifica				
o.d.g.				

190 Determina l'ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli

a) $5{,}3 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 - 2{,}5 \cdot 10^6$

b) $\left(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3\right)^3$

►11. Problemi con le frazioni

Problemi diretti. Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

<u>Esempio</u>

Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i 3/4 sono alla crema, 1/8 sono al cioccolato e 1/8 alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

Cornetti alla crema: $\frac{3}{4} \cdot 568 = 426$

Cornetti al cioccolato: $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$

Cornetti alla marmellata: 71.

Problemi inversi. Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

<u>Esempio</u>

Mario ha speso 21€ che corrispondono a 3/5 della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che 21€ corrispondono ai 3/5 della somma da cercare. E' sufficiente dividere 21 per la frazione:

$$21\,€ : \frac{3}{5} = 21\,€ \cdot \frac{5}{3} = 35\,€ \quad .$$

<u>Esempio</u>

Giuseppe possiede 150 euro. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi: calcoliamo prima i 3/5 di 150, cioè $\frac{3}{5} \cdot 150\,€ = 90\,€$. Quindi la prima volta Giuseppe spende 90 €, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i 2/3 di 60 €, cioè $\frac{2}{3} \cdot 60\,€ = 40\,€$. In tutto ha speso 90€+40€=130e, gli rimangono 20€.

Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $\frac{3}{5}$ della somma che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. La seconda volta spende i $\frac{2}{3}$ dei $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione $\frac{3}{5}+\frac{4}{15}=\frac{3\cdot3+4}{15}=\frac{13}{15}$, gli rimane perciò la frazione $\frac{2}{15}$, pertanto gli rimangono $\frac{2}{15}\cdot150\,€=20\,€$.

191 La distanza Roma - Bari è di 450 km. Se ho percorso i 2/5 del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

192 Una persona possiede 525 euro. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?

193 Luigi ha 18 anni, cioè i 3/7 dell'età di sua madre. Qual è l'età della madre?

194 Lucia ha letto 3/5 di un libro, gli rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro?

Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio

Degli 857 alunni di una scuola ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?
Per rispondere alla domanda si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100.
Precisamente $\frac{95}{100}\cdot857=814{,}15$. Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio

Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?
Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli $\frac{126}{652}\cdot100\,\%\approx0{,}19\cdot100\,\%=19\,\%$.

Problemi con gli sconti

Esempio

Un pantalone costava 70€ e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e po il prezzo scontato.

Lo sconto è dato da $20\,\%\cdot70\,€=\frac{20}{100}\cdot70\,€=14\,€$. Il prezzo scontato è 70€ - 14€ = 56€.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è 100%-20%=80%. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$$80\,\%\cdot70\,€=\frac{80}{100}\cdot70\,€=56\,€ .$$

Esempio

Un paio di scarpe da 120€ viene venduto scontato a 75€ Qual è stata la percentuale di sconto praticato?
Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto = 120€ - 75€ = 45€.
Calcolo la percentuale che 45€ rappresentano di 120€, $\frac{45}{120}\cdot100\,\%=0{,}375\cdot100\,\%=37{,}5\,\%$.

Esempio

Mario ha trovato in un negozio il computer che cercava scontato del 15%, ha risparmiato così 120 euro. Quanto costa il computer di listino?

120€ corrisponde al 15% del prezzo di listino. Per calcolare il prezzo di listino occorre dividere 120 per la frazione che corrisponde a 15%.

$$120:15\%=120:\frac{15}{100}=120\cdot\frac{100}{15}=800\,€\ .$$

195 A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone; il 20% frequentano i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?

196 Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?

197 A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?

198 Una bici viene venduta con uno sconto del 10%, il prezzo di listino prima dello sconto era 175 €. Quanto costa ora?

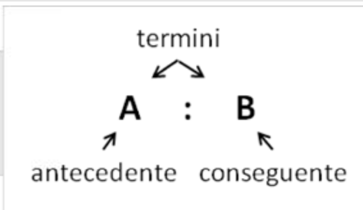
199 Una canna da pesca da 125 € è in vendita promozionale a 70 €. Qual è la percentuale di sconto applicata?

200 Per l'acquisto di un armadio Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25% risparmiando ben 120 €. Qual era il prezzo senza sconto dell'armadio?

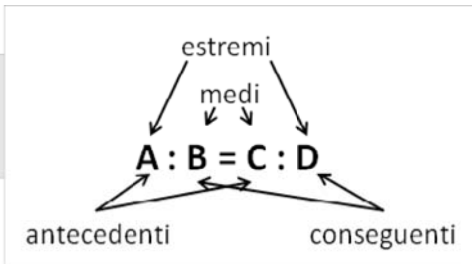
201 Completa la seguente tabella

prezzo di listino	sconto	%sconto	costo scontato
120€	12€	10%	108€
250€	10€	… …	… …
125€	5€	… …	… ...
170€	… …	10%	… …
1.100€	… …	15%	… ...
220€	… …	… …	20€
12.000€	… …	… …	700€
… …	15€	15%	… …
… …	30€	… …	50%
… …	… …	25%	140€

►12. Proporzioni



DEFINIZIONE. Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo è diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice antecedente, il secondo conseguente.



DEFINIZIONE. Una **proporzione** è una uguaglianza tra due rapporti, del tipo A : B = C : D, che si legge A sta a B come C sta a D" con B e D diversi da zero.

Esempi

- 4 : 2 = 12 : 6, formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.
- 7 : 14 = 16 : 4 NON formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0,5 mentre il secondo rapporto vale 4.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI. In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; A\cdot D=B\cdot C$$

Esempi

- 4 : 6 = 6 : 9, il prodotto dei medi è $6\cdot 6=36$ il prodotto degli estremi è $4\cdot 9=36$, quindi è una proporzione.
- 20 : 30 = 30 : 40, il prodotto dei medi è $30\cdot 30=900$ il prodotto degli estremi è $20\cdot 40=800$, quindi non è una proporzione.

PROPRIETÀ DEL PERMUTARE. Se in una proporzione scambiamo tra di loro i medi otteniamo ancora una proporzione; in modo analogo otteniamo ancora una proporzione se scambiamo tra di loro gli estremi, o ancora se scambiamo tra di loro sia i medi sia gli estremi.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; A:C=B:D \;\rightarrow D:B=C:A \;\rightarrow D:C=B:A$$

Esempio

Data la proporzione 12 : 16 = 18 : 24

- scambiando tra di loro i medi si ottiene la proporzione 12 : 18 = 16 : 24
- scambiando tra di loro gli estremi si ottiene la proporzione 24 : 16 = 18 : 12
- scambiando tra di loro sia i medi sia gli estremi si ottiene la proporzione 24 : 18 = 16 : 12

PROPRIETÀ DELL'INVERTIRE. Se in una proporzione scambiamo ogni antecedente con il rispettivo conseguente otteniamo ancora una proporzione.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; B:A=D:C$$

Esempio

Data la proporzione 15 : 9 = 5 : 3
applicando la proprietà dell'invertire otteniamo la proporzione 9 : 15 = 3 : 5

PROPRIETÀ DEL COMPORRE. In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la somma dei primi due termini sta al secondo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; (A+B):A=(C+D):C$$
$$A:B=C:D \;\rightarrow\; (A+B):B=(C+D):D$$

Esempio

Data la proporzione 16 : 10 = 40 : 25
applicando la proprietà del comporre si ottengono le proporzioni
26 : 16 = 65 : 40   26 : 10 = 65 : 25

Analogamente alla proprietà del comporre si ha la seguente

PROPRIETÀ DELLO SCOMPORRE. In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la differenza dei primi due termini sta al secondo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.

$$A:B=C:D \;\rightarrow\; (A-B):A=(C-D):C$$
$$A:B=C:D \;\rightarrow\; (A-B):B=(C-D):D$$

Esempio

Data la proporzione 16 : 10 = 40 : 25
applicando la proprietà dello scomporre si ottengono le proporzioni
6 : 16 = 15 : 40   6 : 10 = 15 : 25

Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$$a:b=x:d \;\rightarrow\; x=\frac{a\cdot d}{b} \quad .$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$$x:b=c:d \;\rightarrow\; x=\frac{b\cdot c}{d} \quad .$$

Esempi

Calcola il termine incognito di ciascuna proporzione

- 5 : 7 = 20 : x $\qquad x=\frac{7\cdot 20}{5}=28$
- 2 : x = 3 : 16 $\qquad x=\frac{2\cdot 16}{3}=\frac{32}{3}$
- $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=x:\frac{5}{6} \qquad x=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{1}=\frac{10}{9}$

DEFINIZIONE. Una proporzione si dice **continua** se ha i medi uguali.

Una proporzione continua è del tipo A : B = B : C, per esempio

3 : 9 = 9 : 27 $\qquad$ 5 : 10 = 10 : 20 $\qquad$ 4 : 16 = 16 : 64

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto.

$$a:x=x:d \;\rightarrow\; x=\sqrt{a\cdot d}$$

Esempio

Trovare il valore di x nella seguente proporzione continua 36 : x = x : 9

Svolgimento $\quad x=\sqrt{36\cdot 9}=18$

Calcolo di un termine incognito per mezzo delle proprietà del comporre e dello scomporre

Esempi

- (11-x) : x = 15 : 5 applicando la proprietà del comporre si ha la proporzione (11-x+x) : x = (15+5): 5 da cui 11 : x = 20 :5 da cui si ricava $\quad x=\frac{11\cdot 5}{20}=\frac{11}{4}$.
- $\left(\frac{1}{2}+x\right):\frac{5}{8}=x:5$ permutando i medi si ha $\left(\frac{1}{2}+x\right):x=\frac{5}{8}:5$ applicando la proprietà dello scomporre si ha $\left(\frac{1}{2}+x-x\right):x=\left(\frac{5}{8}-5\right):5$ eseguendo le operazioni nelle parentesi si ha $\frac{1}{2}:x=\frac{-35}{8}:5$ da cui $x=\frac{1}{2}\cdot 5:\left(\frac{-35}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{8}{35}\right)=-\frac{4}{7}$.

Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero; sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$2p=3l$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro etc.

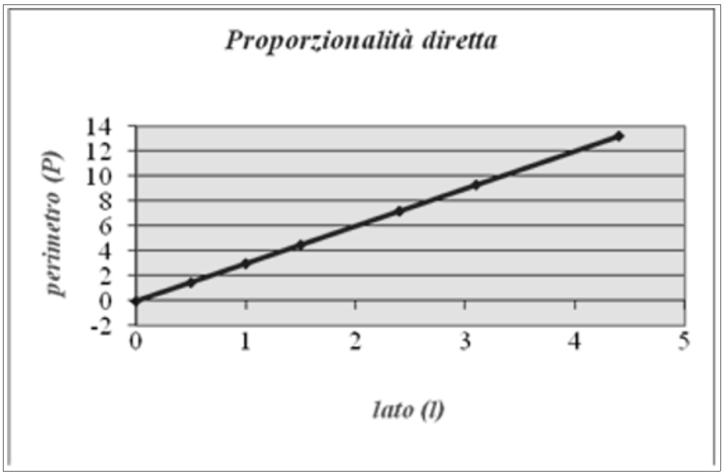
Lato l	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro 2p	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

DEFINIZIONE. Due grandezze x e y si dicono **direttamente proporzionali** se il loro rapporto è costante, cioè $\frac{y}{x}=k$ con $k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y=kx \quad \text{con} \quad k\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali:



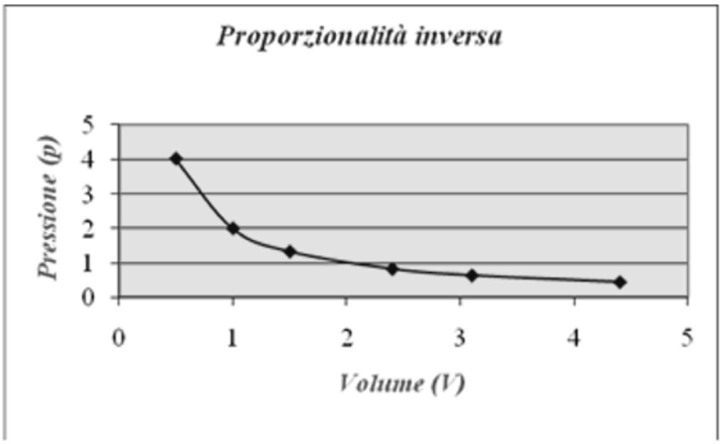
Esaminiamo ora un altro esempio. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta 10 € di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre 10 €.

Prezzo benzina al litro p	$1{,}126€$	$1{,}156€$	$1{,}212€$	$1{,}248€$
Benzina ricevuta b	$8{,}881\,l$	$8{,}650\,l$	$8{,}251\,l$	$8{,}013\,l$
Costo $c=p\cdot b$	€ 10,00	€ 10,00	€ 10,00	€ 10,00

DEFINIZIONE. Due grandezze x e y si dicono **inversamente proporzionali** se il loro prodotto è costante, cioè se: $x\cdot y=k$ con $k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo: $y=\frac{k}{x}$ con $k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole equilatera in un sistema di assi cartesiani ortogonali:



202 Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione

a) $\frac{1}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{6}$ c) 35; 7; 48; 6 d) 14; 3,5; 4; 1 e) $\frac{1}{5};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{27};\ \frac{8}{9}$

203 Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritture formano una proporzione:

a) 10 : 11 = 12 : 13	[SI]	[NO]	d) 18 : 15 = 12 : 10	[SI]	[NO]
b) 7 : 14 = 21 : 42	[SI]	[NO]	e) 10 : 6 = 5 : 3	[SI]	[NO]
c) 64 : 48 = 8 : 6	[SI]	[NO]	f) 1,2 : 1,4 = 3,6 : 4,2	[SI]	[NO]

204 Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione:

a)	7	5	20	28	d)	3	5	9	15
b)	8	3	2	12	e)	6	7	2	21
c)	5	6	2	15	f)	3	8	6	16

205 Completa la seguente tabella

1° termine	2° termine	antecedente	conseguente	rapporto	Rapporto inverso
32	8	32	8	32:8=4	$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4}:\frac{3}{2}$	
					$\frac{7}{10}=\frac{21}{4}$

206 Completa la seguente tabella

proporzione	antecendenti	conseguenti	medi	estremi	valore del rapporto
3 : 5 = 21 : 35	3, 21	5, 35	5, 21	3, 35	0,6
54 : 12 = 36 : 8					
7 : 21 = 9 : 27					
$\frac{5}{4}:\frac{15}{8}=4:6$					

Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni:

207 2 : 24 = 3 : x

208 $x:0,\overline{6}=0,8:1,\overline{3}$

209 $\frac{7}{3}:x=\frac{4}{3}:\frac{8}{35}$

210 $\left(1-\frac{5}{12}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=x:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{8}\right)$

211 $\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{8}\right):x=\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{7}\right)$

212 $\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right):x$

213 $\left(\frac{4}{5}+1\right):\left(3-\frac{1}{5}\right)=x:\left(2+\frac{1}{3}\right)$

214 $\left(\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-3\right):x=x:\left(1+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)$ $\left[\pm\frac{3}{2}\right]$

215 $\left\{\frac{5}{2}:\left[\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{3}:\frac{5}{3}-\frac{14}{5}\right)\right]\right\}:x=x:\left\{\frac{3}{11}\left[\left(5-\frac{3}{2}\right)\frac{2}{21}+\frac{3}{2}\right]\right\}$ $\left[\pm\frac{5}{2}\right]$

216 $(70-x):6=x:8$ [40]

217 $\left(\frac{5}{6}-x\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=x:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$ [25/48]

218 x : y = 5 : 3 con x+y =24 [x=15; y=9]

219 $\left(6+\frac{3}{5}\right):y=\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{15}\right):x$ con $x+y=\frac{13}{4}$ [x=1/2; y=11/4]

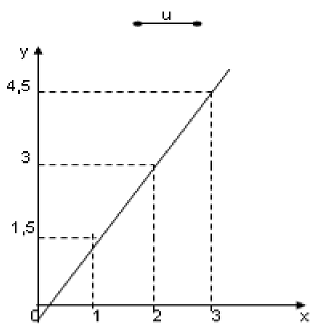
220 $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{20}\right)=x:y$ con $x-y=\frac{1}{3}$ [x=5/6; y=1/2]

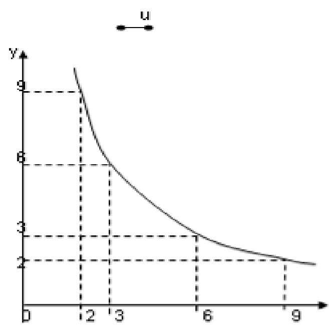
221 $x:\frac{2}{7}=y:\frac{1}{2}=z:\frac{3}{14}$ con $x+y+z=\frac{1}{2}$ [x=1/7; y=1/4; z=3/28]

222 Per ciascuna funzione costruisci la tabella dei valori (almeno 5) e stabilisci se sono riferite a grandezze direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o nessuno dei due casi

a) $y=5x$
b) $y=\frac{1}{12x}$
c) $y=\frac{2}{3}x$
d) $y=\frac{1}{x}+3$
e) $y=6x+1$
f) $y=\frac{24}{x}$
g) $y=4x$
h) $y=\frac{18}{x}$
i) $y=\frac{1}{2}x$
j) $y=\frac{6}{x}$
k) $y=5+x$
l) $y=3x+2$
m) $y=\frac{2}{x}$
n) $y=2x$
o) $y=2x-1$
p) $y=\frac{1}{2x}+1$
q) $y=2x-2$

223 Osserva i grafici e rispondi alle domande





a) Quale grafico rappresenta una funzione di proporzionalità diretta e quale di proporzionalità inversa?
b) Qual è il coefficiente di proporzionalità? Del primo grafico è … … del secondo è … …
c) Qual è la funzione? Del primo grafico è … … … del secondo grafico è … … …

224 La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare della grandezza y al variare di x:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y			8		4		2	1

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti
b) Si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) Qual è la legge che lega y a x?
d) Rappresenta su un piano cartesiano questa relazione

225 La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare dello spostamento s (espresso in km) in funzione del tempo t (espresso in ore) relativo a un corpo che si muove con velocità costante:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
s	7		21		35		49	56

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti
b) Si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) Qual è la legge che lega y a x?
d) Rappresenta su un piano cartesiano questa relazione

►13. Altri esercizi

Esempio

$$\left\{\frac{3}{20}\times\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right):5+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\left(\frac{4-3}{9}\right):5+\left(\frac{15-14}{35}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{9}:5+\frac{1}{35}:\frac{1}{14}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{45}+\frac{1}{\cancel{35}^{5}}\cdot\frac{\cancel{14}^{2}}{1}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1}{45}+\frac{2}{5}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{1+18+1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\left[\frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{45}^{9}}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{3}{20}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{15}\right\}:2=$$

$$=\left\{\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{20}^{5}}\times\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}^{3}}+\frac{2}{15}\right\}:2=\left\{\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right\}:2=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{15}^{5}}:2=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

Esempio

$$\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\times\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{13}{5}:\left(\frac{30+9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13-8}{4}\right)\times\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}:\left(\frac{12-1}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{13}{5}:\frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\times\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}:\frac{11}{2}=$$

$$=\left[\frac{13}{5}\times\frac{10}{39}+\frac{7}{8}+\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{4}^{1}}\times\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{15}^{3}}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}\times\frac{2}{11}=$$

$$=\left[\frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{5}^{1}}\times\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{39}^{3}}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{11}{3}\times\frac{2}{11}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\times\frac{\cancel{11}^{1}}{3}\times\frac{2}{\cancel{11}^{1}}=$$

$$=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

226 Esegui le seguenti operazioni con le frazioni

a)	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}+1$	$\frac{1}{2}+1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$2-\frac{1}{2}$
b)	$\frac{2}{3}\cdot 0$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{0}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2}$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$
c)	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}:0$	$\frac{2}{3}\cdot 1$	$\frac{2}{3}+0$	$\frac{2}{3}-0$	$1:\frac{2}{3}$
d)	$1{,}6:1$	$\frac{1}{4}\cdot 4$	$1{,}5:1{,}5$	$0{,}3:3$	$\frac{1}{4}:4$	$1{,}5:1{,}\overline{5}$

227 Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice

$\frac{1{,}\overline{7}}{1{,}\overline{3}}=1{,}\overline{3}$ $\qquad$ $\frac{2{,}\overline{7}}{1{,}\overline{6}}=1{,}\overline{6}$ $\qquad$ $\frac{1{,}1\overline{6}}{2{,}\overline{3}}=0{,}5$ $\qquad$ $\frac{2{,}\overline{3}}{1{,}\overline{6}}=1{,}4$

228 Qual è la minore delle seguenti frazioni?

[A] $\frac{2}{3}$ $\qquad$ [B] $\frac{2}{7}$ $\qquad$ [C] $\frac{3}{2}$ $\qquad$ [D] $\frac{1}{2}$

229 Metti in ordine le seguenti frazioni $\frac{3}{4}; \frac{4}{3}; \frac{11}{12}; \frac{5}{3}$

230 Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti $\frac{6}{10}; \frac{25}{100}; \frac{12}{10}; \frac{5}{25}$

231 Completa le seguenti uguaglianze

a) $\frac{3}{5}=\frac{...}{10}$ b) $\frac{75}{10}=\frac{...}{100}$ c) $\frac{7}{...}=\frac{1}{2}$ d) $3=\frac{24}{...}$

232 Perché $\frac{24}{18}=\frac{20}{15}$? Rispondi brevemente ....

233 Trasforma le seguenti frazioni in altre equivalenti aventi tutte lo stesso denominatore

$$\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{7}{20}; \frac{5}{15}; \frac{14}{10}$$

234 Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$

235 Scrivi una frazione compresa tra :

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$

236 Scrivi la frazione generatrice di $12,3\overline{45}$, qual è la 614-ma cifra decimale del numero?

237 Calcola $0,\overline{9}-3,\overline{9}$. Cosa osservi?

238 Completa

$\frac{3}{4}+\ ...\ =1$ $1-\ ...\ =\frac{4}{13}$ $\frac{11}{12}\cdot\ ...\ =\frac{8}{55}$ $...\ :\frac{5}{3}=\frac{3}{5}$

239 Correggi le seguenti operazioni

$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+4\cdot 2}{4+7}$ $\frac{8}{25}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{50}$ $3\cdot\frac{11}{13}=\frac{33}{39}$

Completa le seguenti tabelle:

240

	sottraendo				
minuendo	-	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{10}{3}$				
	$\frac{23}{12}$				
	$\frac{13}{2}$				
	$\frac{9}{4}$				

241

	Secondo fattore				
Primo fattore	x	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$
	$\frac{3}{4}$				
	$\frac{5}{2}$				
	$\frac{7}{3}$				
	$\frac{8}{5}$				

242 Trasforma i seguenti numeri decimali nelle frazioni corrispondenti

a) 1,25
b) 0,08
c) 1,002
d) 15,675
e) 1,7
f) 1,46
g) 0,13
h) 0,149
i) 5,015
j) 3,21
k) 2,3
l) 1,086

243 Trasforma in forma decimale i seguenti numeri scritti sotto forma di frazione

a) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{5}{8}$ g) $\frac{37}{18}$

b) $\frac{13}{7}$ e) $\frac{32}{9}$ h) $\frac{2}{21}$

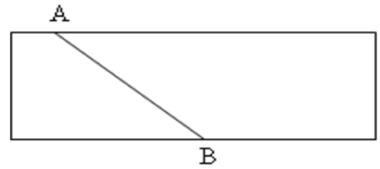
c) $\frac{15}{4}$ f) $\frac{21}{20}$ i) $\frac{16}{5}$

244 Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione

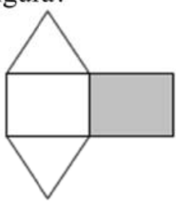
a) Il triplo di un terzo è l'unità.
b) La somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti.
c) Un ottavo è maggiore di un quinto.

245 Relativamente alla figura a fianco, quale proposizione è vera?

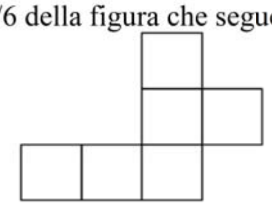
- Il segmento AB la divide in due parti uguali
- Il segmento AB la divide in due quadrilateri



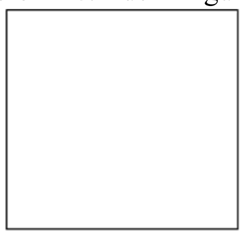
246 La parte in grigio rappresenta 1/4 della figura?



247 Costruisci una figura che sia gli 11/6 della figura che segue:



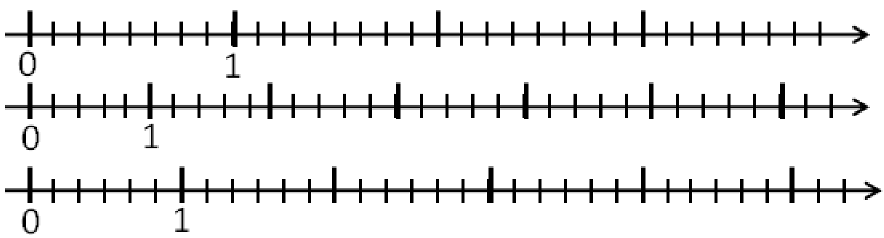
248 Colora i 3/4 della figura



249 Costruire la frazione $\frac{N}{D}$ significa dividere l'unità in … parti uguali e prendere … parti.

250 Rappresenta sulla opportuna retta numerica le seguenti frazioni:

$$\frac{3}{4};\ \frac{3}{8};\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{6}{3};\ \frac{5}{6};\ \frac{12}{4};\ \frac{19}{8};\ \frac{16}{5}$$



251 Quali disuguaglianze sono vere?

[A] $-\frac{7}{6}<-\frac{6}{7}$ V F [B] $+\frac{7}{6}<-\frac{6}{7}$ V F

[C] $-\frac{7}{6}>+\frac{6}{7}$ V F [D] $+\frac{7}{6}<+\frac{6}{7}$ V F

[E] $-\frac{7}{6}<+\frac{6}{7}$ V F [F] $+\frac{7}{6}>-\frac{6}{7}$ V F

252 Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

[A] 0,10 [B] 0,99 [C] 0,01 [D] 0,90

253 Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

[A] 0,01 [B] 0,90 [C] 1,01 [D] 0,19

Calcola il valore delle seguenti espressioni

254	$\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$	$-\frac{2}{11}$
255	$\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{24}$
256	$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$	$\frac{5}{6}$
257	$\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$	$-\frac{3}{20}$
258	$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$	$-\frac{673}{1680}$
259	$\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right]$	$\frac{31}{3}$
260	$\frac{63}{55}\times\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\times\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\times 10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$	1
261	$\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$	$\frac{13}{5}$
262	$\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\times\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\times\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$	$\frac{11}{28}$
263	$\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\times\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\times\frac{1}{4}+1$	$\frac{15}{14}$
264	$\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$	$\frac{1}{50}$
265	$\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$	1
266	$1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$	$\frac{1}{6}$
267	$\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$	$\frac{10}{3}$
268	$\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$	$\frac{1}{3}$
269	$\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2$	$\frac{1}{144}$
270	$\frac{7}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}:\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{9}{5}$	$\frac{77}{50}$
271	$\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3:\frac{1}{4}$	$\frac{44}{3}$
272	$\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^6\right]^2\cdot\left[\left(\frac{8}{3}\right)^8:\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11}$	$\frac{64}{9}$
273	$\left\{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^3:\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]:\left(\frac{3}{5}-1\right)^2\right\}^6:\left\{\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{5}-1\right)^2\right]^2\cdot\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^5:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)^4\right]^2\right\}^2$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}$
274	$[0{,}625+4{,}5\cdot(0{,}75-0{,}\overline{6})]:[0{,}875+0{,}75\cdot(2{,}5-2{,}\overline{3})]$	1
275	$\left\{3-\left[0{,}\overline{6}-\left(0{,}1\overline{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0{,}25\right\}^2\cdot(0{,}\overline{6}-0{,}625)$	$\frac{8}{27}$

276 $\left[0{,}1\overline{6}+\left(0{,}1\overline{3}\overline{6}+0{,}41\overline{6}-0{,}2\overline{2}\overline{7}\right):0{,}3\overline{9}\overline{0}\right]:\left[0{,}\overline{3}\overline{6}+2{,}25\cdot\left(0{,}\overline{5}-0{,}\overline{2}\overline{7}\right)\right]$ 1

277 $\dfrac{1{,}6-0{,}5\cdot\left(0{,}\overline{6}-0{,}5\right):\left(1-0{,}\overline{6}\right)^2-0{,}7}{3\cdot\left(1-0{,}5\right)^2+0{,}875-\left(1-0{,}5\right)^2:0{,}2-0{,}6\cdot0{,}5}$ 2

278 $0{,}1\overline{6}^2+\left[1{,}5:1{,}5^2+\left(1{,}\overline{6}-0{,}5\right):\left(2-0{,}\overline{3}\right)+\left(0{,}\overline{6}+0{,}5-0{,}2\right)\cdot0{,}75:5{,}8\right]\cdot0{,}\overline{6}$ 38/45

279 $\left\{0{,}8\overline{3}-\left[0{,}\overline{6}+\left(0{,}75-0{,}\overline{6}^2-\left(1-2{,}\overline{3}\cdot0{,}25\right)\right)\right]+0{,}\overline{6}:0{,}\overline{8}\right\}:1{,}02\overline{7}$ 40/37

280 $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{13^2-12^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}}$ $\dfrac{1}{15}$

281 $\sqrt{20-2\cdot(2+3)+(2+1)\cdot5}+\sqrt{48:6-3\cdot2+10:5}$ 7

282 $\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot\left\{\left[\dfrac{11}{3}-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\right]:\left[\left(2-\dfrac{7}{4}\right)+\dfrac{10}{3}\right]\right\}}$ $\dfrac{1}{3}$

283 $\sqrt{\left\{\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^2:\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}\right)\cdot\dfrac{4}{5}\right]\cdot\dfrac{1}{4}\right\}^2:\left(1-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{10}\right)^2}$ $\dfrac{7}{3}$

284 Calcola il valore dell'espressione E = A- B, dove

$$A=\left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4:\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2}\qquad B=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)^5\right)^2$$

285 L'età di Paolo è i 5/11 di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo? [20]

286 L'età di Marco è 1/2 di quella di Paolo che è 1/3 di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco? [9]

287 I 2/5 del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa, le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quante pagine è formato il libro?[105]

288 Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente i 3/7 e i 2/7 del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola? [189]

289 Al supermercato ho speso 7/10 della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai 13/20 della somma iniziale e ho speso 2/15 sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente? [270]

290 In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli rappresentano i 2/5 di tutti gli animali, mentre le capre sono i 2/3 degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono? [30, 18, 27]

291 Tre casse pesano complessivamente 220 kg; la seconda pesa 1/2 della prima e la terza 1/3 della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa.

[132; 66; 22]

292 Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni potrebbero eseguire tutto il lavoro? [6]

293 Un collezionista vende i 3/7 della sua collezione di 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono? [220]

294 In un terreno agricolo sono stati piantati ulivi e mandorli per 266 alberi complessivi. Se gli ulivi sono i 4/10 degli alberi di mandorle, quanti sono gli ulivi e i mandorli? [76; 190]

295 Il prezzo di copertina di un libro è di 29 euro; quanto verrà pagato con uno sconto del 15 % [24,65]

296 Su 1020 alunni di una scuola, 153 sono stati respinti; qual è la percentuale dei promossi? [85%]

297 La differenza di età fra Marco e Antonio è di 18 anni e l'età di Marco è i 7/4 di quella di Antonio. Quanti anni hanno Marco e Antonio? [42; 24]

298 Mario va in pizzeria e, nell'attesa di essere servito, conta le persone che vi si trovano: gli uomini sono i 5/9 delle donne, queste superano gli uomini di 8 unità, infine vi sono 17 bambini. Quante persone ci sono in tutto? Quanti sono gli uomini e le donne? [45, 10, 18]

299 Gino compra un auto da 5.400 euro. Paga i 4/9 in contanti ed il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata?

[600 €; 1/9]

300 Il serbatoio di una macchina contiene benzina per i 3/4 della sua capacità. Dopo aver consumato i 2/3 della benzina che c'è, si fa un pieno aggiungendone 66 litri. Qual è la capacità del serbatoio? [132]

301 Un misurino contiene 1/8 di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di 5 kg?

302 Due gruppi di scavatori scavano una galleria, ciascun gruppo comincia da una delle due parti opposte; se fino a oggi hanno scavato rispettivamente 5/9 e 3/7 dell'intera galleria e restano ancora da scavare 2 m, quanto è lunga l'intera galleria? [126]

303 L'aria è composta per 39/50 di azoto e per 21/100 di ossigeno, la parte rimanente è composta da gas diversi. Quale frazione di aria occupano tutti gli altri gas? [1/100]

304 Luca ha pagato la tassa scolastica in ritardo, ha pagato 56,20 € compresa la mora del 4% per il ritardo nel pagamento. Quanto avrebbe dovuto pagare senza mora? [54€]

305 In un'azienda 3/10 degli impiegati sono addetti alla contabilità. Qual è la percentuale degli addetti alla contabilità rispetto a tutti gli impiegati dell'azienda?

306 Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame, il suo peso è di 280 g, la percentuale di rame è il 35%. Quanti grammi di zinco contiene?

307 A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

- 90 leggono "La Repubblica"
- 70 leggono "Il Corriere della sera"
- 30 leggono " La stampa"
- 10 leggono " La gazzetta dello sport"

Trasforma in percentuali i dati ottenuti.

308 A un concorso si sono presentati 324 candidati. Solo 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?

309 Un'auto usata è stata acquistata a 11800 € alla seguente modalità di pagamento: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della consegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata? [737,5 €]

310 Un gestore di un bar acquista i cornetti a 0,60€ e li rivende a 0,75€. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto? [25%]

311 In un supermercato si vende il pomodoro pelato a 0,60€ in confezioni da 250 g e a 1,00 euro in confezioni da 500 g. Qual è la percentuale di sconto di cui usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?

312 In una piscina contenente 2800m^3 di acqua si devono aggiungere 15 litri di cloro. Quanto cloro occorre per 1000m^3 di acqua? [5,36 l]

313 La somma di due segmenti misura 34cm, sapendo che le loro lunghezze sono in proporzione con 3/2, calcola la loro lunghezza. [13,6; 40,4]

314 Gli angoli interni di un triangolo hanno misure proporzionali ai numeri 1; 3; 5. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, calcola le misure degli angoli. [20°, 60°, 100°]

315 Un televisore a 16/9 ha la base di 18". Quanti pollici misura l'altezza?

316 Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500 g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?

317 Un negoziante, durante il periodo di Natale, aumenta tutti i prezzi del 10%. Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era €70,00 qual è ora il suo prezzo? Dopo le feste, il negoziante abbassa i nuovi prezzi del 10%. Quanto costano ora le scarpe? [77€; 69,3 €]

318 Al cinema ``Matematico'' hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. E' stato un affare? Spiega perché. [No, perde l'1% dei ricavi]

319 Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; lo sconto è del 15% sulla penna più costosa e del 40% sulla penna meno costosa. Qual è lo sconto che riceve Anna?

320 Pierino oggi ha incrementato il suo capitale del 10%. Se anche domani l'incremento sarà del 10%, quale sarà l'incremento totale in %? [21%]

321 Tizio ha perso il 20% dei suoi soldi; quanto deve guadagnare, in percentuale, per recuperare?

322 Un paio di scarpe scontato del 20% costa 40 euro; quanto costava prima dello sconto? [50€]

323 Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due sconti, uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.

324 Una tariffa telefonica ha un costo di 10 cent al minuto per i primi 5 minuti di conversazione. Per i minuti successivi aumenta del 5%. Dopo 15 minuti di conversazione aumenta del 20% del costo iniziale. Quanto si spende se si effettua una telefonata di 20 minuti? [2,15 €]

4. INTRODUZIONE AI NUMERI REALI

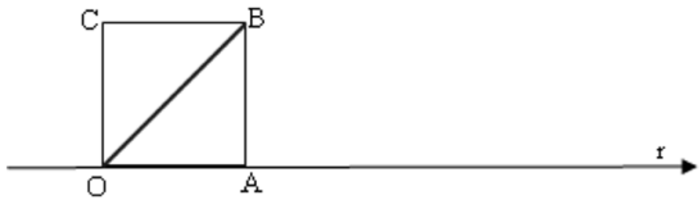
►1. La leggenda di Pitagora e la scoperta di un numero inquietante

La vita e l'opera di Pitagora hanno costituito oggetto di approfondite ricerche da parte degli storici di tutti i tempi. Nonostante le indagini più accurate, i fatti della vita di Pitagora realmente accertati sono veramente pochi. Si dice sia nato a Samo nel 572 a.C. (575 a.C. per altri autori) dove vi regnava il tiranno Policrate; non sopportando la tirannia, si trasferì in Egitto con un incarico di lavoro presso il faraone Amasi. Sembra che poi abbia viaggiato in Babilonia prima di approdare a Crotone dove fondò una Scuola che accolse numerosi discepoli. Pitagora propose un sistema matematico della natura: la spiegazione dei fenomeni naturali doveva avvenire attraverso la ricerca di relazioni tra numeri. Pensava che tutti i corpi fossero formati da punti materiali o monadi combinate in modo da formare le varie figure geometriche e il numero totale di tali unità rappresentava l'oggetto materiale. Da qui nasceva la dottrina secondo la quale tutte le cose che si conoscono hanno un numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare, né conoscere; la spiegazione dei fenomeni naturali può essere raggiunta solo attraverso l'aritmetica.
Per i pitagorici esistono due soli tipi di numeri: gli interi e le frazioni. Ogni numero aveva sia una rappresentazione simbolica che un significato simbolico: il numero 5 veniva assunto a rappresentare il matrimonio, essendo la somma del primo numero dispari, il 3, con il primo numero pari, il 2.
Fu dunque terribile la scoperta di un nuovo tipo di numero che non è né intero né frazionario, questo numero si ottiene calcolando per mezzo del teorema di Pitagora la misura della diagonale di un quadrato di lato uno. Questo nuovo numero, che oggi scriviamo $\sqrt{2}$, non poteva essere espresso in nessun modo come frazione, cioè rapporto di numeri interi. Ad esso i pitagorici diedero il nome di *arreton*, cioè indicibile, inesprimibile. La scoperta fu mantenuta segreta. La leggenda narra che Ippaso, discepolo della Scuola, morì affogato perché violò il giuramento che aveva fatto di non diffondere questa terribile verità.
Oggi questi numeri li chiamiamo **numeri irrazionali**, termine che riflette la stessa idea di inesprimibilità attribuita loro dai pitagorici.
Per approfondire l'argomento: G. Masini, Storia della matematica, ed. SEI; John D. Barrow, La luna nel pozzo cosmico, ed.CDE; Ludovico Geymonat, Storia del pensiero filosofico e scientifico, ed. Garzanti, vol.1; David Bergamini e redattori di Life, La matematica, ed. Mondadori; Morris Kline, Matematica la perdita della certezza, ed A. Mondadori – Collana STUDIO.

►2. I numeri irrazionali

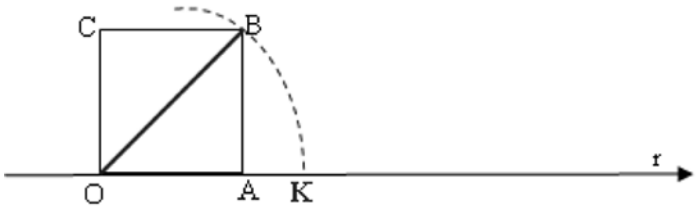
Applicando il teorema di Pitagora a un quadrato di lato unitario per calcolare la misura della diagonale i pitagorici individuarono un nuovo tipo di numero, oggi indicato con $\sqrt{2}$.
Fissiamo sulla retta orientata r l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale:

Dati :
OABC è un quadrato
$\overline{OA}=1$
Obiettivo:
Calcolare $\overline{OB}$



Soluzione: il triangolo OAB è retto in A, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$

Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$. Sappiamo che "estrarre la radice quadrata" di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2; questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta *r* che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro O e raggio OB e determinando su *r* il punto *K* estremo del segmento con OK = OB.



Dalla posizione del punto K possiamo dire che $1<\sqrt{2}<2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
x^2	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,89

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1,4^2$ e $1,5^2$, di conseguenza $1,4<\sqrt{2}<1,5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1.4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1.5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo $\sqrt{2}=1,4$ oppure $\sqrt{2}=1,5$ commettiamo un errore minore di 1/10.
Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1.4 e 1.5:

x	1,41	1,42	1,43	1,44
x^2	1,9881	2,0164	2,0049	2,0776

Ora possiamo dire che 1.41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1.42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di 1/100. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K. Ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.
Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

valore per difetto	numero	valore per eccesso	ordine dell'errore
1	$\sqrt{2}$	2	1
1,4	$\sqrt{2}$	1,5	10^{-1}
1,41	$\sqrt{2}$	1,42	10^{-2}
1,414	$\sqrt{2}$	1,415	10^{-3}
1,4142	$\sqrt{2}$	1,4143	10^{-4}
...	$\sqrt{2}$	...	...

Per arrivare a conclusione che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo.
Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e precisamente $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ con *a* e *b* primi tra loro; si avrebbe, elevando al quadrato, $2=\frac{a^2}{b^2}$.
Se si eleva un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di a^2 e di b^2 sono gli stessi di a e di b con gli esponenti raddoppiati. Quindi anche a^2 e b^2 sono primi tra di loro e a^2 non può essere il doppio di b^2, se lo fosse dovrebbe essere almeno ill quadruplo. Quindi $2\neq\frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2}\neq\frac{a}{b}$.
Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non

sono il quadrato di alcuna frazione.
Le radici quadrate dei numeri che non sono quadrati perfetti e che non sono il quadrato di alcuna frazione sono numeri decimali con infinite cifre decimali non periodiche; essi perciò possono essere scritti solo in maniera approssimata. Questi numeri sono detti **numeri irrazionali** e insieme ad altri, che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme **J** dei numeri irrazionali.

►3. Operazioni con le radici quadrate

DEFINIZIONE. Si chiama **radice quadrata** del numero razionale non negativo *a*, il numero non negativo *b* che elevato al quadrato è uguale ad *a*. In simboli $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$.

In particolare si ha:

$(\sqrt{a})^2=a$ per ogni a ≥ 0, $\sqrt{0}=0$ infatti $0^2=0$, $\sqrt{1}=1$ infatti $1^2=1$

Il simbolo $\sqrt{a}$ si chiama **radicale quadratico** e *a* si chiama **radicando**.

Osservazione 1

Il radicando di un radicale quadratico deve essere non negativo. Infatti dalla definizione di radice quadrata $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$ ogni numero elevato al quadrato dà un numero positivo.

Osservazione 2

Dato che $(\sqrt{a})^2=a$ possiamo scrivere

$\sqrt{a}$ come $a^{\frac{1}{2}}$ in quanto per le regole delle potenze anche $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}};\ \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}};\ \sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$

quindi un radicale quadratico si può scrivere come una potenza che ha per base il radicando e come esponente $\frac{1}{2}$. Naturalmente la base della potenza deve essere maggiore o uguale a 0.

Prodotto di radicali quadratici

Esempio

Problema: Determina l'area del triangolo rettangolo avente un cateto di 8m e l'ipotenusa di 12m.

Dati: c_1=8m; i=12m.
Obiettivo: Area del triangolo

Per calcolare l'area applico la formula $A=\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot c_2$,

occorre allora calcolare l'altro cateto per mezzo del Teorema di Pitagora:

$$c_2=\sqrt{i^2-c_1^2}=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{144-64}=\sqrt{80}\,m$$

Si è ottenuto un numero irrazionale. L'area è $A=\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot c_2=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{80}\,m^2$.

Come si fa ora a moltiplicare dei numeri razionali come $\frac{1}{2}$ e 8 per $\sqrt{80}$?

Si moltiplicano tra di loro i numeri razionali e si mette il risultato davanti alla radice omettendo il segno di moltiplicazione che resta sotto inteso.

$$A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{80}\,m^2=4\sqrt{80}\,m^2$$

Regola

Per moltiplicare un numero razionale per un radicale si riscrive il numero davanti alla radice, omettendo il segno della moltiplicazione, che resta sottinteso.

Esempio

Problema: Determina l'area del rettangolo avente base e altezza rispettivamente di $5\sqrt{7}\,cm$ *e* $2\sqrt{3}\,cm$.

Soluzione: $A=b\cdot h=5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}\,m^2$

Per ottenere il risultato moltiplichiamo tra di loro i numeri razionali fuori dalle radici e subito dopo riportiamo una radice avente per radicando il prodotto dei radicandi.

$A=b\cdot h=5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}\,m^2=10\sqrt{21}\,m^2$.

Regola

Il prodotto di due radicali quadratici è il radicale quadratico avente per radicando il prodotto dei radicandi.

Possiamo sempre eseguire la moltiplicazione tra radicali quadratici. Infatti se applichiamo le regole delle potenze abbiamo: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}=(ab)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}$

Trasporto di un fattore fuori dalla radice

Consideriamo il numero $\sqrt{12}$, se scomponiamo in fattori primi il 12 possiamo scrivere $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 2^2}$, applicando al contrario la regola precedente sul prodotto dei radicali quadratici possiamo scrivere $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 2^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2^2}=\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$.

Regola

Scomponendo in fattori il radicando di un radicale quadratico, se uno o più fattori compaiono con esponente pari, questi fattori possono essere trasportati fuori dalla radice dividendo per 2 il loro esponente.

In generale dato il radicale quadratico $\sqrt{a^n}$ con $n\geq 2$ abbiamo:

n pari $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}$

se n è dispari $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{a}$.

Esempio

$\sqrt{16}=\sqrt{2^4}=2^2$

$\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=2^2\cdot\sqrt{2}$

$\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}$ *s*compongo in fattori i radicandi: $\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}=\sqrt{3\cdot 2^2}\cdot\sqrt{3\cdot 7}=\sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot 7}=3\cdot 2\cdot\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

Potenza di un radicale quadratico

Esempio

Calcola il volume di un cubo il cui lato misura $\sqrt{5}\,cm$.

Il volume di un cubo di lato noto si ottiene elevando alla terza potenza la misura del lato, quindi $V=l^3=(\sqrt{5})^3\,cm^3$.

Per calcolare la potenza di un radicale possiamo applicare la definizione di potenza e cioè moltiplicare il radicale per se stesso tante volte quanto indica l'esponente:

$V=(\sqrt{5})^3\,cm^3=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\,cm^3=5\sqrt{5}\,cm^3$.

Regola

La potenza di un radicale quadratico è il radicale quadratico avente per radicando la potenza del radicando: in simboli $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$ **.**

Se trasformiamo il radicale quadratico in potenza con esponente $\frac{1}{2}$ per la regole delle potenze abbiamo:

$$(\sqrt{a})^n=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^n=a^{\frac{n}{2}}=\left(a^n\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^n}$$

Quoziente di radicali quadratici

Regola
Il quoziente di due radicali quadratici è il radicale quadratico avente per radicando il quoziente dei radicandi.

Esempio

Calcolare il quoziente di $\sqrt{15}:\sqrt{12}$.

Applichiamo la regola precedente, otteniamo:

$$\sqrt{15}:\sqrt{12}=\sqrt{\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{12}_{4}}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\ .$$

Possiamo sempre eseguire la divisione tra radicali quadratici se $\sqrt{b}\neq 0$. Infatti se applichiamo le regole delle potenze abbiamo: $\sqrt{a}:\sqrt{b}=a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}=(a:b)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Somma algebrica di radicali quadratici

Non esistono regole per sommare un numero razionale ad uno irrazionale. Per sommare, per esempio $7+\sqrt{50}$ possiamo sostituire la radice con un suo valore approssimato $\sqrt{50}\approx 7{,}07107$, sommando ora i due numeri razionali avremo un valore approssimato della somma cercata:
$7+\sqrt{50}\approx 7+7{,}07107=17{,}07107$. Oppure, se vogliamo conservare il valore esatto dobbiamo lasciare indicata la somma e scrivere $7+\sqrt{50}$.

Esempio

Calcola il perimetro del triangolo rettangolo avente i cateti che misurano rispettivamente 1m e 7m.

Dati: c_1 = 1m; c_2 = 7m.
Obiettivo: 2p
Per calcolare il perimetro devo conoscere le misure dei tre lati del triangolo.
Applico il teorema di Pitagora per ottenere la misura dell'ipotenusa:
$i=\sqrt{7^2+1^2}\,m=\sqrt{49+1}\,m=\sqrt{50}\,m$.
Per calcolare il perimetro sommo le misure dei lati
$2\text{p}=1\text{m}+7\text{m}+\sqrt{50}\,m=(8+\sqrt{50})m$
Oppure ne calcolo un valore approssimato
$2\text{p}=1\text{m}+7\text{m}+\sqrt{50}\,m\approx 1\text{m}+7\text{m}+7{,}07107\,m=15{,}07107\,m$

Non esistono regole per sommare due radicali quadratici con radicandi diversi. Il valore esatto si scrive lasciando indicate le somme delle radici con i loro simboli. Un valore approssimato si ottiene sostituendo i radicali con valori approssimati.
Non esistono regole delle potenze per sommare due potenze con basi diverse, per esempio 3^2+8^2 è diverso da $(3+8)^2$, infatti $3^2+8^2=9+64=73$ mentre $(3+8)^2=11^2=121$. In generale quindi $a^2+b^2\neq(a+b)^2$ e $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$.

Esempio

Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente i cateti che misurano rispettivamente $\sqrt{2}\,m$ *e* $\sqrt{3}\,m$.

Applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare la misura dell'ipotenusa:
$i=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}\,m=\sqrt{3+2}\,m=\sqrt{5}\,m$
Il valore esatto del perimetro è dato da: $2\text{p}=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})m$
Un valore approssimato è
$2\text{p}=\sqrt{2}\,m+\sqrt{3}\,m+\sqrt{5}\,m\approx 1{,}4142\,m+1{,}7320\,m+2{,}2361\,m=5{,}3823\,m$

Regola
Per sommare due radicali con lo stesso radicando si sommano i coefficienti delle radici e si moltiplica quanto ottenuto per il radicale stesso, lasciando indicata la moltiplicazione.

Esempio

Calcola il perimetro di un rettangolo che ha la base di $5\sqrt{3}\,m$ *e l'altezza di* $2\sqrt{3}\,m$.

Il perimetro si ottiene sommando le due misure e moltiplicando il risultato per 2:

$$2\text{p}=2\cdot(b+h)=2\cdot(5\sqrt{3}+2\sqrt{3})\,m=2\cdot(5+2)\sqrt{3}\,m=2\cdot 7\sqrt{3}\,m=14\sqrt{3}\,m\ .$$

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

In alcune situazioni è utile trasformare una frazione che ha un radicale al denominatore in una ad essa equivalente che ha per denominatore un numero intero.

Regola

Per razionalizzare il denominatore irrazionale di una frazione, si moltiplica numeratore e denominatore per il denominatore stesso.

Esempio

Razionalizzare i seguenti numeri: $\sqrt{\frac{3}{5}};\ \frac{34}{\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}$

$$\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{34}{\sqrt{2}}=\frac{34\cdot\sqrt{2}}{2}=17\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Espressioni con i radicali quadratici

Esempi

- $\sqrt{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3-\frac{1}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}\ =$

$$\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}\ =\ \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}\ =\ \sqrt{\frac{5\cdot 4}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}\ =\ \sqrt{\frac{5\cdot 2^2}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}\ =$$

$$2\sqrt{\frac{5}{3}}+3\sqrt{\frac{5}{3}}\ =\ 5\sqrt{\frac{5}{3}}\ .$$

- $\left(\sqrt{4+\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{36}{2}}\right):\left(-\frac{3}{8}\right)^2\ =$

$$\left(\sqrt{\frac{9}{2}}:\sqrt{\frac{36}{2}}\right):\frac{9}{64}\ =\ \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{36}}:\frac{9}{64}\ =\ \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\frac{64}{9}\ =\ \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{9}\ =\ \frac{32}{9}$$

Esempio

Sommare $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+8\sqrt{75}$.

Ricordiamo che possiamo sommare solo radicali con lo stesso radicando e possiamo portare fuori dalla radice i fattori che hanno esponente pari. Scomponiamo in fattori radicandi.

$$\sqrt{12}-2\sqrt{27}+8\sqrt{75}\ =\ \sqrt{2^2\cdot 3}-2\sqrt{3^3}+8\sqrt{5^2\cdot 3}\ =\ 2\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{3}+8\cdot 5\sqrt{3}\ =$$

$$2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+40\sqrt{3}\ =\ 36\sqrt{3}\ .$$

Possiamo concludere questa breve rassegna sui numeri irrazionali osservando che la retta geometrica sembra avere “più punti” di quanti siano i numeri razionali; gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali. L’insieme che si ottiene dall’unione dell’insieme Q con l’insieme J degli irrazionali è l’insieme R dei numeri reali. La retta geometrica orientata è l’immagine di tale insieme: ogni suo punto è immagine o di un numero razionale o di un numero irrazionale.

►4. Altri esercizi

325 Calcola il perimetro del rombo avente la diagonale maggiore che misura 12 cm e la diagonale minore che misura 8cm.
Applico il teorema di Pitagora, utilizzo come cateti la metà delle basi e trovo il lato del rombo:

$$l=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}=\ldots$$

Per calcolare il perimetro moltiplico per 4 la misura del lato: 2p = …

326 Razionalizza il seguente numero:

$$\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{3}{\sqrt{3^2\cdot 2}}=\frac{3}{\ldots\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{\ldots}}{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\ldots}}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

327 Sulla retta reale *r* è rappresentato il segmento unitario:

a) costruire il segmento $\sqrt{2}$.
b) determinare sulla retta *r* il punto che rappresenta il numero $a=\sqrt{2}$
c) calcolare il valore approssimato a meno di un millesimo di *a* utilizzando la tabella:

	Ordine dell'errore	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\sqrt{2}$	Valori per difetto				
	Valori per eccesso				

328 Tra quali numeri interi è compreso il numero $\beta=\left(3+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)$

Calcola i seguenti radicali

329 $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{3-\frac{8}{3}}:\sqrt{\frac{5}{27}}$

330 $\sqrt{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3+\frac{1}{3}}:\left(\sqrt{3-\frac{1}{3}}:\sqrt{2-\frac{1}{2}}\right)$

331 $\sqrt{\frac{3}{8}}:\left(\sqrt{\frac{12}{5}}:\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

332 $\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{3}+\sqrt{27}-\frac{3}{5}\sqrt{12}\right)-2\sqrt{15}$

333 $7\sqrt{8}+\frac{3}{5}\sqrt{50}-18\sqrt{2}$

334 Razionalizzare le seguenti frazioni

a) $\frac{4}{\sqrt{48}}$ $\qquad\frac{2}{\sqrt{8}}$ $\qquad\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}}$

b) $\frac{16}{\sqrt{12}}$ $\qquad\frac{5}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{36}{\sqrt{5}}$ $\qquad\frac{48}{\sqrt{3}}:\frac{3}{\sqrt{24}}$

335 Per ciascuna uguaglianza dire se è vera o falsa

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}=21$ [V] [F]
b) $\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{10}=10$ [V] [F]
c) $\sqrt{36+25}=6+5=11$ [V] [F]
d) $\sqrt{30}+\sqrt{30}=\sqrt{60}$ [V] [F]

336 Completa la tabella

a	b	$a \cdot b$	$a : b$	a^2	b^3	$a^2 \cdot b^3$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$					
$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{2-\frac{1}{3}}$					
$\sqrt{\frac{1}{2}+1}$	$\sqrt{\frac{5}{2}-2}$					

337 Trasportare fuori dal segno di radice i possibili fattori:

a) $\sqrt{17280} =$ ....
b) $\sqrt{\frac{1}{27}} =$ ....
c) $\sqrt{128} =$ ....
d) $\sqrt{320} =$ ....
e) $\sqrt{\frac{250}{32}} =$ ....
f) $\sqrt{0{,}125} =$ ....
g) $\sqrt{\frac{1}{16}+25} =$ ....
h) $\sqrt{8 \cdot 10^{-5}} =$ ………
i) $\sqrt{49-\frac{25}{81}} =$ ....

338 I due numeri $\alpha = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{35}} : \left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^3$ e $\beta = \sqrt{1-\frac{5}{8}} : \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{16}\right)}$ sono le misure, rispetto al cm, dei cateti di un triangolo rettangolo. Determinare perimetro e area del triangolo.

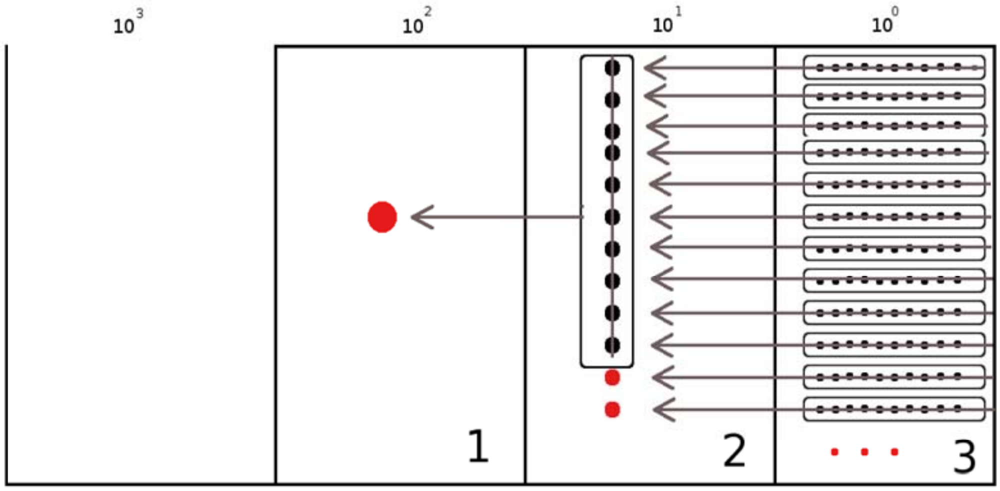
339 Il lato di un quadrato misura m $\sqrt{200}$; calcolate la misura della sua diagonale. Tale diagonale è il lato di un triangolo equilatero di cui si vuole determinare l’area.

340 La base di un rettangolo misura cm $\frac{20-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ e il perimetro è cm $3\sqrt{80}+6$. Determinare la misura dell’altezza.

5. I SISTEMI DI NUMERAZIONE

►1 La scrittura in base 10

Il nostro sistema di numerazione è il sistema decimale. Tutto ha probabilmente origine dal fatto che abbiamo 10 dita. Forse se fossimo nati ragni avremmo contato fino ad otto ed useremo un sistema di numerazione ottale, se fossimo nati gatti avremmo contato fino a 4 e useremo un sistema quattrale, millepiedi fino a mille. Come conta un computer? Un computer capisce solo due stati: passa corrente o non passa corrente: è come se avesse due dita.
Per ricordare e rappresentare un numero in antichità si usava uno strumento chiamato abaco. Gli abachi erano tavolette suddivise in colonne su cui si spalmavano cera o sabbia e si incidevano segni o si mettevano sassolini.
Per contare un certo numero di oggetti e ricordarci quanti sono, utilizziamo un abaco:



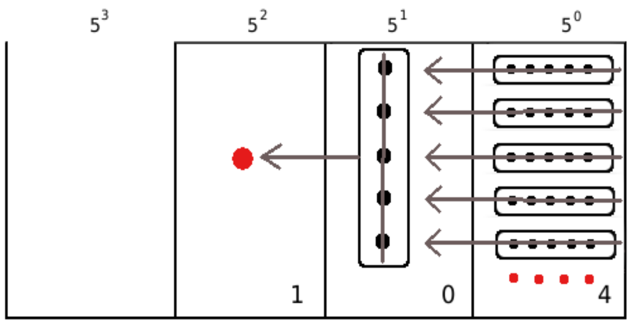
Cominciamo a contare con le mani: per ogni raggruppamento di 10 segniamo un'unità di ordine superiore, fino a contare tutti gli elementi del nostro insieme. Le unità che rimangono, perché non riescono a formare un raggruppamento di 10, vengono segnate con la cifra che le rappresenta: nel nostro caso 3.
Passiamo all'unità di ordine superiore: le decine. Anche con queste formiamo raggruppamenti di 10, se ci riusciamo. Ogni raggruppamento forma un'unità di ordine superiore. Se rimangono unità di questo ordine esse rappresentano decine. Se non rimane alcuna unità scriviamo 0. Nel nostro caso ne rimangono 2.
Il procedimento continua finché non abbiamo finito di contare tutti gli elementi. Nel nostro esempio finiamo dopo aver formato un'unità di ordine superiore. Il nostro numero è 123.
Naturalmente i due numeri 123 e 312 sono due numeri diversi anche se sono formati dalle stesse cifre: sono diversi perché la posizione delle cifre è diversa.
In generale, il valore dei numeri è diverso a seconda della posizione delle sue cifre. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un **sistema posizionale**: è chiamato decimale o a base dieci perché dieci unità di un determinato ordine formano un'unità di ordine superiore.
Riassumendo, abbiamo una serie di dieci simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il significato dei simboli dipende dalla posizione che assumono nella "parola" che rappresenta un numero.
Ad esempio: $1846=1\cdot(1000)+8\cdot(100)+4\cdot(10)+6\cdot(1)$
In particolare, scritto con le potenze del 10: $1846=1\cdot(10)^3+8\cdot(10)^2+4\cdot(10)^1+6\cdot(10)^0$
Se il numero è indicato come somma delle cifre per le potenze della base la scrittura si chiama **notazione polinomiale**.
Dieci è la **base** della rappresentazione, ovvero il numero di simboli usati, la potenza del 10 indica il **peso** (la posizione) che i simboli hanno nel numero.
Una volta compreso il meccanismo fondamentale su cui si basa il sistema di numerazione decimale, il procedimento si può estendere ad una base qualunque.
Se B è la base di un sistema, quando si formano B unità di un certo ordine, queste formano un'unità di ordine superiore. Con questo sistema si può costruire un sistema di numerazione con qualsiasi base maggiore di 1.

►2. Scrittura di un numero in una base qualsiasi

Il procedimento usato per scrivere un numero in base 10 può essere usato per scrivere un numero in una base qualsiasi.

Esempio

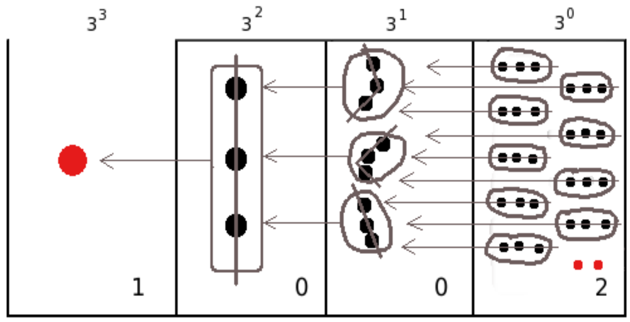
Contare 29 oggetti in base 5.



Come nel caso della numerazione in base 10, utilizziamo un abaco.
Invece di contare per dieci proviamo a contare per cinque. Invece di raggruppare per unità, decine, decine di decine e così via, conteremo raggruppando per unità, per cinquine, per cinquine di cinquine e così via.
Il numero che otteniamo si scrive $(104)_5$ e si legge *"uno-zero-quattro in base cinque"* per distinguerlo da centoquattro scritto in base 10.
Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 5 occorre sviluppare il numero in base 5 nella sua scrittura polinomiale: $(104)_3 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 25 + 0 + 4 = (29)_{10}$

Esempio

Contare 29 oggetti in base 3.



Questa volta dobbiamo contare per tre.
Il numero che otteniamo si scrive $(1002)_3$ e si legge *"uno-zero-zero-due in base tre"* per distinguerlo da milledue scritto in base 10.
Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 3 occorre sviluppare il numero in base 3 nella sua scrittura polinomiale.

$$(1002)_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 5^0 = 27 + 0 + 0 + 2 = (29)_{10}$$

Riflettiamo su quanto abbiamo fatto negli esempi precedenti: i simboli che occorrono per scrivere un numero in base 10 sono dieci: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 5 sono cinque: $\{0,1,2,3,4\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 3 sono tre: $\{0,1,2\}$.
Analogamente i simboli che serviranno per scrivere un numero in base 2 sono due $\{0,1\}$ Possiamo generalizzare e dire che i simboli necessari per scrivere un numero in una base B qualsiasi sono B e precisamente $\{0,1,\ldots,B-1\}$
Possiamo scrivere i numeri anche in una base superiore a 10. Una base molto usata nell'informatica, insieme alla base 2, è la base esadecimale: cioè la base 16.
In questo caso, per contare devo fare raggruppamenti di 16. Sono necessari perciò 16 simboli per indicare questi raggruppamenti, pertanto occorrono simboli anche per i numeri 10 , 11, 12, 13, 14, 15...
I simboli convenzionalmente usati sono i seguenti:

$$(A)_{16} = (10)_{10};\ (B)_{16} = (11)_{10};\ (C)_{16} = (12)_{10};\ (D)_{16} = (13)_{10};\ (E)_{16} = (14)_{10};\ (F)_{16} = (15)_{10}$$

I numeri seguenti sono

$$(10)_{16} = (16)_{10};\ (11)_{16} = (17)_{10};\ (12)_{16} = (18)_{10};\ (13)_{16} = (19)_{10};\ (14)_{16} = (20)_{10};\ (15)_{16} = (21)_{10}$$

Convertire un numero da una base diversa da 10 a base 10

Per scrivere un numero da una base diversa da 10 a base 10 bisogna sviluppare il numero nella sua forma polinomiale.
Se $(x)_B$ è un numero qualsiasi scritto nella base B e se $a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_0$ sono le cifre del numero da 0 a $B-1$ avremo:

$$(x)_{10} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0$$

341 Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) La scrittura 1234 può esprimere un numero in base 4 V/F
b) Il valore numerico espresso in base 10 della cifra 2 nel numero $(1523)_6$ è 72 V/F
c) Il valore numerico espresso in base 10 della cifra 3 nel numero $(321)_4$ è 12 V/F
d) Il valore numerico espresso in base 10 del numero $(321)_4$ è 57 V/F

342 Scrivi il numero $(3411)_5$ in forma polinomiale e trova il corrispondente numero decimale

$(3411)_5 = 3\cdot5^{\cdots} + \ldots\cdot5^2 + 1\cdot5^1 + \ldots\ldots = 375 + \ldots\ldots + 5 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

343 Trasforma i seguenti numeri scritti in base diversa da 10 in un numero decimale

$(11101)_2$; $(2001)_3$; $(3023)_4$; $(41)_5$; $(3005)_6$ [29, 55, 203, 21, 653]

344 Trasforma i seguenti numeri scritti in base 2 in un numero decimale

$(110111)_2$; $(1001)_2$; $(111)_2$; $(111111)_2$; $(101)_2$ [55; 9; 7; 63; 5]

345 Trasforma i seguenti numeri scritti in base 16 in un numero decimale

$(20F)_{16}$; $(AA)_{16}$;$(19)_{16}$; $(3E)_{16}$ [527; 170; 25; 62]

Convertire un numero da base 10 a una base diversa da 10

Successive divisioni per 3 di 29	**Quozienti** delle successive divisioni per 3	**Resti** delle successive divisioni per 3
29 : 3	9	**2**
9 : 3	3	**0**
3 : 3	1	**0**
1 : 3	0	**1**

Abbiamo visto che per contare e scrivere un numero in una base diversa da dieci, per esempio 29 in base 3, dobbiamo raggruppare per 3. Raggruppare per 3 ha lo stesso significato che dividere per 3. Nella prima divisione per tre dei 29 oggetti il quoziente indica quante terzine otteniamo, mentre il resto indica quante unità di ordine 0 verranno considerate. Nel nostro esempio si ottengono nove terzine, mentre rimangono 2 unità di ordine 0. Il 2 sarà il primo numero a destra che verrà considerato. Con nove terzine si ottengono tre terzine di terzine con resto 0. Questo 0 diventa la cifra che scriviamo a sinistra del 2. Con tre terzine di terzine otteniamo una terzina di terzina di terzina, mentre rimangono 0 terzine di terzine. Questo 0 diventa il numero che scriviamo a sinistra dello zero precedente. Ora il quoziente di 1 diviso 3 dà come quoziente 0 con resto 1. Qui ci fermiamo e scriviamo 1 a sinistra dello 0 trovato precedentemente.

Il numero si scrive da destra verso sinistra prendendo i resti dal basso verso l'alto, si ha $(29)_{10} = (1002)_3$.

Controlliamo con la notazione polinomiale: $1\cdot3^3 + 0\cdot3^2 + 0\cdot3^1 + 2\cdot3^0 = 27 + 2 = 29$.

Esempio

Convertire nel sistema binario (in base 2) il numero 59.

Dividiamo successivamente 59 per 2 fino a che non otteniamo zero come quoziente e prendiamo come risultato della conversione la successione dei resti partendo dall'ultimo.

Successive divisioni per 2 di 59	**Quozienti** delle successive divisioni per 2	**Resti** delle successive divisioni per 2
59 : 2	29	**1**
29 : 2	14	**1**
14 : 2	7	**0**
7 : 2	3	**1**
3 :2	1	**1**
1 : 2	0	**1**

59 scritto in base 2 sarà $(111011)_2$

Verifichiamo con la scrittura polinomiale

$1\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$

Un altro metodo per trasformare un numero decimale in un numero binario

Per trasformare i numeri da base 10 a base 2 basta scrivere il numero come somma delle potenze del 2:

1. si parte dalla potenza del 2 più vicina, per difetto, al numero da convertire;
2. si vede se la potenza precedente di ordine inferiore può fare parte della sequenza, cioè se la somma tra le potenze non diventa più grande del numero. Se può farne parte allora si scrive 1, altrimenti 0;
3. si prosegue in questo modo fino ad arrivare a 2^0, cioè 1;
4. la sequenza di 1 e 0, da sinistra verso destra, ottenuti è il numero binario corrispondente.

Esempio

Consideriamo ancora il numero 59.

- Qual è la potenza del 2 più vicina, per difetto al 59? Il numero 32, cioè 2^5. Quindi 2^5 fa parte del numero binario. Scrivo 1 come primo numero della sequenza
- Vediamo ora $2^4=16$. Anche 16 può far parte del numero binario perché 32 + 16 = 48 che è minore di 59. Segno 1 come secondo numero della sequenza
- Per lo stesso ragionamento anche $2^3=8$ fa parte del numero binario. Infatti 32 + 16 + 8 = 56, minore di 59. Segno ancora 1 come terzo numero della sequenza.
- Invece $2^2=4$ non può farne parte perché 32 + 16 + 8 + 4 = 60, maggiore di 59. Segno 0 come quarto numero della sequenza.
- $2^1=2$ e $2^0=1$ vanno bene e si arriva al totale voluto 59. Segno 1 come quinto e 1 come sesto numero della sequenza.

Riassumendo: $59 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = (111011)_2$

346 Scrivere in base 2 i seguenti numeri in base dieci: 2 4 15 12 27 33

Risultati $[...; (100)_2; ......; (1100)_2; ....; (100001)_2]$

347 Scrivere in base 3 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_3; (...)_3; (120)_3; (......)_3; (1000)_3; (.........)_3]$

348 Scrivere in base 4 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_4; (10)_4; (33)_4; (......)_4; (......)_4; (201)_4]$

349 Scrivere in base 5 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_5; (...)_5; (......)_5; (22)_5; (.........)_5; (113)_5]$

350 Scrivere in base 6 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_6; (4)_6; (...)_6; (20)_6; (....)_6; (....)_6]$

351 Scrivere in base 7 i seguenti numeri decimali: 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_7; (...)_7; (....)_7; (....)_7; (....)_7; (45)_7]$

352 Scrivere in base 8 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_8; (...)_2; (17)_8; (....)_8; (33)_8; (.......)_8]$

353 Scrivere in base 9 i seguenti numeri : 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(...)_9; (...)_9; (16)_9; (.....)_9; (......)_9; (36)_9]$

354 Scrivere in base 16 i seguenti numeri: 2 4 15 12 27 33

Risultati $[(2)_{16}; (...)_{16}; (F)_{16}; (...)_{16}; (1B)_{16}; (......)_{16}]$

Conversione di un numero da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

Esempio

Scrivere il numero $(1023)_4$ in base 7.

Per scrivere un numero da una base B a una base K tutte e due diverse da 10 occorre

1. trasformare il numero in base B in un numero decimale attraverso la sua scrittura polinomiale;
2. trasformare il numero decimale nella base K attraverso i resti delle divisione successive per K .

Applichiamo la procedura indicata:

1. $(1023)_4 = 1\cdot 4^3 + 0\cdot 4^2 + 2\cdot 4^1 + 3\cdot 4^0 = 64 + 0 + 8 + 3 = (75)_{10}$

2. Il numero scritto da destra verso sinistra con i resti delle successive divisioni per 7 presi dal basso verso l'alto è $(135)_7$.

Successive divisioni per 7 di 75	**Quozienti** delle successive divisioni per 7	**Resti** delle successive divisioni per 7
75 : 7	10	**5**
10 : 7	1	**3**
1 : 7	0	**1**

Le trasformazioni eseguite sono:
$(1023)_4 \rightarrow (75)_{10} \rightarrow (135)_7$

355 Trasformare in base 7 i seguenti numeri in base 4
$(103)_4$; $(120)_4$; $(203)_4$; $(1301)_4$; $(123)_4$; $(301)_4$ R: $[(25)_7; (....)_7; (50)_7; (......)_7; (36)_7; (......)_7]$

356 Trasformare in base 9 i seguenti numeri scritti in base 3
$(10002)_3$; $(2020)_3$; $(11201)_3$; $(120122)_3$; $(1001)_3$ R: $[(102)_9; (...)_9; (......)_9; (518)_9; (......)_9]$

357 Trasformare in base 16 i seguenti numeri scritti in base 4
$(133)_4$; $(120)_4$; $(203)_4$; $(2301)_4$; $(223)_4$ R: $[(1F)_{16}; (....)_{16}; (23)_{16}; (....)_{16}; (1A)_{16}]$

Conversione tra base 4, base 8, base 16 e base 2

Consideriamo il numero scritto in base 2 $(11010011100101)_2$ vogliamo scriverlo in base 4, in base 8, in base 16 senza passare dalla sua scrittura in base 10. Infatti gruppi di due cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 4, gruppi di 3 cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 8, e gruppi di 4 cifre nella base 2 rappresentano tutte le cifre della base 16, come indicato nella seguente tabella.

Base 10	Base 2	Base 4	Base 8	Base 16
0	0	0 0 = 0	0 0 0 = 0	0 0 0 0 = 0
1	1	0 1 = 1	0 0 1 = 1	0 0 0 1 = 1
2		1 0 = 2	0 1 0 = 2	0 0 1 0 = 2
3		1 1 = 3	0 1 1 = 3	0 0 1 1 = 3
4			1 0 0 = 4	0 1 0 0 = 4
5			1 0 1 = 5	0 1 0 1 = 5
6			1 1 0 = 6	0 1 1 0 = 6
7			1 1 1 = 7	0 1 1 1 = 7
8				1 0 0 0 = 8
9				1 0 0 1 = 9
10				1 0 1 0 = A
11				1 0 1 1 = B
12				1 1 0 0 = C
13				1 1 0 1 = D
14				1 1 1 0 = E
15				1 1 1 1 = F

Da base 2 a base 4. Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di due cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 4.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1	0 0	1 1	1 0	0 1	0 1
Numero scritto in base 4	3	1	0	3	2	1	1

$(11010011100101)_2 = (3103211)_4$

Convertire il numero da base 2 a base 8. Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di tre cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 8.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1
Numero scritto in base 8	3	2	3	4	5

$(11010011100101)_2 = (32345)_8$

Convertire il numero da base 2 a base 16. Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 partendo da sinistra in gruppi di quattro cifre e tradurre con la corrispondente cifra in base 16.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0 0	1 1 1 0	0 1 0 1
Numero scritto in base 16	3	4	E	5

$(11010011100101)_2 = (34E5)_{16}$

358 Convertire in base 4, 8 e 16 i seguenti numeri scritti in base 2
$(101)_2$; $(100011)_2$; $(1111110101)_2$; $(10100100)_2$; $(1101)_2$

359 Convertire in base 2 i seguenti numeri scritti in base 16
$(12)_{16}$; $(A)_{16}$; $(1C3)_{16}$; $(AB)_{16}$; $(223)_{16}$

Perché è importante la base 2?

Tutti gli strumenti elettronici che utilizziamo hanno bisogno di tradurre le informazioni che inseriamo in stati fisici della macchina. Il metodo più semplice per tradurre in linguaggio macchina le nostre informazioni è utilizzare la base 2: composta solo dai simboli 0 e 1 che possono essere agevolmente tradotti in “passa corrente” o “non passa corrente”.
La base 2 è l'alfabeto a disposizione delle macchine per comprendere e rispondere alle nostre richieste. Se si utilizzasse la base 10 dovremo far riconoscere dall'apparato dieci differenti simboli che devono essere tradotti in dieci differenti stati.
A partire da questa informazione elementare detta **bit** (compressione dall'inglese di **bi**nary digi**t**) è possibile costruire informazioni più complesse sotto forma di sequenze finite di 0 e di 1. Attraverso la codifica binaria si è in grado di rappresentare caratteri numeri e istruzioni.
Il primo multiplo del bit è il **Byte** che è formato da una sequenza di 8 bit.

0	1	0	1	0	0	0	0

Gli elaboratori possono trattare contemporaneamente più byte per volta in genere 2 byte, 4 byte e 8 byte in relazione all'architettura dell'elaboratore.
Con una sequenza di 8 bit possiamo codificare fino a 256 caratteri. Quando digitiamo un carattere nella tastiera del PC mandiamo un impulso che è una sequenza di 8 bit.

Carattere	In base 2	Numero decimale
A	0 1 0 0 0 0 0 1	65
a	0 1 1 0 0 0 0 1	97
M	0 1 0 0 1 1 0 1	77
m	0 1 1 0 1 1 0 1	109
0	0 0 1 1 0 0 0 0	48
1	0 0 1 1 0 0 0 1	49
à	1 0 1 0 0 0 0 0	160
ò	1 0 1 0 0 0 1 0	162

Anche il byte ha i suoi multipli. Eccone alcuni indicati nella seguente tabella:

		Sistema internazionale		Utilizzo in informatica	
Nome	Marca	Potenze del 10	Valore decimale rispetto ai byte	Potenze del 2	Valore decimale rispetto ai byte
byte	B	10^0	1	2^0	1
kilobyte	kB	10^3	1000	2^{10}	1.024
megabyte	MB	10^6	1.000.000	2^{20}	1.048.576
gigabyte	GB	10^9	1.000.000.000	2^{30}	1.073.741.824
terabyte	TB	10^{12}	1.000.000.000.000	2^{40}	1.099.511.627.776

Osservazione
E' noto che i prefissi kilo- Mega- e Giga- corrispondono a 1.000 , 1.000.000 (un milione) e 1.000.000.000 (un miliardo), mentre nell'informatica vengono impropriamente usati per indicare particolari potenze di 2. Tutto questo genera confusione: per esempio un disco fisso che da specifiche dovrebbe garantire una capacità di archiviazione pari a 160 gigabyte, quando ne viene visualizzata la dimensione arriva poco oltre 149 gigabyte e i produttori giocano su questa "incertezza". I produttori fanno i conti "imbrogliando". Un PC che viene dichiarato con un hard disk da 160 GB vengono trasformati in byte moltiplicando per 10^9 . Ma quando verifichiamo la grandezza del disco sull'elaboratore, il computer divide per 2^{30} .
$(1{,}6\cdot 10^{11}):(1{,}074\,10^9)=1{,}49\cdot 10^2$. Solo per questo "imbroglio" ci siamo persi 11 GB.

360 Perché un DVD scrivibile quando si compra dichiara una capacità di 4,7 GB e invece ha una capacità reale di 4.3? Un CD-R dichiara una capacità di 700 MB. Quale è la sua capacità reale? [667,57 MB]

►3 Operazioni in base diversa da dieci

Le quattro operazioni con i numeri in base diversa da dieci possono effettuarsi con gli stessi algoritmi utilizzati per i numeri naturali.

Addizione

Esempio
Eseguire l'addizione in base 2 tra 101011_2 *e* 10011_2

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola di addizione in base due che riportiamo a lato. La tavola, o tabellina, è piuttosto semplice, bisogna solo fare attenzione che in base due si ha 1+1=10, perché il 2 si scrive appunto 10 in base due.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Mettiamo i numeri in colonna (vedi a fianco) e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=0$, scrivo 0 e riporto 1 .
Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+1)+1=0+1=1$
Scrivo 1 e riporto 1 .
Nella colonna di ordine superiore trovo $1+0+0=1$ scrivo 1 senza riportare alcunché.
Continuo in questo modo fino ad esaurire tutte le cifre da addizionare.

Riporti					1	1	
	1	0	1	0	1	1	+
		1	0	0	1	1	
	1	1	1	1	1	0	

Facciamo la verifica nell'usuale sistema decimale: $(101011_2=43)+(10011_2=19)=(111110_2=62)$

Esempio
Eseguire la somma tra la somma in base 5 tra 34231_5 *e* 4341_5

Costruiamo la tavola di addizione in base cinque: ricordiamo che 4+1=10, 4+2=11, ecc.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=2$ scrivo 2 senza riporto.
Nella colonna di ordine superiore trovo $3+4=12$. Scrivo 2 e riporto 1 .
Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+2)+3=3+3=11$ scrivo 1 e riporto 1 .
Procedendo verso sinistra ora trovo $(1+4)+4=10+4=14$ scrivo 4 e riporto 1 .
Infine $1+3=4$. L'addizione è terminata.

Riporti	***1***	***1***	***1***			
	3	4	2	3	1	+
		4	3	4	1	
	4	4	1	2	2	

Verifica nel sistema decimale: $(34231_5=2441)+(4341_5=596)=(44122_5=3037)$

361 Eseguire le seguenti addizioni in base 2

1 1 1 1 0 1 +	1 0 1 1 0 1	1 0 1 1 +
1 0 1 1 0	1 1 1 1 1	1 1 1

362 Eseguire le seguenti addizioni in base 5

3 4 2 4 0 1 +	2 0 2 4 0 1 +	2 3 4 1 +
2 3 1 4 2	4 3 4	4 4 4

363 Eseguire le seguenti addizioni in base 3

2 1 0 2 0 1 +	2 0 2 1 0 1 +	2 2 1 1 +
2 1 2 1 2	1 2 1 1 0	2 0 2

Sottrazione

Per la sottrazione ci possiamo servire delle stesse tabelle dell'addizione.

Esempio

- $101011_2-11111_2$

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo a sottrarre partendo dalle unità: $1-1=0$ scrivo 0 .
Nella colonna di ordine superiore trovo di nuovo $1-1=0$ scrivo 0 .
Procedendo verso sinistra trovo $0-1$ devo quindi prendere in prestito un unità di ordine superiore che messa davanti a 0 diviene $10-1=1$ scrivo 1 e riporto - 1 .
Mi sposto ancora a sinistra e trovo $(-1+1)-1=0-1$.

Riporti	***-1***	***-1***	***-1***				
	1	0	1	0	1	1	–
		1	1	1	1	1	
	0	0	1	1	0	0	

Occorre prendere in prestito un'unità di ordine superiore $10-1=1$. Scrivo 1 e riporto -1 .
Nella colonna a sinistra ho 0 del minuendo, -1 del riporto e -1 del sottraendo. Occorre prendere a prestito un'unità di ordine superiore quindi $10-1=1$ a cui devo togliere 1 del sottraendo: $1-1=0$.
Infine nella unità di ordine superiore devo addizionare il riporto -1 a 1 e scrivo ancora 0 .Il risultato della sottrazione è: 1100

Verifica nel sustema decimale: $(101011_2=43)-(11111_2=31)=(1100_2=12)$

Esempio

- $34231_5 - 4341_5$

Ci serviamo della tavola di addizione in base cinque.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Riporti	*-1*	*-1*	*-1*			
	3	4	2	3	1	-
		4	3	4	1	
	2	4	3	4	0	

Verifica:. $(34231_5 = 2441) - (4341_5 = 596) = (24340_5 = 1845)$

364 Eseguire le seguenti sottrazioni in base 2

$$\begin{array}{r} 111101 - \\ 10110 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101101 - \\ 11111 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 - \\ 111 \\ \hline \end{array}$$

365 Eseguire le seguenti sottrazioni in base 5

$$\begin{array}{r} 342401 - \\ 23142 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 202401 - \\ 434 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2341 - \\ 444 \\ \hline \end{array}$$

366 Eseguire le seguenti sottrazioni in base 3

$$\begin{array}{r} 210201 - \\ 21212 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 202101 - \\ 12110 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2211 - \\ 202 \\ \hline \end{array}$$

Moltiplicazione

Adoperiamo lo stesso algoritmo usato per moltiplicare due numeri decimali utilizzando la tabella della moltiplicazione.

Esempio

- $101011_2 \times 101_2$

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola della moltiplicazione in base due.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & \\ \hline
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & & \\ \hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Verifica nel sistema decimale: $(101011_2 = 43) \times (101_2 = 5) = (11010111_2 = 215)$

Esempio

$231_5 \times 24_5$

Ci serviamo ancora della tavola di addizione in base cinque.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & 3 & 1 & & \times \\ & & & 2 & 4 & & \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 4 & & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & - & & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & & \end{array}$$

Verifica nel sistema decimale: $(231_5 = 66) \times (24_5 = 14) = (12144_5 = 924)$

367 Eseguire le seguenti moltiplicazioni in base 2

a) $111101_2 \times 10110_2$ b) $101101_2 \times 11111_2$ c) $1011_2 \times 111_2$

368 Eseguire le seguenti moltiplicazioni in base 5

a) $2401_5 \times 42_5$ b) $431_5 \times 34_5$ c) $431_5 \times 34_5$

369 Eseguire le seguenti moltiplicazioni in base 3

a) $10201_3 \times 212_3$ b) $2101_3 \times 212_3$ $1211_3 \times 22_3$

Divisione

Anche per la divisione il procedimento è del tutto analogo a quello usato nel sistema decimale, la tavola da utilizzare è quella della moltiplicazione.

Esempio

- $11101_2 : 101_2$

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

La cifra di ordine più alto si ottiene dalla divisione di 111 con 101. Il quoziente è 1, il resto si ottiene dalla differenza tra il dividendo e il prodotto del quoziente per il divisore. In questo caso il resto è 10. Si abbassa lo 0 e otteniamo 100. Si ha $100 : 111 = 0$. La seconda cifra del divisore è 0. La moltiplicazione di 0 per il divisore dà 0. Il nuovo resto è 100 a cui aggiungiamo l'ultima cifra del dividendo. Otteniamo 1001 che viene divisa 101. Il quoziente termina con 1 con il resto uguale a 100.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{6-8} -1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \cline{2-4} & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & & \\ \cline{2-5} & & 1 & 0 & 0 & & & \end{array}$$

Verifica nel sistema decimale:
$(11101_2 = 29) : (101_2 = 5) = (\textit{Quoziente} : 101_2 = 5 ;\ \textit{Resto} : 110 = 4)$

Eseguiamo la prova della divisione direttamente in base 2:
$dividendo = quoziente \times divisore + resto$

Il quoziente moltiplicato il divisore è uguale a 11001 .
Se a questo risultato aggiungiamo il resto 100 otteniamo il dividendo 11101 .

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 0 & 1 & \times \\ & & 1 & 0 & 1 & \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & — & \\ 1 & 0 & 1 & — & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & + \\ & & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

<u>Esempio</u>

- $3402_5 : 42_5$

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

Il 42 nel 34 non ci sta. Prendiamo allora tre cifre 340 . Il 4 nel 34 ci sta 4 volte. 4 è la cifra di ordine più alto del quoziente. Dobbiamo trovare il resto. Il resto si ottiene sottraendo il risultato della moltiplicazione tra 4 e 42 che è 323 . Il resto è uguale 12 .
Si abbassa il 2 e otteniamo 122 . Il 4 nel 12 in base 5 ci sta una sola volta, infatti $4 \times 2 = 13$. La seconda cifra del divisore è 1 .
La moltiplicazione di 1 per il divisore dà 42 . Sottraendo 42 da 122 si ottiene 30 . Dato che 30 è minore di 42 la divisione intera è terminata.

$$\begin{array}{cccc|cc} 3 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ \cline{5-6} 3 & 2 & 3 & & 4 & 1 \\ \cline{1-3} & 1 & 2 & 2 & & \\ & & 4 & 2 & & \\ \cline{1-4} & & 3 & 0 & & \end{array}$$

Verifica: $(3402_5 = 477)\ :\ (42_5 = 22) = (Quoziente : 41_5 = 21\ ;\ Resto : 30 = 15)$

370 Completare le seguenti divisioni in base 2

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{6-8} -1 & 0 & 1 & & & 1 & ... & 1 \\ \cline{1-3} & & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \cline{2-4} & & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & .. & .. & .. & & & \\ \cline{2-5} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{6-8} & -1 & 1 & 1 & & 1 & ... & ... \\ \cline{1-4} \dots & ... & ... & ... & & & & \\ & ... & ... & ... & & & & \\ \cline{2-4} & ... & ... & ... & 1 & & & \\ & & ... & ... & ... & & & \\ \cline{2-5} & & ... & ... & ... & & & \end{array}$$

371 Eseguire le seguenti divisioni in base 2

$11101 : 11$ $\quad [Q = 11\ ;\ R = 1]$

$1011101 : 100$ $\quad [Q = 1011\ ;\ R = 1]$

$100011 : 10$ $\quad [Q = 10001\ ;\ R = 0]$

372 Eseguire le seguenti divisioni in base 5

$2304 : 43$ $\quad [Q = 24\ ;\ R = 12]$

$3310 : 24$ $\quad [Q = 112\ ;\ R = 12]$

$2012 : 31$ $\quad [Q = 31\ ;\ R = 1]$

MATEMATICA C^3

ALGEBRA 1

2. INSIEMI

Stonehenge
photo by: radical.librarian
taken from: http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324
license: creative commons attribution 2.0

1. GENERALITÀ SUGLI INSIEMI

►1. Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola **insieme** per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure… che sono detti **elementi** dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.
La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempi

Sono insiemi:
1. l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
2. l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
3. l'insieme delle città della Puglia con più di 15000 abitanti;
4. l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
5. l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
6. l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:
- bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
- gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:
1. i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
2. le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
3. le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
4. l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

1 Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi:

[A]	I fiumi più lunghi d'Italia;	[F]	gli animali con 2 zampe;
[B]	Le persone con più di 30 anni;	[G]	le vocali dell'alfabeto italiano;
[C]	i numeri 1, 20, 39, 43, 52;	[H]	i professori bravi;
[D]	i libri più pesanti nella tua cartella;	[I]	i gatti con due code;
[E]	i punti di una retta;	[J]	i calciatori che hanno fatto pochi gol.

In generale:
- gli insiemi si indicano con lettere maiuscole *A, B, C*, …;
- gli elementi con lettere minuscole *a, b, c*, …;
- se un elemento *a* sta nell'insieme *A* si scrive $a \in A$, si legge "a appartiene ad A";

Il simbolo $\in$ si chiama simbolo di **appartenenza**.
- se un elemento b non sta nell'insieme A si dice che esso non appartiene all'insieme, si scrive $b \notin A$, si legge "b non appartiene ad A".

Il simbolo $\notin$ si chiama simbolo di **non appartenenza**.
Il criterio in base al quale si stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama **proprietà caratteristica**.
Gli elementi di un insieme si elencano separati dalla virgola e racchiusi tra parentesi graffe.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Alcuni simboli sono utilizzati per indicare alcuni insiemi specifici:
- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12{,}34, 0{,}\overline{25}...\right\}$

Esempio

Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Svolgimento:

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$lunedì \in A$ $\quad$ $martedì \in A$ $\quad$ $gennaio \notin A$

$giovedì \in A$ $\quad$ $dicembre \notin A$ $\quad$ $esate \notin A$

Consideriamo l'insieme $A=\{r, s, t\}$ e l'insieme B delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che A e B sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo pertanto che sono **insiemi uguali**.

DEFINIZIONE. Due insiemi A e B si dicono **uguali** se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso: in simboli $A=B$. Due insiemi A e B si dicono **diversi** se non contengono gli stessi elementi: in simboli $A \neq B$.

Esempi

- Gli insiemi A dei numeri naturali dispari minori di 5 e $B=\{1,3\}$ sono uguali.
- Gli insiemi L delle vocali della parola LUIGI, e l'insieme G delle vocali della parola GIGI sono diversi, poiché $u \in L$ ma $u \notin G$.

2 Per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra $\in , \notin$.

Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano:

a) b … A $\quad$ c) j … A $\quad$ e) w … A

b) i … A $\quad$ d) e … A $\quad$ f) z … A

3 Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

[A] sito [B] micio [C] zitto [D] fiocco [E] lecito [F] dito

4 Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali

[A] vocali della parola SASSO $\quad$ [C] consonanti della parola SASSO

[B] vocali della parola PIETRA $\quad$ [D] vocali della parola PASSO

► 2. Insieme vuoto e insieme universo

Consideriamo l'insieme A = {consonanti diverse da B della parola "BABBO"}.

Poiché la parola "BABBO" contiene solo la consonante B l'insieme A è privo di elementi.

Un insieme privo di elementi si chiama **insieme vuoto**, lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o { }.

Osservazione

$\{\}=\emptyset$ ma $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ dato che $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto.

Esempi

- L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto.
- L'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto.
- L'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

5 Indica se gli insiemi G ={gatti con 6 zampe} e P = {polli con 2 zampe} sono o non sono vuoti.

6 Barra con una croce gli insiemi vuoti

[A] L'insieme dei numeri positivi minori di 0.

[B] L'insieme dei numeri negativi minori di 100.

[C] L'insieme dei numeri pari minori di 100.

[D] L'insieme delle capitali europee della regione Lombardia.

[E] L'insieme dei triangoli con quattro angoli.

[F] L'insieme delle capitali italiane del Lazio.

[G] L'insieme dei punti di intersezione di due rette parallele.

La frase "l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino" non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1C gli elementi saranno certamente diversi, probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama **Insieme Universo** e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale un insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente si indica con U l'insieme universo.

7 Se A è l'insieme dei calciatori del Milan, indica almeno tre insiemi che possono essere l'insieme universo in cui è collocato A.

► 3. Cardinalità di un insieme

Si definisce cardinalità (o potenza) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Viene indicata con uno dei seguenti simboli |A|, #(A) o *card*(A).
Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempi

- L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi *card*(A)=5.
- L'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi *card*(B)=3.

8 Un insieme vuoto è:
[A] un insieme costituito da pochi elementi;
[B] un insieme privo di elementi;
[C] un insieme costituito da un numero di elementi insufficiente per formare un insieme.

9 Quali delle seguenti scritture sono corrette per indicare l'insieme vuoto?
[A] $\emptyset$ [B] 0 [C] $\{\emptyset\}$ [D] $\{0\}$ [E] {}

10 Quale scrittura si usa per indicare che un elemento *c* appartiene ad un insieme *C*?
[A] $c \subset C$ [B] $c \in C$ [C] $c \not\subset C$ [D] c / C [E] $c \ni C$

11 Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

a) Le città che distano meno di 100 Km da Lecce.	V	F
b) I laghi d'Italia.	V	F
c) Le città vicine a Roma.	V	F
d) I calciatori della Juventus.	V	F
e) I libri di Mauro.	V	F
f) I professori bassi della tua scuola.	V	F
g) I tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M.	V	F
h) I tuoi compagni di classe che sono gentili.	V	F
i) Gli zaini neri della tua classe.	V	F

12 Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra $\in$ e $\notin$:
a)La Polo …... all'insieme delle automobili Fiat.
b)Il cane …... all'insieme degli animali domestici.
c)La Puglia …... all'insieme delle regioni italiane.
d)Firenze …... all'insieme delle città francesi.
e)Il numero 10 …... all'insieme dei numeri naturali.
f)Il numero 3 …... all'insieme dei numeri pari.

13 Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

a)Essere città italiana il cui nome inizia per W	V	F
b)Essere un bravo cantante	V	F
c)Essere un monte delle Alpi	V	F
d)Essere un ragazzo felice	V	F
e)Essere un numero naturale grande	V	F
f)Essere un ragazzo nato nel 1985	V	F
g)Essere gli alunni della classe 1ª C	V	F
h)Essere le lettere dell'alfabeto inglese	V	F

i)Essere le rette del piano	V	F
j)Essere i libri interessanti della biblioteca	V	F
k)Essere gli italiani viventi nati nel 1850	V	F
l)Essere gli italiani colti	V	F
m)Essere i numeri naturali molto grandi	V	F
n)Essere gli attori vincitori del Premio Oscar del 1990	V	F

14 Quali dei seguenti insiemi sono vuoti? Per gli insiemi non vuoti indica la cardinalità. *Ricorda che la cardinalità di un insieme è il numero di elementi di cui è costituito.*

a)L'insieme degli uccelli con 6 ali
b)L'insieme delle lettere della parola "VOLPE"
c)L'insieme dei cani con 5 zampe
d)L'insieme delle vocali della parola "COCCODRILLO"
e)L'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano
f)L'insieme degli abitanti della luna
g)L'insieme dei numeri sulla tastiera del telefonino

15 Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra = e ≠

a)L'insieme delle lettere della parola "CANE" e della parola "PANE" sono …...
b)L'insieme delle vocali della parola "INSIEME" e della parola "MIELE" sono …...
c)L'insieme delle consonanti della parola "LETTO" e della parola "TETTO" sono …...
d)L'insieme delle lettere della parola "CONTRO" e della parola "TRONCO" sono …...
e)L'insieme delle vocali della parola "LIBRO" e della parola "MINISTRO" sono …...
f)L'insieme delle vocali della parola "DIARIO" e della parola "RAMO" sono …...
g)L'insieme delle lettere della parola "MOUSE" e della parola "MUSEO" sono …...
h)L'insieme delle consonanti della parola "SEDIA" e della parola "ADESSO" sono …...
i)L'insieme dei numeri pari minori di 5 e l'insieme vuoto sono …...
j)L'insieme dei numeri pari e l'insieme dei multipli di 2 sono …...

16 Scrivi per ciascun insieme un possibile insieme universo

a) L'insieme dei rettangoli
b) L'insieme dei multipli di 3
c) L'insieme delle lettere della parola "MATEMATICA"
d) L'insieme dei libri di matematica
e) L'insieme dei ragazzi che hanno avuto una insufficienza in matematica

17 Dato l'insieme A = {0, 3, 5} determina se le seguenti affermazioni sono vere o false

a) $0 \in A$
b) $\{5\} \in A$
c) $\emptyset \in A$
d) $\{\emptyset\} \in A$
e) $A \in A$
f) $\{3,5\} \in A$

18 Le stelle dell'universo formano un insieme, le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.

2. RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

►1. Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.
Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura:

$$X=\{1, 2, 3, 5\}$$

Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè

$$X=\{1, 2, 3, 5\}=\{2, 1, 5, 3\}$$

É invece necessario che gli elementi dell'insieme compaiano ciascuno una sola volta. Ad esempio per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola autunno, scriviamo Y = { a,u,t,n,o}, scrivendo una volta sola le lettere che nella parola sono ripetute.
Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.
Per esempio l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare

$$X=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$$

<u>Esempi</u>

- L'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: G={lunedì, martedì,mercoledì}
- L'insieme A delle lettere della parola "Associazione" si indica: A={a, s, o, c, i, z, n, e}

19 Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme A dei numeri naturali minori di 6.
Svolgimento: I numeri naturali minori di 6 sono ……………… pertanto A={... … … … … … ...}

20 Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi
a) A delle vocali della parola "ESERCIZI"
b) B delle lettere della parola "RIFLETTERE"
c) C dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi
d) D dei numeri dispari compresi tra 10 e 20
e) E delle lettere dell'alfabeto italiano
f) F dei numeri naturali minori di 10
g) G dei multipli di 7

►2. Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente un insieme.
Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come

Y={x / x è un divisore di 10}

si legge "Y è l' insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".
In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica che deve essere soddisfatta dagli elementi dell'insieme.
La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è Y={1, 2, 5, 10} .
La rappresentazione per proprietà caratteristica dell'insieme X dei numeri naturali minori di 15 è:

$$X=\{x\in\mathbb{N} / x<15\}$$

Si legge "X è l' insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".
L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'**insieme universo** definito precedentemente.
Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene un elevato numero di elementi.

Esempi

- L'insieme *A* delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare in questo modo:
  - *A*={*r* / *r* è una retta incidente a *t*}
- L'insieme *B* dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato in questo modo:
  - $B=\{n\in\mathbb{N}/ n>100\}$
- L'insieme *P* dei numeri pari può essere rappresentato come:
  - $P=\{n\in\mathbb{N}/ n=2\cdot m \quad \text{con} \quad m\in\mathbb{N}\}$
- L'insieme *C* dei numeri interi relativi compresi tra -10 e +100, estremi inclusi, si può rappresentare come: $C=\{n\in\mathbb{Z}/ -10\leqslant n\leqslant 100\}$
- L'insieme *D* che ha come rappresentazione tabulare D={1, 3, 5, 7, 9} può essere rappresentato mediante proprietà caratteristica nel seguente modo:
  $D=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ numero\ dispari\ minori\ di\ 10\}$

Oppure nel seguente modo:
$D=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ una\ cifra\ del\ numero\ 57931\}$

21 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme
D= {S, T, U, D, I, A, R, E} D={x/ x è ………………………………………………………}

22 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme
X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15} $X=\{x\in\mathbb{N}/ x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

23 Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1000.

24 Elenca gli elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ divisore\ di\ 12\}$

25 Elenca gli elementi dell'insieme $I=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ multiplo\ di\ 3\ minore\ di\ 20\}$

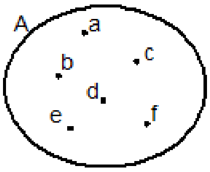
26 Dato l'insieme A={2, 4, 8, 16, 32, 64} quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?
[A] $A=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ numero\ pari\ minore\ di\ 65\}$
[B] $A=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ una\ potenza\ di\ 2\}$
[C] $A=\{n\in\mathbb{N}/ n\ \grave{e}\ una\ potenza\ di\ 2\ minore\ di\ 65\}$
[D] $A=\{n\in\mathbb{N}/ n=2^m, con\ m=1,2,3,4,5,6\}$

27 Indica con una proprietà caratteristica l'insieme B={5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

28 Indica con una proprietà caratteristica l'insieme B={4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}.

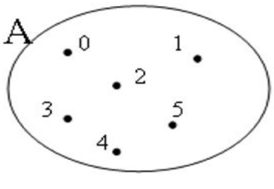
►3. Rappresentazione grafica (Diagramma di Venn)

In questa rappresentazione grafica, detta anche **rappresentazione di Eulero-Venn**, in onore dei matematici Leonhard Euler (1707–1783) e John Venn (1834–1923), si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ai punti i nomi degli elementi.

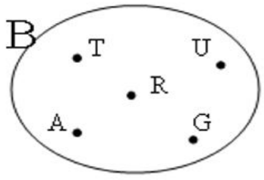


Esempi

- A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, A={0, 1, 2, 3, 4, 5}



- B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", A={t, a, r, u, g}



Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Tuttavia, se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

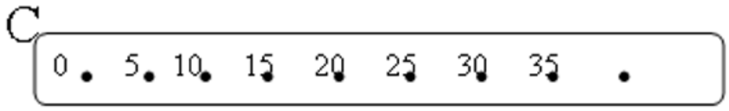
Esempi

Vediamo come è possibile rappresentare l'insieme *C* dei multipli di 5:

- Rappresentazione per caratteristica:
  $C=\{n\in\mathbb{N} / n \text{ è multiplo di } 5\}$ oppure $C=\{n\in\mathbb{N} / n=5\cdot m\,,\, m\in\mathbb{N}\}$
- Rappresentazione tabulare:
  C={0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...}

I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

- Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



29 Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:
a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;
b) delle note musicali;
c) dei numeri primi minori di 20;
d) delle consonanti della parola MATEMATICA;
e) delle province della Toscana.

30 Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica:
a) Insieme A dei divisori di 30.
b) Insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10.
c) L'insieme C delle province della Puglia.
d) L'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

31 Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme D = {3, 6, 9, 12, 15, 18}.
[A] $D=\{x\in\mathbb{N} / x\leqslant 18\}$ [B] $D=\{x\in\mathbb{N} / x \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } x<20\}$
[C] $D=\{x\in\mathbb{N} / x=3\text{x}\}$ [D] $D=\{x\in\mathbb{N} / x=3\}$

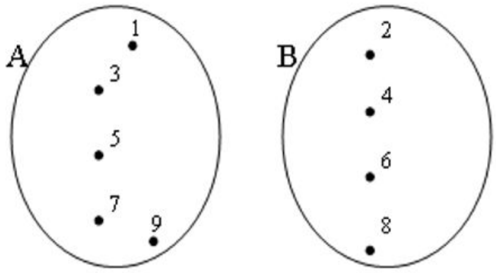
32 Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.
a) $A=\{x\in\mathbb{N} /\ \ x<10\}$ … … … … … … … … … … …
b) $B=\{x\in\mathbb{N} /\ \ 2\leq x<5\}$ … … … … … … … … … … …
c) $C=\{x\in\mathbb{N} /\ \ 5\leq x\leq 10\}$ … … … … … … … … … … …
d) $D=\{x\in\mathbb{N} /\ \ 2x\leq 10\}$ … … … … … … … … … … …
e) $E=\{e\in\mathbb{N} /\ \ 5\leq x<10\}$ … … … … … … … … … … ...
f) $F=\{f\in\mathbb{N} /\ \ f \text{ è multiplo di } 3 \text{ e } f<15\}$ … … … … … … … … … … ...
g) $G=\{g\in\mathbb{N} /\ \ g \text{ è una cifra del numero } 121231\}$ … … … … … … … … … … …
h) $H=\{h\in\mathbb{N} /\ \ h=3n+1,\ con\ n\in\mathbb{N}\}$ … … … … … … … … … … …

33 Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:
a) I numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10000.
b) I colori dell'arcobaleno.
c) I numeri razionali maggiori o uguali a 2/7.
d) I punti di una superficie S.
e) Le lettere di cui è composto il tuo nome.

34 Quale delle seguenti frasi individua la proprietà caratteristica di A={4, 8, 12, 16, 20, ...}
[A] I multipli di 2 [B] i numeri pari [C]i multipli di 4 [D] i divisori di 20

35 Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi
a) A={5, 6, 7, 8, 9, 10}
b) B={0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 98, 99, 100}
c) C={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

36 In base agli insiemi A e B rappresentati dai diagrammi di Venn stabilisci quali affermazioni sono vere:



a) $5 \notin B$ V F
b) $A = \emptyset$ V F
c) $3+2 \in A$ V F
d) $B \neq \emptyset$ V F
e) $6 \in B$ V F
f) $9 \notin A$ V F

37 Dati gli insiemi:

X={8, 9, 10}, Y={0, 8, 9, 10}, H={10, 9, 8}

$W = \{w \in \mathbb{N} / \ 8 \leq w \leq 10\}$, $Z = \{z \in \mathbb{N} / \ 8 < z \leq 10\}$, $J = \{j \in \mathbb{N} / \ 7 < j < 11\}$

Individua le uguaglianze corrette

[A] X = Y [B] X = H [C] W = H
[D] X = Z [E] *card*(Z)=2 [F] X = J

38 Rappresenta i seguenti insiemi con la proprietà caratteristica:

a) A={gennaio, maggio, giugno, luglio, agosto}
b) B={Gorizia, Pordenone, Trieste, Udine}
c) C={sabato, domenica}
d) D={10, 20, 30, 40, 50}
e) E={Puglia, Piemonte}

39 Siano dati gli insiemi:

A={g, a, t, o} B={o, g, t, a} C={c/c è una lettera della parola “gatto”}
D={g, t} E={gatto} F={f / f è una consonante della parola “gatto”}

Segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

[A] A = B [C] A = C [E] C = E [G] *card*(C)= 5 [I] *card*(E)=5
[B] A = D [D] E = A [F] D = F [H] D = E [L] C = D

40 Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

a) $X = \{x \in \mathbb{N} / \ x-1 \text{ è un numero pari}\}$ {… … … … … … … … … … …}
b) $Y = \{y \in \mathbb{N} / \ y = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ {… … … … … … … … … … …}
c) $Z = \{z \in \mathbb{N} / \ z = 3n \text{ e } z \text{ non è divisibile per } 2, n \in \mathbb{N}\}$ {… … … … … … … … …}
d) $W = \{w \in \mathbb{N} / \ w < 0\}$ {… … … … … … … … … … …}

41 Quali delle seguenti scritture sono vere?

a) $5 \in \{10, 8, 6, 4, 2\}$ V F
b) $15 \in \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant 10\}$ V F
c) $7 \in \{n \in \mathbb{N} / n+5 < 10\}$ V F
d) $l \notin \{x / x \text{ è una lettera della parola 'scuola'}\}$ V F

42 Elenca per tabulazione gli elementi di $A = \{x \mid x \in N, x \text{ è pari}, x \leq 10, x \neq 0\}$.

43 Elenca per tabulazione gli elementi di $L = \{l / l \text{ è una lettera della parola } MATEMATICA\}$
$A = \{x \mid x \in N, x \text{ è pari}, x \leq 10, x \neq 0\}$.

44 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

A={1+3, 5-2, 1+1, 9-8, 1-1} $B = \{n \in \mathbb{N} / n < 5\}$ C={6-4, 6+4, 6-6}

45 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

A={p, a, n, e} B={pane} C={pena} D={p, e, n, a}

46 Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

[A] $A = \{x \in \mathbb{N} / \ 3 \leqslant x \leqslant 12\}$ [C] $A = \{x \in \mathbb{N} / \ 2 < x < 13\}$
[B] $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3\text{n} \ \ con \ \ 1 \leqslant n \leqslant 4\}$ [D] $B = \{x \in \mathbb{N} / x = 3^n \ \ con \ \ n = 1, 2, 3, 4\}$

3. OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

►1. Sottoinsieme

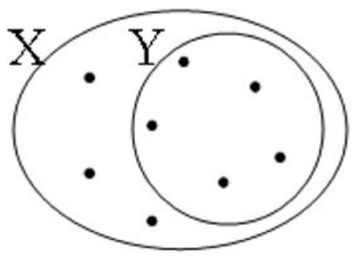
Consideriamo l'insieme *A* degli abitanti di Milano e l'insieme *B* degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme *B* sono anche elementi di *A*: si dice che *B* è sottoinsieme di *A*, si scrive $B \subseteq A$.
Nel caso in cui tutti gli elementi di *Y* siano elementi di *X* e tutti gli elementi di *X* siano elementi di *Y* si ha che *X*=*Y*, e *Y* si dice **sottoinsieme improprio** di *X:*

$$\text{se} \quad X \subseteq Y \quad e \quad Y \subseteq X \quad \text{allora} \quad Y = X .$$

Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto $\emptyset$, cioè qualunque sia l'insieme X risulta che $\emptyset \subset X$. **L'insieme vuoto è considerato un sottoinsieme improprio di qualunque insieme**.
Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.
Se *Y* è un sottoinsieme di *X* e *X* ha altri elementi oltre a quelli di *Y* si dice che *Y* è un **sottoinsieme proprio** di *X* e si scrive $Y \subset X$. La scrittura $A \subseteq B$ si usa quando non si sa in modo certo se $A = B$ o $A \subset B$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *X* e *Y*, si dice che *Y* è un **sottoinsieme** di *X* se ogni elemento di *Y* è anche elemento di *X*.
In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge *"Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".*

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



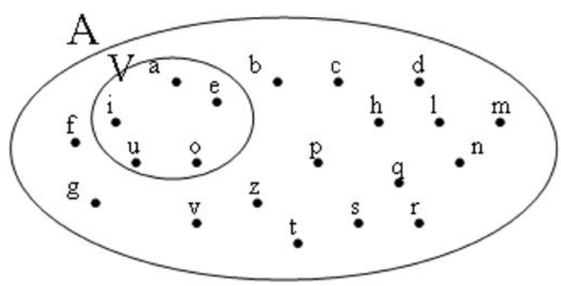
Se *a* è un elemento del sottoinsieme *Y*, allora lo sarà anche dell'insieme *X*:

$$\text{se} \quad a \in Y \quad \text{e} \quad Y \subseteq X \quad \text{allora} \quad a \in X .$$

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$.
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme *X* risulta $\emptyset \subseteq X$.
Consideriamo l'insieme *X* = {lettere della parola "autunno"} e l'insieme *Y* = {lettere della parola "notaio"}; possiamo affermare che "ogni" elemento di *Y* è anche elemento di *X*? La risposta è negativa: $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi *Y* non è sottoinsieme di *X* e si scrive $Y \not\subset X$

<u>Esempio</u>

Sia *A* l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e *V* l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di *A*, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



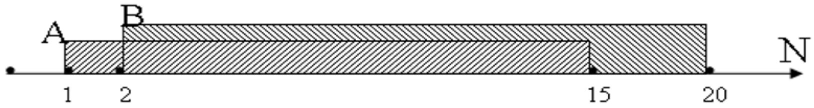
<u>Esempio</u>

Sia $C = \{1\}$, allora *C* non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

<u>Esempio</u>

Sia *A* l'insieme delle auto esposte in un autosalone e *U* l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che *U* è un sottoinsieme di *A*, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

47 Siano $A=\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 15\}$ e $B=\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 20\}$.



Quale delle seguenti affermazioni è vera:
[A] $A \subset B$ [B] $B \supset A$ [C] $A=B$ [D] $B \not\subset A$

48 Siano T={t / t è un triangolo}, R={r / r è un rettangolo}, E={e / e è un triangolo equilatero}.
Quale affermazione è vera?
[A] $R \subset T$ [B] $E \subset T$ [C] $E \subset R$ [D] $T \subset E$

49 Siano $A=\{x \in \mathbb{N} \mid \text{x è pari } e\ (1 \leqslant x \leqslant 20)\}$ e $B=\{x \in \mathbb{N} \mid \text{x è multiplo di 6 } e\ (2 \leqslant x \leqslant 18)\}$
[A] $A \subset B$ [B] $B \supset A$ [C] $A=B$ [D] $B \subset A$

50 Siano $A=\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B=\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 20\}$.
Quali delle seguenti affermazioni è vera:
[A] $A \subset B$ [B] $B \supset A$ [C] $A=B$ [D] $A \not\subset B$

51 Sia $A=\{1,2,3,4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di *A*.

► 2. Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme *A* dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme *A* possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di *A*.

Esempio

Determinare tutti i sottoinsiemi di A={1,2,3}.
$\emptyset \subset A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.
Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: {1}, {2}, {3}.
Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: {1,2}, {1,3}, {2,3}.
L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1,2,3\} \subseteq A$

DEFINIZIONE. Dato un insieme *A*, si chiama **insieme delle parti** l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di *A*. In simboli: $\wp(A)$.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e *A,* quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$.

Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di *A*.

Esempi

- L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso quindi $\wp(\emptyset)=\{\emptyset\}$
- Dato l'insieme $A=\{a\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:
  $S_1=\emptyset$, $S_2=\{a\}$ allora $\wp(A)=\{S_1, S_2\}$
- Dato l'insieme $B=\{matita, penna\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:
  $S_1=\emptyset$, $S_2=B=\{matita, penna\}$, $S_3=\{matita\}$, $S_4=\{penna\}$ allora
  $\wp(A)=\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$
- *Dato l'insieme* $B=\{1,2,3\}$ *, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono:*
  $S_1=\emptyset$, $S_2=B=\{1,2,3\}$, $S_3=\{1\}$, $S_4=\{2\}$, $S_5=\{3\}$, $S_6=\{1,2\}$, $S_7=\{1,3\}$, $S_8=\{2,3\}$
- *allora* $\wp(A)=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$

Riassumendo:
se $A=\emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8;
Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme della parti ne ha 2^n.

52 Se $A=\{x\in\mathbb{N}|1\leq x<3\}$ allora $\wp(A)$ ha:
[A] 2 elementi [B] 3 elementi [C] 4 elementi [D] 8 elementi

53 Considera l'insieme $B=\{x\in\mathbb{N}|1<x<5\}$ e $\wp(B)$ quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

$\{1\}\in\wp(B)$	[V] [F]	$0\in\emptyset$	[V] [F]
$\emptyset\subset\wp(B)$	[V] [F]	$\emptyset\subseteq B$	[V] [F]
$\{2,5\}\in\wp(B)$	[V] [F]	$\{1,2,3\}\in\wp(B)$	[V] [F]
$\{\emptyset\}\in\wp(B)$	[V] [F]	$\{1,2,3\}\notin\wp(B)$	[V] [F]

54 Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset,\{8,10\},\{8\},\{10\}\}$.

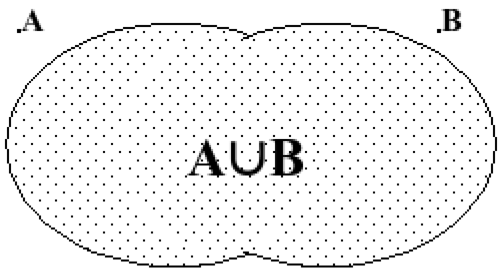
55 Dato $H=\{h|\text{ h è una lettera della parola MAMMA }\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$.

56 Dato $A=\{x/x\in\mathbb{N}, n<5 \text{ e } n \text{ divisore di } 12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$.

► 3. Insieme unione

Prendiamo l'insieme *P* dei numeri pari e l'insieme *D* dei numeri dispari; allora l'insieme *N* dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi *P* e *D*.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e B, si dice **insieme unione** l'insieme *C*, composto da tutti gli elementi appartenenti ad *A* o a *B* o a entrambi. In simboli: $C=A\cup B$, si legge *"A unito a* B*" o "A unione B"*.

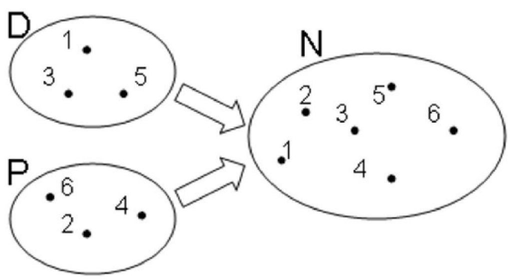


Mediante proprietà caratteristica si scrive:
$C=A\cup B=\{x|(x\in A) o (x\in B)\}$

Proprietà dell'unione tra insiemi

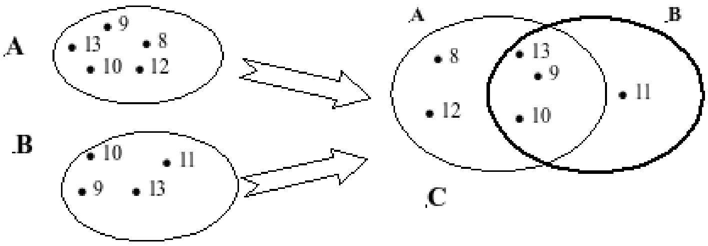
1. $A\cup B=B\cup A$ proprietà **commutativa** dell'unione
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ proprietà **associativa** dell'unione
3. *Se* $B\subset A$ *allora* $A\cup B=A$
4. $A\cup\emptyset=A$
5. $A\cup A=A$ proprietà di **idempotenza** dell'unione

<u>Esempio</u>
Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{2,4,6\}$ allora $N=P\cup D=\{1,2,3,4,5,6\}$



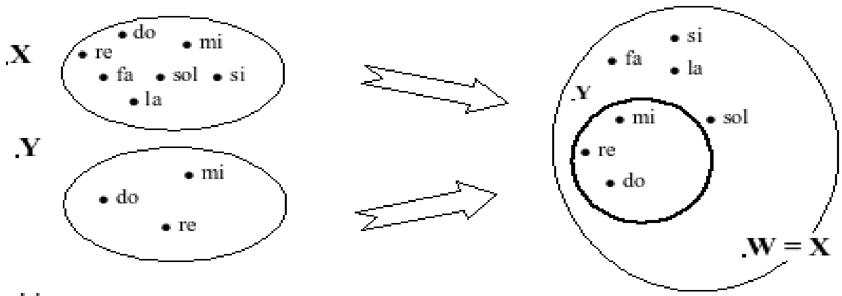
<u>Esempio</u>

Siano $A=\{8,9,10,12,13\}$ e $B=\{9,10,11,13\}$ allora $C=A\cup B=\{8,9,10,11,12,13\}$



<u>Esempio</u>

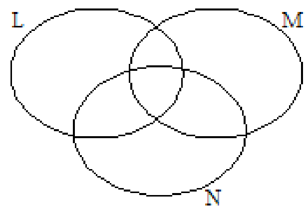
Siano $X=\{do,\mathrm{re},mi,fa,sol,la,si\}$ e $Y=\{do,\mathrm{re},mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X\cup Y=X=\{do,\mathrm{re},mi,fa,sol,la,si\}$



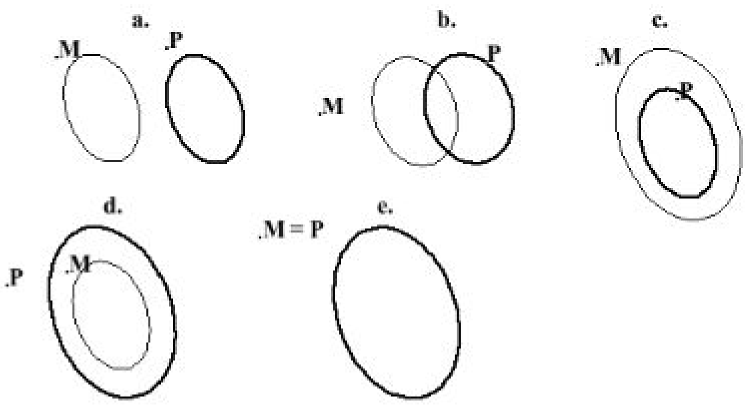
57 Dati $A=\{1,2,4,5\}$ *e* $B=\{1,3,4,5,8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

58 Dati gli insiemi *C* delle lettere della parola "GIARDINO" e D delle lettere della parola "ORA" determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

59 Dati gli insiemi $L=\{1,2,5,6,7,8\}$, $M=\{4,5,6,7,10\}$, $N=\{2,3,5,7,9,10\}$ determina l'insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



60 Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica.
Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.



$M\subset P$	[a] [b] [c] [d] [e]	$M\not\subset P$	[a] [b] [c] [d] [e]
$P\supseteq M$	[a] [b] [c] [d] [e]	$P\subset(P\cup M)$	[a] [b] [c] [d] [e]
$M\subseteq(M\cup P)$	[a] [b] [c] [d] [e]	$M\neq P$	[a] [b] [c] [d] [e]

► 4. Insieme intersezione

Esempio

Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

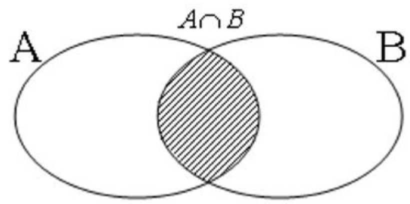
L'insieme degli elementi di *A* che stanno in *B* è {m,a,t,e,i}.

L'insieme degli elementi di B che stanno in A è {m,a,t,e,i}.

L'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è {m,a,t,e,i}.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e *B*, si dice insieme **intersezione** di A e B l'insieme *C*, composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad *A* e a *B*, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C=A\cap B$ che si legge *"A intersecato a B" o "A intersezione B".*

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C=A\cap B=\{x|(x\in A) e (x\in B)\}$



Se $A\cap B=\emptyset$, ossia se *A* e *B* non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono **disgiunti**.

Proprietà dell'intersezione tra insiemi

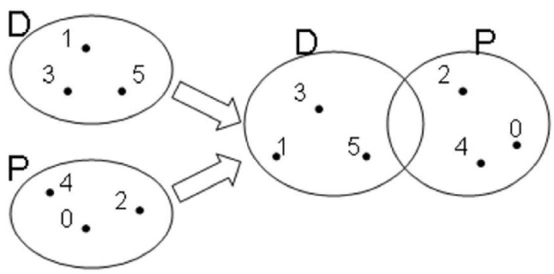
1. $A\cap B=B\cap A$ proprietà **commutativa** dell'intersezione
2. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ proprietà **associativa** dell'intersezione
3. $Se\ B\subset A\ allora\ A\cap B=B$
4. $A\cap\emptyset=\emptyset$
5. $A\cap A=A$ proprietà di **idempotenza** dell'intersezione
6. $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

1. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ proprietà **distributiva** dell'intersezione rispetto l'unione
2. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ proprietà **distributiva** dell'unione rispetto l'intersezione

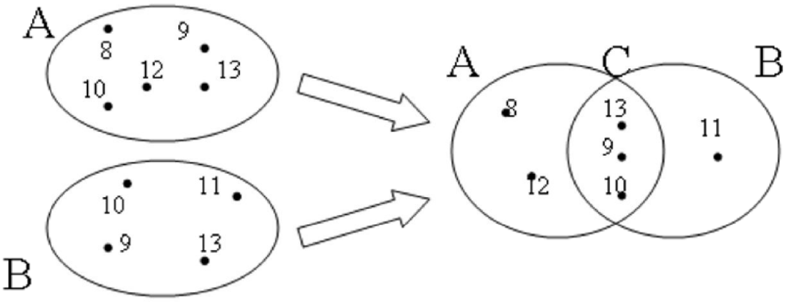
Esempio

Siano $D=\{1,3,5\}$ e $P=\{2,4,6\}$ allora $N=P\cap D=\emptyset$



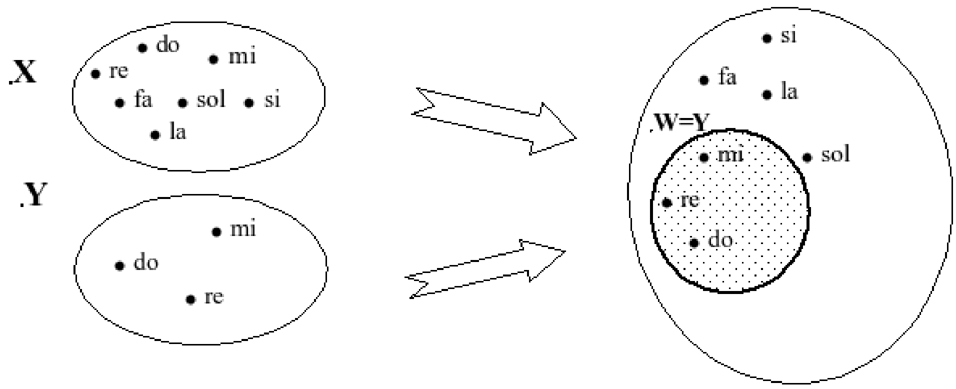
Esempio

Siano $A=\{8,9,10,12,13\}$ e $B=\{9,10,11,13\}$ allora $C=A\cap B=\{9,10,13\}$



Esempio

Siano $X=\{do,re,mi,fa,sol,la,si\}$ e $Y=\{do,re,mi\}$ allora poiché $Y\subset X$
$W=X\cap Y=Y=\{do,re,mi\}$



61 Dati $A=\{1,2,4,5\}$ e $B=\{1,3,4,5,8\}$ determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

62 Dati gli insiemi *C* delle lettere della parola "LIBRO" e D delle lettere della parola "PASTA" determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

63 Considerando i 3 insiemi $S=\{a,b,c,e,f,s,t\}$, $T=\{a,c,g,h,l,s\}$ e $U=\{b,c,d.g,s,t\}$, determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

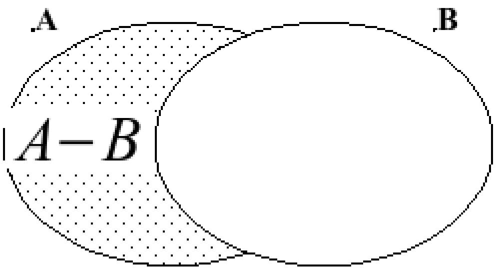
► 5. Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi *A* e *B* formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,z\}$ e $B=\{b,c,d,f,g,h,l,m,n,p,q,r,s,t,v,z\}$, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme *A* ma non in *B* formano un nuovo insieme chiamato insieme **differenza.**

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e B, si dice insieme **differenza** l'insieme C, composto da tutti gli elementi di *A* che non appartengono a B. In simboli: $C=A-B$ che si legge *"A differenza B".*

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C=A-B=\{x|(x\in A)e(x\notin B)\}$

La rappresentazione mediante diagramma di Eulero-Venn dell'insieme differenza



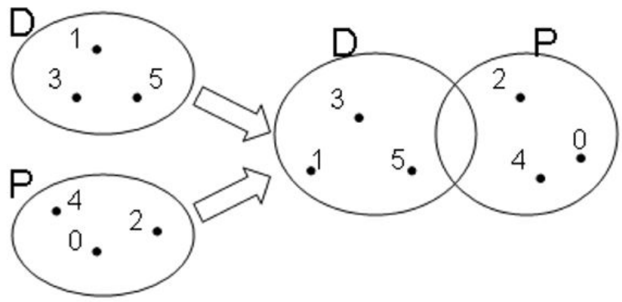
Proprietà della differenza tra insiemi

1. **Se** $A \cap B = \emptyset$ **ossia sono disgiunti allora** $A - B = A$ e $B - A = B$
2. **Se** $B \subset A$ **ossia *B* è sottoinsieme proprio di *A* allora** $B - A = \emptyset$
3. $A - A = \emptyset$
4. $A - \emptyset = A$

Esempio

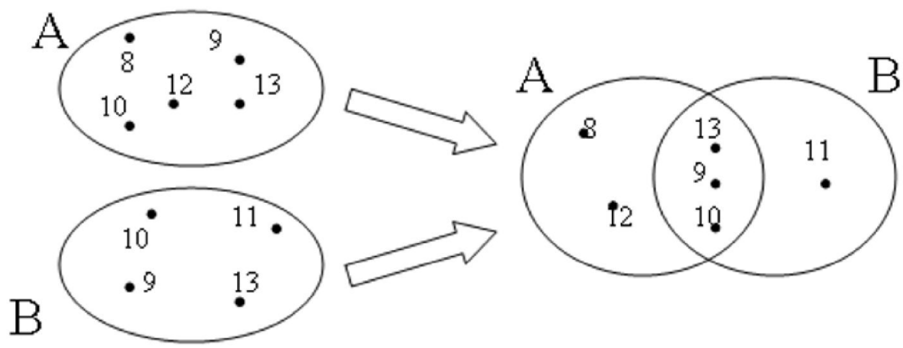
Siano $D = \{1,3,5\}$ e $P = \{0,2,4\}$ i due insiemi sono disgiunti $P \cap D = \emptyset$ allora

$$D - P = \{1,3,5\} = D$$
$$P - D = \{0,2,4\} = P$$



Esempio

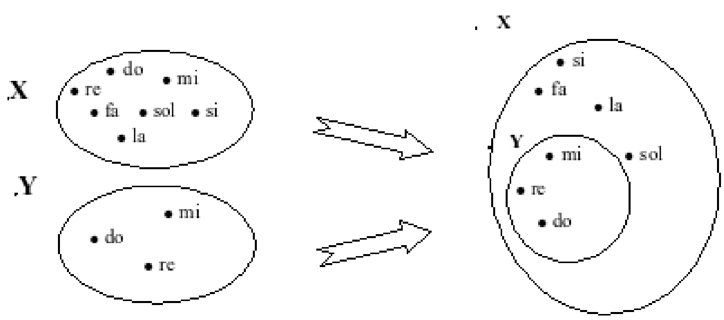
Siano $A = \{8,9,10,12,13\}$ e $B = \{9,10,11,13\}$ allora $C = A - B = \{8,12\}$ e $D = B - A = \{11\}$



Poiché $A - B \neq B - A$ nella differenza non vale la proprietà commutativa.

Esempio

Siano $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y = \{do, re, mi\}$ allora poiché $Y \subset X$
$W = X - Y = \{fa, sol, la, si\}$



64 Dati gli insiemi *E={x / x è una lettera della parola "cartellone"}*e *F={x / x è una lettera della parola "martello"}* determina *E-F* e *F-E*.
65 Dato l'insieme *A={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32}* e il suo sottoinsieme *B* dei multipli di 3, determina gli insiemi *A-B* e *B-A*.
66 Dato l'insieme $X=\{x \in N | 10 \leq x \leq 100\}$ e $Y=\{y \in N | 10 < y < 100\}$ determina $X-Y \text{ e } Y-X$.

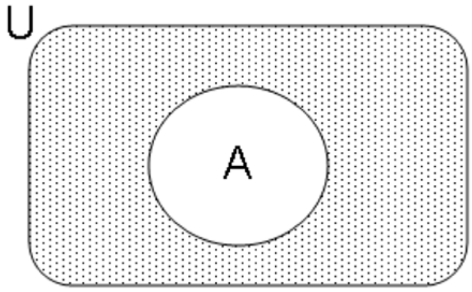
► 6. Insieme complementare

DEFINIZIONE. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono *A* come sottoinsieme si dice **insieme universo** o **insieme ambiente**.

Sia *W={sabato, domenica}* l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per *dì*. L'insieme *W* può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana *G={lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica}*. L'insieme degli elementi di *G* che non appartengono a *W* forma un insieme che chiameremo **complementare** di W rispetto a G, l'insieme G invece si dice in questo caso insieme **universo.** Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A=\{x \in N | x \leq 100\}$ *N* è l'insieme universo di *A*.

DEFINIZIONE. Dato l'insieme *A* e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad *A* si dice **insieme complementare** di *A* rispetto a U. In simboli: $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ oppure $C_U A$

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:



Nella figura la parte riempita con puntini è il complementare di *A* rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$.
Come si può vedere dal disegno, essendo $A \subseteq U$ il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.

Esempi

1. Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme N dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$,
2. Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme *A* delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme *C* delle consonanti: $\overline{V}_U = C$.
3. Dati gli insieme $U=\{x \in N | 1 \leq x \leq 10\}$ e $B=\{x \in N | 1 \leq x \leq 5\}$, poiché $B \subset \mathbb{N}$ si può determinare $\overline{B}_{\mathbb{N}} = \{x \in N | 6 \leq x \leq 10\}$.

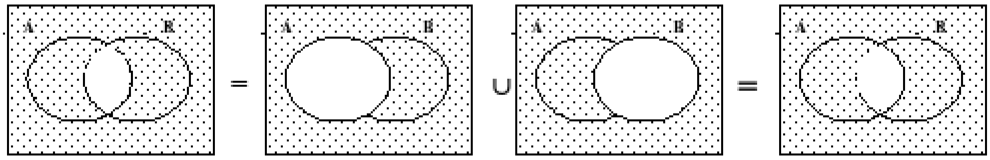
67 Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che:
a) $\overline{A}_U \cup A = U$ b) $(A-B) \cup (B-A) \cup (\overline{A \cup B}) = \overline{A \cap B}$
68 Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{E \cap F}$ è uguale a:
[A] $E \cup F$ [B] $\overline{E \cup F}$ [C] $E \cap F$ [D] $\overline{E} \cup \overline{F}$
69 Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{G \cup H}$ è uguale a:
[A] $\overline{G \cap H}$ [B] $\overline{G} \cap \overline{H}$ [C] $\overline{G \cap \overline{H}}$ [D] nessuno dei precedenti

► 7. Leggi di De Morgan

Dati due insiemi *A* e *B* ci sono alcune proprietà, dette **leggi di De Morgan,** che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

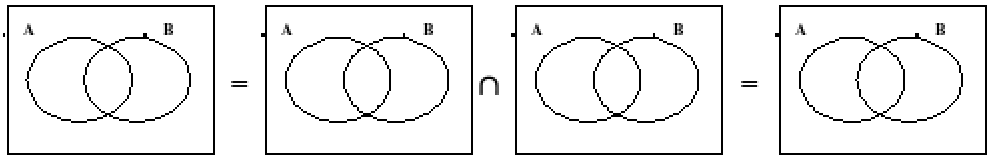
1. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ Prima legge di De Morgan
2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ Seconda legge di De Morgan

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn



$\overline{(A\cap B)}$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A}\cup\overline{B}$

70 Dimostra la 2° legge di De Morgan annerendo gli spazi opportuni



$\overline{(A\cup B)}$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A}\cap\overline{B}$

71 Dati gli insiemi *C* e *D* tali che $C\subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a) $D-C$ = … ... c) $\overline{C\cap D}$ = … … e) $C-D$ = … …

b) $D\cap\overline{C}$ = … … d) $C\cup\overline{C}$ = … … f) $C\cap\overline{C}$ = … ...

72 Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X\cap\overline{Y}}$:

a. $\overline{X}\cup\overline{Y}$ **b.** $\overline{X}\cap\overline{Y}$ **c.** $\overline{X}\cup Y$ **d.** $X\cup\overline{Y}$

► 8. Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce – Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3,2\}$ e $\{2,3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una **coppia ordinata** di numeri.

DEFINIZIONE. Un insieme di due elementi *a* e *b* presi in un certo ordine si dice **coppia ordinata**. Se il primo elemento della coppia è *a* ed il secondo è *b* si scrive: *(a, b)*.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi *A* e *B* non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad *A* e il secondo a B, si chiama **prodotto cartesiano** di *A* per B. In simboli: $A\times B$ che si legge *"*A per B*"* oppure *"*A prodotto cartesiano con B*"* o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A\times B=\{(x\,;y)|\,x\in A\ e\ y\in B\}$

Nel caso in cui B=A $A\times A=A^2=\{(x\,;y)|\,x\in A e\, y\in A\}$.

<u>Esempi</u>

Sia $C=\{x,y,z\}$ il prodotto cartesiano $C\times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate:
$C\times C=\{(x;x),(x;y),(x;z),(y;x),(y;y),(y;z),(z;x),(z;y),(z;z)\}$

Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

$A\times\emptyset=\emptyset$ $\emptyset\times A=\emptyset$ $\emptyset\times\emptyset=\emptyset$

Esempi

Sia $A=\{a,b\}$ e $B=\{1,2,3\}$, il prodotto cartesiano $A\times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A\times B=\{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$ mentre il prodotto cartesiano $B\times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B\times A=\{(1;a),(2;a),(3;a),(1;b),(2;b),(3;b)\}$.
Si può notare che $A\times B\neq B\times A$.

Poiché $A\times B\neq B\times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

73 Sia $E=\{x\in N|\ 1\le x<3\}$, $F=\{x|$ x è una vocale della parola TELEFONO$\}$ e $G=\{x\in N|\ x<-6\}$
allora

$E=\{1,\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $F=\{e,\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $G=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$E\times F=\{(1;e),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $F\times E=\{(e;1),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

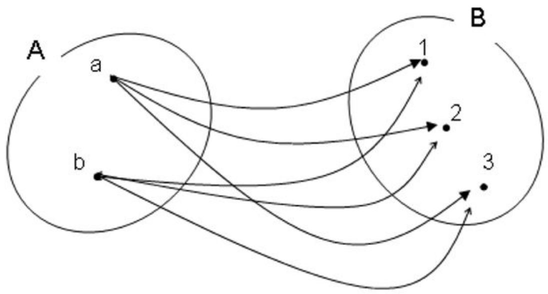
$F\times G=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $G\times E=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

- **Tabulazione delle coppie ordinate**
Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di *A* con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di *A* con tutti gli elementi di *B* e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A\times B=\{(a;1),(a;2),(a;3),(b;1),(b;2),(b;3)\}$$

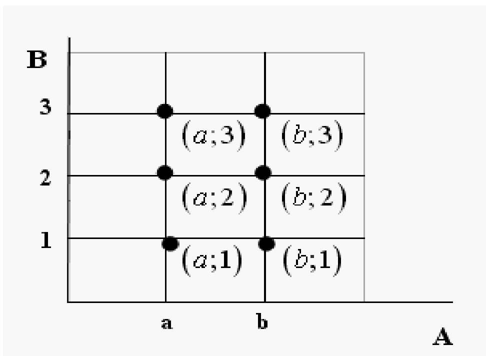
- **Diagramma a frecce**
Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi si Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.



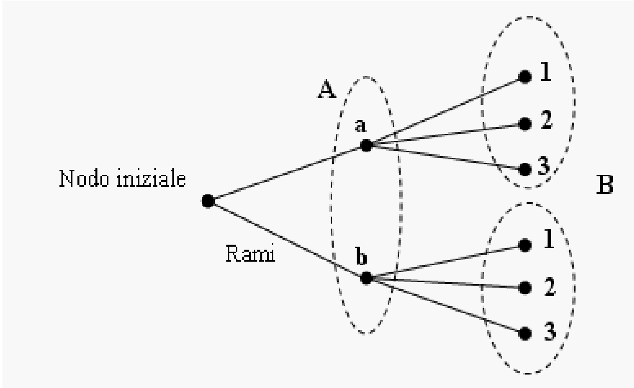
- **Tabella a doppia entrata**
Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

A \ B	1	2	3
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$

- **Diagramma cartesiano**
Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate **assi cartesiani.** Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

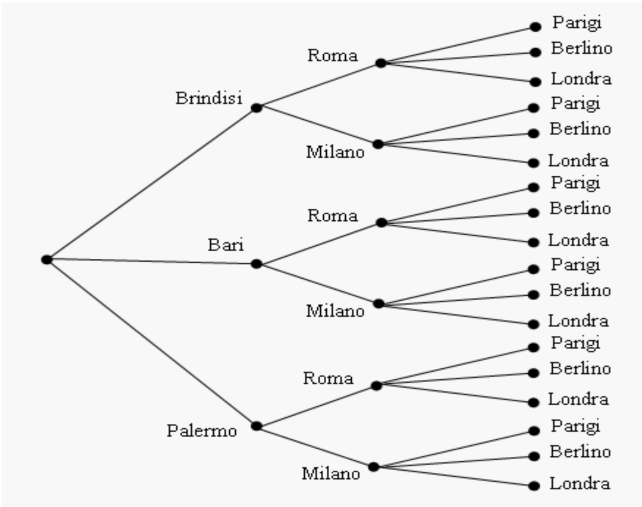


- **Diagramma ad albero**
  È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.
  Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.
  La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



<u>Esempio</u>

Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P=\{Brindisi, Bari, Palermo\}$ l'insieme delle città di partenza, $S=\{Roma, Milano\}$ l'insieme delle città di scalo e $A=\{Parigi, Berlino, Londra\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P\times S\times A$. Rappresentiamo $P\times S\times A$ tramite un diagramma ad albero:



74 Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A\times B$, dove *A* ha 6 elementi, *B* ne ha 3:
[A] 9 [B] 18 [C] 6 [D] Non si può sapere

75 Sapendo che $E\times F=\{(x;x),(x;y),(x;z),(y;x),(y;y),(y;z)\}$ indica gli elementi di E e di F:
$E=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $F=\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

76 Se $A\times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti *A* e B?
[A] 1; 5 [B] 3; 2 [C] 6; 1 [D] 2; 3

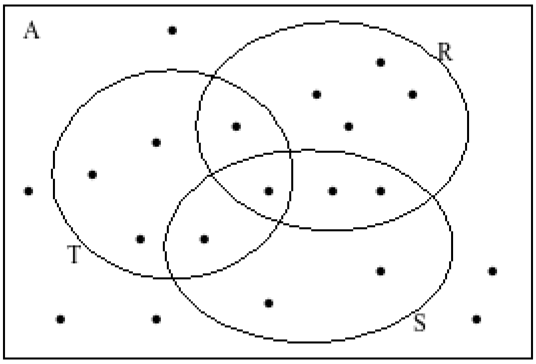
77 Dati gli insiemi $A=\{3,5,6\}$ e $B=\{-2,1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A\times B$ ed elencane gli elementi .

► 9. I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Problema 1

Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.



Quanti sono gli amici appassionati di ballo?
Quanti tra loro ballano

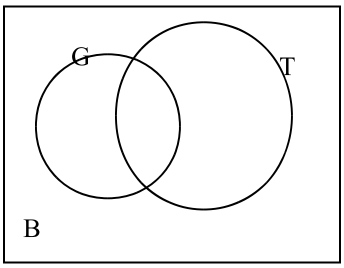
1) ***nessuno** dei balli indicati?*
2) ***almeno uno** dei balli tango, samba, rumba?*
3) ***almeno** la samba?*
4) ***solo** la rumba?*
5) *la rumba **e** il tango?*
6) ***tutti** i balli indicati?*

Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.
Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno cioè $Card(A) = 20$
Rispondiamo ora alla seconda domanda:

1) *Quanti tra loro ballano **nessuno** dei balli indicati?*
   Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme *A*, ma in nessuno degli insiemi *R*, *S*, *T* quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme *A*, dunque $Card(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$.
2) *Quanti tra loro ballano **almeno uno** dei balli tra tango, samba, rumba?*
   Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $Card(R \cup S \cup T) = 14$.
3) *Quanti tra loro ballano **almeno** il samba?*
   Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme *S*, quindi $Card(S) = 6$
4) *Quanti tra loro ballano **solo** la rumba?*
   Nell'insieme *R* sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme *R* gli elementi che stanno in *S* o in *T*: $Card(R-(T \cup S)) = 4$
5) *Quanti tra loro ballano la rumba **e** il tango?*
   quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $Card(R \cap T) = 2$
6) *Quanti tra loro ballano **tutti** i balli indicati?*
   quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $Card(R \cap S \cap T) = 1$.

Problema 2

A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?



Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con *B* l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Sappiamo che
$Card(G)=7;\ Card(G \cap T)=3;\ Card(G-T)=4;\ Card(B-(G \cup T))=2$
Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini i bambini e rispondi al quesito.

Problema 3

Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

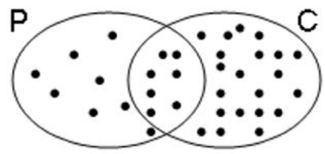
Dati:
$P=\{\text{iscritti a pallavolo}\};\ C=\{\text{iscritti a calcio}\};\ Card(P)=15;\ Card(C)=28$

Obiettivo:
Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P\cup C$

Soluzione:
Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi *P* e *C* sono disgiunti: $P\cap C=\emptyset$. Quindi:
$Card(P\cup C)=Card(P)+Card(C)=15+28=43$.

Problema 4

Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 , e allenamenti di calcio, dalle 19.00 alle 20.30 l'allenamento di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati:
$P=\{\text{iscritti a pallavolo}\};\ C=\{\text{iscritti a calcio}\}$
$Card(P)=15;\ Card(C)=28;\ Card(P\cap C)=7$

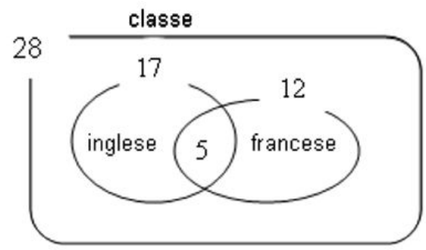
Obiettivo:
Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P\cup C$

Soluzione:
$Card(P\cup C)=Card(P)+Card(C)-Card(P\cap C)=15+28-7=36$.

Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti *A* e *B* la cardinalità dell'insieme $A\cap B$ è data dalla seguente formula: $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$.

Problema 5

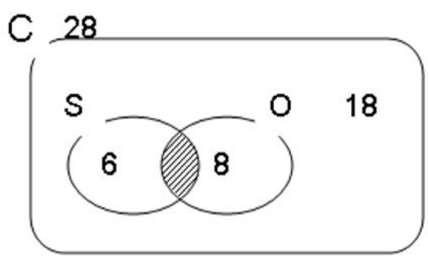
A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?



Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso NON sono 17+12=29, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono 17+12-5=24. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono 28-24=4.

Problema 6

Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?



Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.
C è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi.
Gli elementi di $\overline{S\cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.
L'insieme $S\cup O$ è quindi costituito da 28-18=10 elementi.
Ricordiamo che $Card(S\cup O)=Card(S)+Card(O)-Card(S\cap O)$,
pertanto $Card(S\cap O)=Card(S)+Card(O)-Card(S\cup O)=6+8-10=4$.
In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

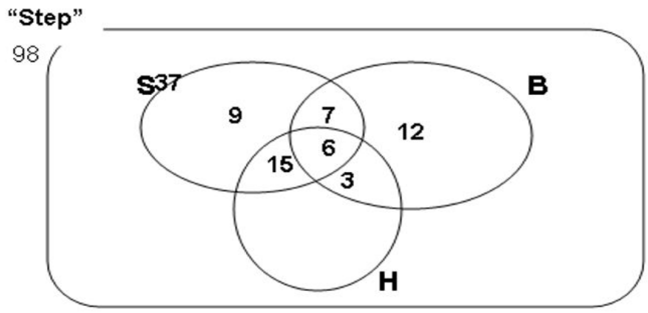
Problema 7

La scuola "Step" organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance. Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98:

- *6 frequentano tutti e tre i corsi,*
- *37 frequentano il corso di Salsa,*
- *15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop,*
- *7 solo i corsi Salsa e Break Dance,*
- *9 almeno Hip Hop e Break Dance.*
- *28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.*

Quanti praticano solo Hip Hop?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.



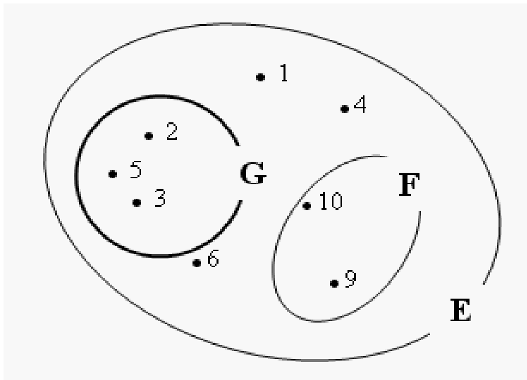
S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, *B* l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

- $S \cap B \cap H = 6$.
- Quelli che frequentano solo il corso di salsa sono 37-15-6-7=9.
- Poiché 9 frequentano almeno Hip Hop e Break Dance, tenendo conto che 6 frequentano tutti e tre i corsi rimangono 3 che frequentano Hip Hop e Break Dance solamente.
- Quelli che frequentano Salsa o Break Dance ma non Hip Hop sono 28, cioè significa che $Card(S \cup B - H) = 28$, da cui risulta che quelli che frequentano solo Break Dance sono 12.
- Quelli che praticano solo Hip Hop sono quindi 98-9-7-12-15-6-3=46.

78 Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme $C = \{a, e, i, o, u\}$

79 In base alla figura rispondi alle domande:

a) L'insieme E ha 5 elementi [V] [F]
b) $2 \in E$ [V] [F]
c) $3 \notin G$ [V] [F]
d) $F \subset G$ [V] [F]
e) $F \subset E$ [V] [F]
f) $\emptyset \subseteq G$ [V] [F]
g) $Card(E) = 8$ [V] [F]
h) $10 \in E$ [V] [F]
i) $F \cap E = F$ [V] [F]
j) $F \cup G = E$ [V] [F]
k) $(E - F) - G = \{1,4\}$ [V] [F]



80 Dato l'insieme A={0; 1; 5; 6; 9} stabilisci quali dei seguenti sono o no suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

- B={1;5;6} B .... A
- C={0;1;3;5} C .... A
- D={ } D .... A
- E={0} E .... A
- F={5;6;7} F .... A
- G={6;0;1;5;9} G......... A

81 Siano dati i seguenti insiemi

$C = \{x | \text{ x è una lettera della parola REMARE}\}$, $D = \{x | \text{ x è una lettera della parola VOLARE}\}$, $E = \{x | \text{ x è una lettera della parola AMARE}\}$, indica quali delle seguenti relazioni sono vere:

[A] $D \subseteq C$ [B] $D \not\subset E$ [C] $C = E$ [D] $E \supseteq C$

82 Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A=\{a,b,c,d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d
$a\in A$	L'elemento a .... all'insieme A
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A
$B\subset A$	L'insieme *B* è .... nell'insieme A, ovvero *B* è un .... di A
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A
....	L'insieme *C* è l'unione degli insiemi *A* e B.
$D=A\cap B$	L'insieme D è .... degli insiemi *A* e B.
$A\cap F=\emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L=C_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra *A* e B.

83 Rappresenta graficamente l'insieme $A=\{x\in N \mid x\leq 25 \text{ e x è pari}\}$ e $B=\{x\in N \mid x\leq 27 \text{ e x è multiplo di } 4\}$ e stabilisci se $A\supseteq B$

84 Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A\subset B \text{ e } B\subset C \text{ allora } A\subset C$. Le relazioni valgono anche se il simbolo ⊂ viene sostituito con ⊆ ?

85 Dato $A=\{do, re, mi\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$

86 Considerato l'insieme $X=\{a,c,d,t,o\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $\{x \mid \text{x è una vocale della parola CAROTA}\}\subset X$ [V] [F]
b) $\{a,t\}\not\subset\wp(X)$ [V] [F]
c) $\{a,t\}\in\wp(X)$ [V] [F]
d) $0\in X$ [V] [F]
e) $\emptyset\in\wp(X)$ [V] [F]
f) $X\in\wp(X)$ [V] [F]

87 Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$ . . . .
b) $L\cap D$ . . . .
c) $\overline{L\cup D\cup S}$ . . . .
d) $L-S$ . . . .
e) $\overline{L}\cap S$ . . . .
f) $\overline{L\cap D\cap S}$ . . . .

88 Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?
[A] 49 [B] 64 [C] 128 [D] 7 [E] 14

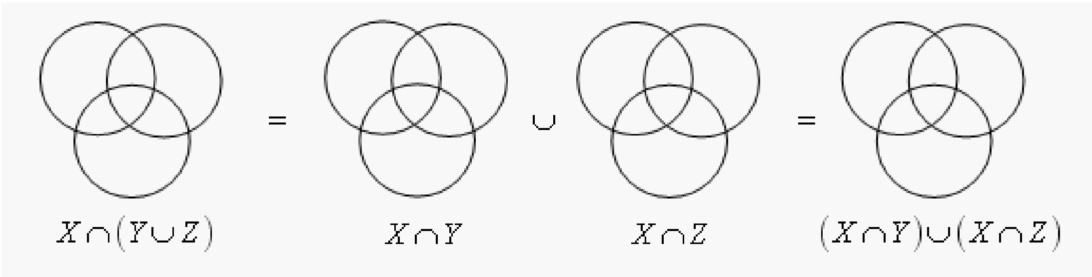
89 Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{Mauro\}, \{Mario\}\{Mauro, Mario\}\}$

90 Se $A\cup B=B$ cosa puoi dire di *A* e B?
[A] $B\subseteq A$ [B] $A\notin B$ [C] $A\subseteq B$ [D] $A\subset B$ [E] $A\cap B=\emptyset$

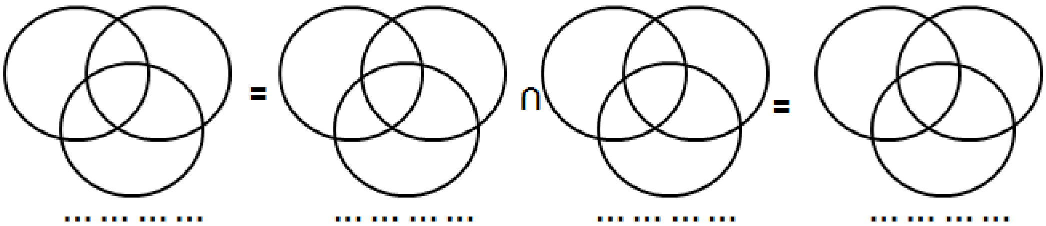
91 Dati gli insiemi *A* = {10, 20, 30, 40, 50}, *B* = {20, 30, 50}, determina un insieme *C* tale che:
a) $B\cup C=A$ b) $A\cap C=B$ c) $C\cup C=B$ d) $C\cap C=A$

92 Dati gli insiemi $A=\{x\in\mathbb{N}, x\leq 10 \text{ e } x \text{ pari}\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}/x\leq 20 \text{ e } x \text{ divisibile per } 4\}$, $C=\{1,2\}$ determina $(A\cap B)x\,C$.

93 Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.



94 Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



95 Se $E-F=E$ cosa puoi dire di E e F?

[A] $E\cup F=E$ [B] $E=F$ [C] $E\subseteq F$ [D] $F\subset E$ [E] $E\cap F=\emptyset$

96 Dati i seguenti insiemi $A=\{x\in N|\ x\leq 25\}$, $B=\{x\in N|\ 4<x\leq 9\}$, $C=\{x\in N|\ x<25\}$, $D=\{x\in N|\ x>7\}$ scegli fra i seguenti i loro complementari

a. $E=\{x\in N|\ x\geq 25\}$ **b.** $F=\{x\in N|\ x\leq 6\}$ **c.** $G=\{x\in N|\ x>25\}$ **d.** $H=\{x\in N|\ x<7\}$ **e.** $I=\{x\in N|\ x<4\ e\ x\geq 8\}$ **f.** $L=\{x\in N|\ x<4\ o\ x\geq 10\}$ **g.** $M=\{x\in N|\ x\leq 4\ e\ x\geq 9\}$

97 Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei

[A] multipli di 4 [B] multipli di 3 [C] multipli di 6 [D] numeri primi

98 In una classe di 30 allievi 16 hanno debito in matematica, 20 in italiano, 10 non hanno avuto nessun debito. Associa ad ogni insieme il numero di elementi.

- quanti hanno debito in entrambe le materie [R.16]
- quanti hanno almeno un debito [R.20]
- quanti non hanno debito in italiano [R.10]
- quanti non hanno debito in matematica [R.14]

99 Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei

[A] quadrati [B] rombi [C] trapezi [D] triangoli equilateri
[E] poligoni [F] cerchi [G] parallelogrammi

100 Dati gli insiemi $A=\{x/x\in\mathbb{N}, x<10\}$, $B=\{x/x\in\mathbb{N}, 5<x\leqslant 16\}$, $C=\{x/x\in\mathbb{N}, x\geqslant 7\}$ determina

a) $A\cup B\cup C$
b) $A\cap B\cap C$
c) $(A\cup B)\cap C$
d) $(B\cap C)\cup A$

101 Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi

a) A={2, 4, 6, 8, 10}
b) B={1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …}
c) C={3, 4, 5, 6, 7}
d) D={-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5}
e) E={10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}
f) F={1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

102 Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi

a) $A=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\mathrm{n}\}$
b) $B=\{x/x\in\mathbb{N}, x=n^2\}$
c) $C=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\mathrm{n}^2\}$
d) $D=\{x/x\in\mathbb{N}, x=2\mathrm{n}+2\}$
e) $E=\{x/x\in\mathbb{N}, x=n^2-n\}$

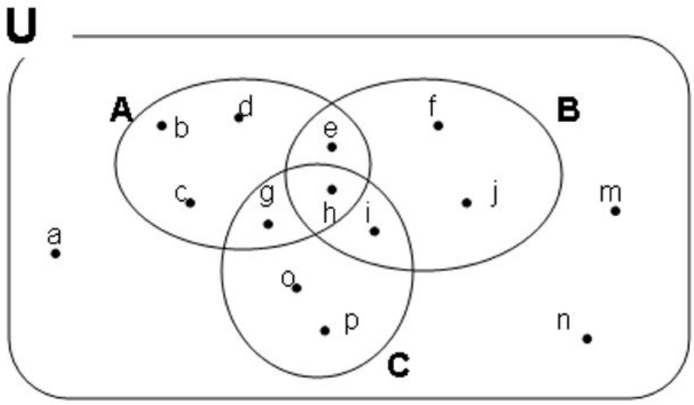
103 Dato *A = {x|x è un numero naturale, x è pari e x > 12}* determina l'insieme complementare di A.

104 A={x/ x è divisore di 12}, B={x / x è divisore di 6}, C={x / x è divisore di 15}, determina

a) $A\cup B$ b) $A\cup C$ c) $A\cup B\cup C$ d) $A\cap B$
e) $B\cap C$ f) $A\cap C$ g) $A\cap B\cap C$ h) $A\cap(B\cup C)$

105 In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

a) $A\cup B$
b) $\overline{A\cup B\cup C}$
c) $A\cap B$
d) $B\cap C$
e) $A\cap B\cap C$
f) $A\cap(B\cup C)$
g) $A\cup(B\cap C)$
h) $B\cap\overline{C}$
i) $(A\cup B)-C$
j) $B\cap\overline{C}$
k) $C-(A\cap B)$
l) $\overline{(A\cup B)}-C$



106 Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

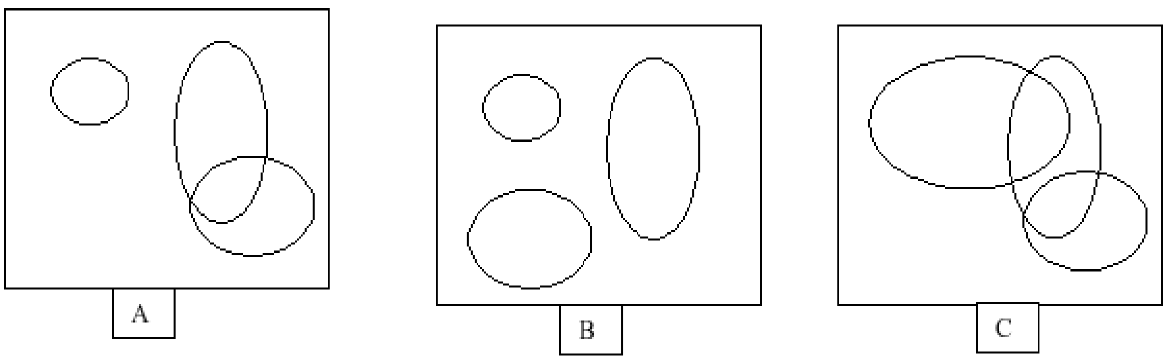
107 Dato l'insieme $U=\{x/x=2n+1, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant n\leqslant 5\}$

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri *A* e *B* di U tali che $A\cap B=\emptyset$;
c) determina $A\cup B$ e *A-B* , dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

108 Il club "Argento vivo" ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

109 In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:
- che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
- iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
- che frequentano il corso di violino sono 46;
- che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? (R:3)
Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?



110 I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano ballato e recitato, 2 ballerini hanno anche cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia? [R: 22]

111 Da un’indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

a) Quante persone bevono una sola bevanda? [R:1048]
b) Quante bevono almeno una bevanda? [R: 1279]
c) Quante sono le persone intervistate? [R: 1350]

112 In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco? [R: 36; 84]

113 In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn , assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

114 In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

115 Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo.
Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni? (*Test di ammissione a architettura 2008*)

[A] 13 [B] 9 [C] 16 [D] 22 [E] 6

116 In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:
(*Test di ammissione a medicina 2008*)

[A] N > 14 [B] N < 14 [C] N > 22 [D]N = 22 [E] $N \geqslant 14$

4. RELAZIONI

► 1. Proposizioni e predicati

In matematica frasi come "19 è maggiore di 5" o "Giove ruota intorno alla Terra" sono considerate proposizioni perché ad esse si può attribuire un preciso valore di verità, cioè si può stabilire se sono vere oppure false: la prima è una proposizione vera, la seconda è falsa.
Non sono proposizioni in senso matematico "Cosa stai studiando?", "domani pioverà!" , "x è un numero primo": infatti la prima non è un'affermazione ma pone una domanda, la seconda è una esclamazione e quindi non possiamo stabilire se è vera o falsa; l'ultima contiene un elemento indeterminato e finché non si fissa il valore da attribuire a x, non si può decidere se la frase che lo riguarda è vera o falsa.
Ogni proposizione è formata da un **predicato** (verbo) e dai suoi **argomenti** (cose o persone alle quali il verbo si riferisce). Analizzando le proposizioni sopra enunciate si ha:

soggetto	predicato	Complemento
19	è maggiore di	5
Giove	ruota attorno alla	Terra

Il soggetto e il complemento sono gli argomenti ai quali il predicato si riferisce.

117 Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce :

Proposizioni	Predicato	Argomenti
a) 7 è divisore di 14	essere divisore di	7 , 14
b) 11 è maggiore di 10	essere maggiore di	..... , ...
c) 5 è numero primo		5
d) Andrea frequenta la stessa palestra di Marco		
e) Marta è moglie di Piero		
f) Paolo è padre di Marco		

In alcune proposizioni il predicato si riferisce a due argomenti (il **soggetto** e il **complemento**) in altre ad un solo argomento: nella proposizione c), il predicato "essere numero primo" stabilisce semplicemente una caratteristica del numero 5 senza porre alcuna connessione con un altro argomento.

DEFINIZIONE. Si dice **predicato binario** un predicato che si riferisce a due argomenti.

► 2. Relazioni in un insieme

Il termine **relazione** entra molto spesso in frasi del linguaggio naturale, lo usiamo per esprimere un generico legame tra due persone o tra due oggetti, anche senza specificarne la natura: "si è conclusa la relazione tra Anna e Paolo", "l'allungamento di una sbarretta di ferro è in relazione con il calore fornito", "la frana del terreno è in relazione con il disboscamento della zona e l'abusivismo edilizio", "domani consegnerò la relazione di fisica". Sono tutte espressioni che ci danno informazioni di un qualche collegamento tra gli argomenti (persone, cose) ai quali il termine relazione si riferisce.
Dal punto di vista matematico diamo la seguente

DEFINIZIONE. Si dice **relazione in un insieme A** un **predicato binario** che lega due elementi dell'insieme.

Esempio

Nell'insieme A = {3,5,6,9,30} è introdotto il predicato binario "essere multiplo di"; con esso formiamo le proposizioni vere scegliendo soggetto e complemento nell'insieme A:

6 è multiplo di 3;	9 è multiplo di 3;	30 è multiplo di 3;	30 è multiplo di 5;
30 è multiplo di 6;	3 è multiplo di 3;	5 è multiplo di 5;	6 è multiplo di 6;
9 è multiplo di 9;	30 è multiplo di 30.		

Il predicato "essere multiplo" genera nell'insieme A una relazione matematica, esso tuttavia non è il solo che permette di collegare tra loro due elementi di quell'insieme.

118 Nell'insieme A = {3,5,6,9,30} considera il predicato "essere minore di"; con questo puoi formare proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di A. Scrivi le proposizioni vere come suggerito nell'esempio:

p1: 9 è minore di 30   p2: ....   p3: ....

p4: ....   p5: ....   p6: …..................

…...

Se chiamiamo con $\Re$ il predicato binario che definisce la relazione introdotta nell'insieme, per indicare sinteticamente che la proposizione avente come soggetto *a*, come complemento *b* ed $\Re$ come predicato, scriviamo $a \Re b$ e diremo sinteticamente che a è in relazione con b.

Esempio 2

Con riferimento all'esempio 1 si ha:

A = {3,5,6,9,30} $\Re$: "essere multiplo di"

allora scriviamo:

per qualunque *a* e *b* appartenenti ad *A*, $a \Re b$ se e solo se *a* è multiplo di *b*

in particolare:

$30 \Re 6$; $9 \Re 3$; $30 \Re 3$; $6 \Re 3$; $30 \Re 5$; $3 \Re 3$; $5 \Re 5$; $6 \Re 6$; $9 \Re 9$; $30 \Re 30$

Abbiamo così formato un insieme di **coppie ordinate** di elementi tra loro in relazione: $30 \Re 5$ può anche essere indicata con (30;5).

DEFINIZIONE. Chiamiamo **insieme della relazione** (in simboli **G**$_R$) l' insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un **sottoinsieme** del prodotto cartesiano dell'insieme A con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo $G_R=\{(a,b)\in A\times A / a \Re b\}$.

119 Nell'insieme A rappresentato con un diagramma di Eulero-Venn introduciamo il predicato $\Re$: "avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

Traccia di soluzione:
per costruire l'insieme **G**$_R$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque *a* e *b* appartenenti ad *A*, $a \Re b$ se e solo se "*a* ha una sola lettera diversa da *b*", ad esempio $\text{prete} \Re \text{prese}$.

Le altre coppie di parole in relazione sono: ……………… ……………… ……………... …............

…………… …………… ……………… ……………… ……………… ……………… …............

…………… …………… ……………… ……………… ……………… ……………… …............

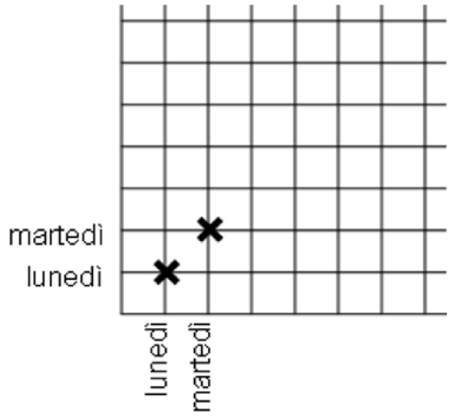
120 Nell'insieme *C*={Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno} è introdotta la relazione $\Re$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

121 Nell'insieme *S*={x / x è il nome di un giorno della settimana}è introdotta la relazione $\Re : x\in S, y\in S, x \Re y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

122 Nell'insieme *F*={1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2} è introdotta la relazione $\Re$ "essere consecutivi". Costruisci l'insieme **G**$_R$.

► 3. Rappresentazioni di una relazione

Grafico di una relazione



123 Considera l'insieme S = {x / x è il nome di un giorno della settimana}, completa la rappresentazione grafica dell'insieme S x S , evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme $\mathbf{G}_R$ determinato dalla relazione “x ha lo stesso numero di sillabe di y”.

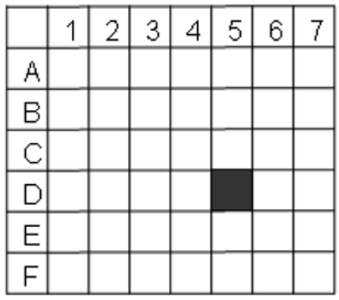
124 Considera l'insieme F={1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2}; fai la rappresentazione grafica dell'insieme F x F e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme $\mathbf{G}_R$ determinato dalla relazione “essere consecutivi”.

Dal momento che una relazione in un insieme Y determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano Y x Y è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano.

Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un grafico cartesiano.

Matrice o tabella di una relazione

Nella figura sottostante è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell'alfabeto), indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia (D,5) indica la cella annerita.



125 Considera nell'insieme A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10} la relazione $\Re : x \in A, y \in A, x \Re y$ se e solo se “x è concorde con y”. Costruiamo una tabella a doppia entrata riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A.

Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

se $a \Re b$

metti 1 nella cella (a,b)

altrimenti

metti 0 nella cella (a,b)

	-1	+3	-7	+5	-2	+4	+10
-1	1						
+3							
-7							
+5			0				
-2							
+4							
+10							

Prosegui tu seguendo l'esempio.

Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\Re$ è completamente rappresentata. La tabella costruita si chiama **matrice della relazione**.

Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

126 Nell'insieme S={x / x è il nome di un giorno della settimana}è introdotta la relazione $\Re : x \in S, y \in S, x \Re y$ se e solo se “x ha lo stesso numero di sillabe di y”. Rappresenta la relazione con una mastrice.

127 Assegnato il predicato $\Re$ “essere divisibile per” introdotto nell'insieme A = {12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60}, rappresenta con una matrice la relazione $\Re$.

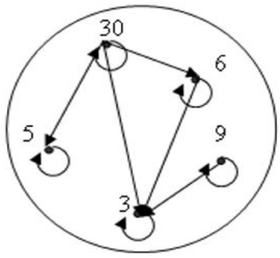
Grafo di una relazione

DEFINIZIONE. Un **grafo** è un insieme di punti detti nodi e di archi che uniscono coppie di punti.

Abbiamo visto che con un predicato si possono formare alcune proposizioni aventi rispettivamente come soggetto e come complemento elementi di un insieme: solo le proposizioni vere determinano la relazione tra gli elementi di quell'insieme e generano coppie di elementi in relazione.

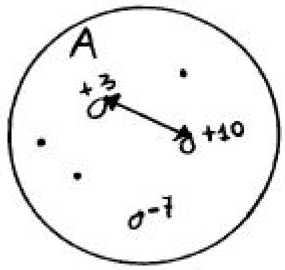
Esempio

Nel diagramma di Eulero-Venn dell'insieme A={3, 5, 6, 9, 30} rappresentiamo la relazione R = “essere multiplo di “ collegando mediante una freccia gli argomenti delle proposizione vere.
Come puoi osservare l'elemento 30 è collegato con una **freccia** all'elemento 6 in quanto la proposizione: "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione: "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo"; infine su ciascun elemento abbiamo messo un **anello o cappio** per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso essendo vera per ogni elemento a dell'insieme A la proposizione: "a è multiplo di a".



128 Completa la rappresentazione con frecce della relazione $\Re : x \in A, y \in A, x \Re y$ se e solo se “x è concorde con y” nell'insieme A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}.

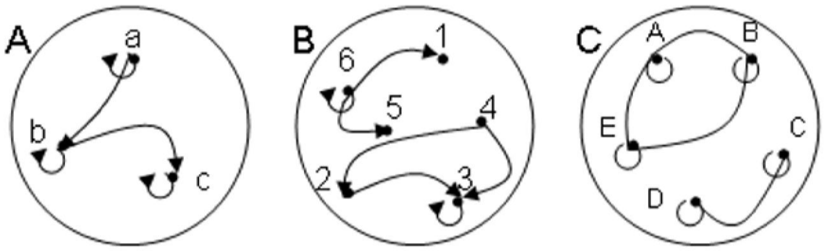
Nel completare il disegno dell'esercizio precedente hai dovuto utilizzare una freccia con due punte, infatti le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Quando si ha questo caso si può omettere la punta della freccia utilizzando un **arco** che collega gli argomenti del predicato.



Una relazione può essere rappresentata attraverso un grafo.

129 Nell’insieme A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} è introdotto il predicato *R*: “essere il doppio “; costruisci l’insieme $\mathbf{G}_R$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo.

130 Sono assegnati i grafi di tre relazioni R_1, R_2, R_3 introdotte in altrettanti insiemi *A, B, C* ; deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci per ciascuna relazione l'insieme $\mathbf{G}_R$



131 Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione *R:* “essere nati nello stesso mese” introdotta nell’insieme *C* degli alunni della tua classe.

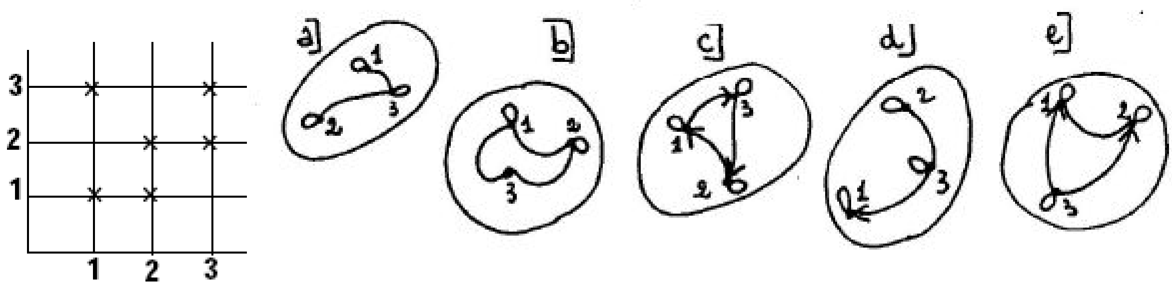
132 Nell’insieme $H = \{x \in \mathbb{N} / 21 < x < 40\}$, $x \Re y$ se e solo se "la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y". Costruisci $\mathbf{G}_R$ e rappresenta la relazione con una matrice.

Scegli la risposta corretta:

133 Una relazione ***R*** introdotta in un insieme A determina:

[A] un sottoinsieme di A [B] l’insieme $A \times A$ [C] un insieme di coppie
[D] un grafico cartesiano [E] un sottoinsieme di $A \times A$

134 La relazione ***R*** rappresentata nel grafico cartesiano, quale grafo ha?



► 4. Formalizzazione di problemi attraverso una relazione

Problema 1

Nella scuola musicale G. Verdi, al termine di ogni anno di corso, si tiene un saggio finale. Nella matrice sottostante è rappresentata la relazione R: "suonare lo stesso strumento" introdotta nell'insieme degli iscritti alla 1° A. Quale proposizione è vera? Perché?

[A] l'alunno b suona lo stesso strumento di f

[B] la classe 1ª A è formata da 36 alunni

[C] gli alunni c,e,d, suonano lo stesso strumento

L'alunno f suona il violino: con quale compagno della classe segue la lezione?

Per quanti strumenti musicali è stato composto il brano musicale che la classe 1°A suonerà al saggio finale?

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	1	1	0
d	0	0	1	1	1	0
e	0	0	1	1	1	0
f	0	0	0	0	0	1

Problema 2

Hai a disposizione alcune tessere come quella di seguito disegnata e due simboli ♥ *e* ♠ *con cui puoi riempire le sue caselle.*

1) Quante tessere diverse puoi realizzare?

2) Si vuole colorare in modo diverso le tessere che hanno il carattere posto al centro uguale; quanti colori occorrono?

Traccia della soluzione

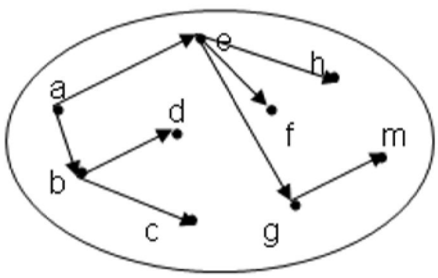
Comincia a formare le tessere disegnando nelle caselle i due simboli stabiliti come nell'esempio

♥	♠	♥
♠	♠	♥

Considera l'insieme delle tessere disegnate e rappresenta con il grafo sagittale la relazione *R*: "avere il carattere centrale uguale". Possiamo colorare dello stesso colore le tessere che non sono tra loro in relazione. Occorrono quindi … … colori.

Problema 3

Il grafo sagittale rappresenta la relazione R: "essere padre" che sussiste tra i componenti maschi della famiglia Rossi. Chi sono i fratelli? chi è figlio unico? a *è il nonno di chi?* m *quanti zii ha?*

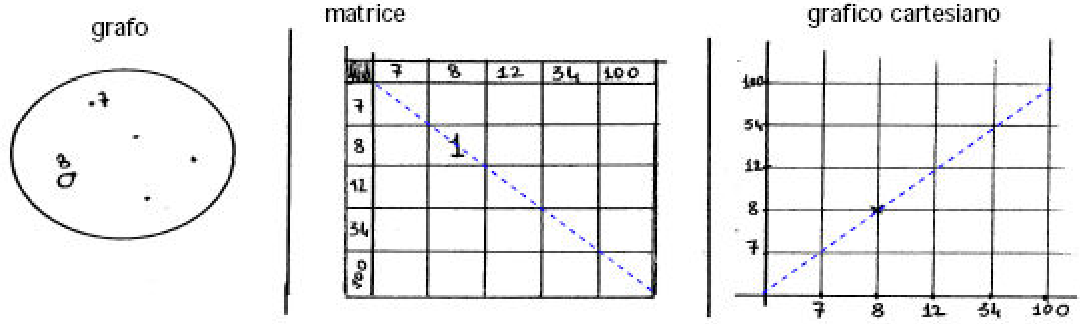


► 5. Proprietà di una relazione

Proprietà riflessiva

Esempio 4

Nell'insieme T = {7, 8, 12, 34, 100} è introdotta la relazione R: " essere divisore".
Completa le tre rappresentazioni:



Su ogni elemento del diagramma di Venn hai dovuto mettere il cappio poiché ogni elemento dell'insieme è divisore di se stesso.
Nelle caselle della matrice che costituiscono la diagonale discendente compaiono degli 1 e nel grafico cartesiano ci sono evidenziati gli incroci sulla diagonale ascendente dello schema.

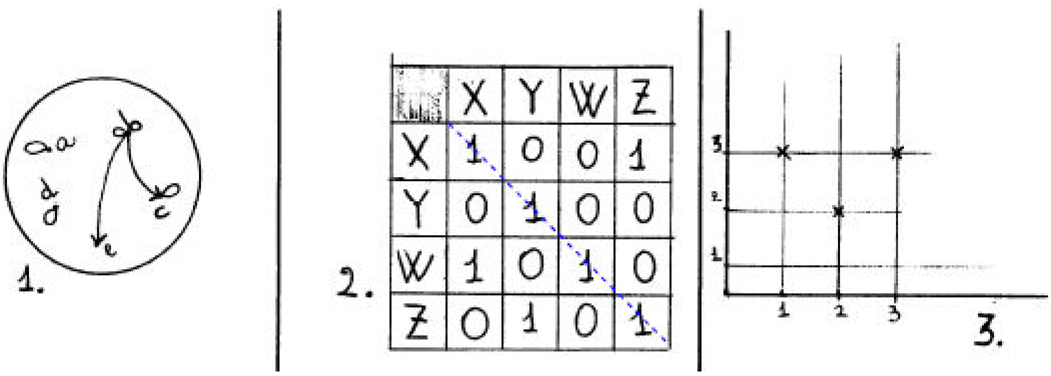
DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ in un insieme A gode della **proprietà riflessiva** quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia **per qualunque x dell'insieme A si ha** $x \Re x$.

135 Indica quale tra le seguenti relazioni è riflessiva

Insieme	relazione	è riflessiva?	
Numeri naturali	essere divisibile	[SI]	[NO]
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolari	[SI]	[NO]
Poligoni	avere lo stesso numero di lati	[SI]	[NO]
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	[SI]	[NO]

Osserva che nell'insieme N dei numeri naturali la relazione "essere divisibile" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

136 Quale delle seguenti relazioni è riflessiva?

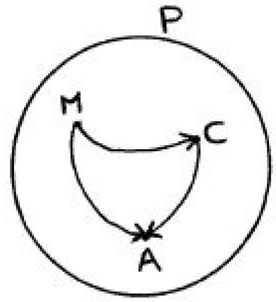


Il caso 1 non rappresenta una relazione riflessiva in quanto il grafo mette in evidenza che non tutti gli elementi sono in relazione con se stessi; così il grafico cartesiano del caso 3 ci permette di concludere che la relazione tra gli elementi dell'insieme {1,2,3} non gode della proprietà riflessiva in quanto non è stata evidenziata la coppia (1;1). Il caso 2, invece, ci segnala la proprietà riflessiva della relazione attraverso la presenza degli uno nella diagonale discendente della matrice.

Proprietà antiriflessiva

Esempio 5

E' dato il grafo della relazione *R*: " essere più alto", introdotta nell'insieme delle persone P = {Marco, Antonio, Carlo}; rappresenta la relazione con la matrice e col grafico cartesiano.

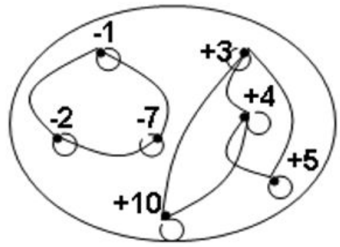


Nel grafo non si può mettere il cappio su alcun elemento dell'insieme, nella diagonale discendente della matrice non hai messo alcun 1, sulla diagonale del grafico cartesiano non compare alcuna crocetta.

La proposizione "x è più alto di x" è sempre falsa qualunque sia l'elemento considerato nell'insieme.

DEFINIZIONE. Una relazione *R* in un insieme *A* gode della **proprietà antiriflessiva** quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia **per nessun elemento *x* di *A* si ha** $x \Re x$.

Proprietà simmetrica



Esempio 6

Nel grafo è rappresentata la relazione *R*: "essere concorde" nell'insieme dei numeri A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}; per collegare elementi in relazione abbiamo usato archi poiché, ad esempio, le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere.

DEFINIZIONE. Una relazione *R* introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà simmetrica** quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e predicato; ossia **per qualunque *x* e *y* appartenenti all'insieme *A* si ha** $x \Re y$ **e** $y \Re x$ **.**

137 Riprendi la matrice e costruisci il grafico cartesiano della relazione *R*: "essere concorde" nell'insieme dei numeri A = {-1,+3,-7,+5,-2,+4,+10}.

Cosa noti nella matrice?

Come sono disposte le crocette nel grafico cartesiano?

Avrai notato che tracciando la diagonale discendente nella matrice, essa viene divisa in due parti identiche: piegando la matrice lungo la diagonale medesima ogni casella contenente 0 (zero) si sovrappone ad una casella contenente 0 ed una casella contenente 1 (uno) va a ricoprirne una casella occupata da un 1. Diremo quindi che gli 1 e gli 0 sono disposti in modo simmetrico rispetto alla diagonale discendente. In modo analogo, nel grafico cartesiano: i punti che indicano elementi in relazione sono disposti simmetricamente rispetto alla diagonale del grafico.

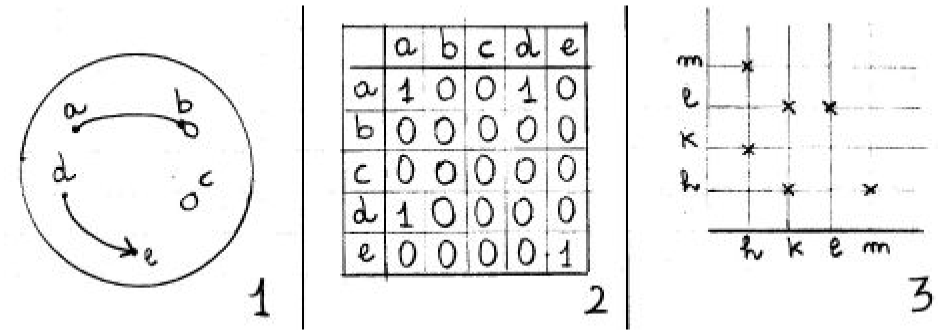
138 Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	relazione	è simmetrica?	
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	[SI]	[NO]
Rette del piano	essere perpendicolari	[SI]	[NO]
Solidi	avere lo stesso volume	[SI]	[NO]
Fiumi d'Europa	essere affluente	[SI]	[NO]
Numeri interi	essere il quadrato di	[SI]	[NO]

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "La Mosella è un affluente del Reno" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il predicato;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio +25 è il quadrato di +5), non è vero che +5 è il quadrato di +25.

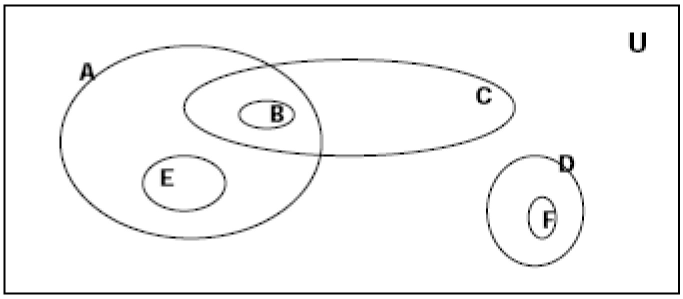
139 Quale delle seguenti relazioni è simmetrica? [1] [2] [3]



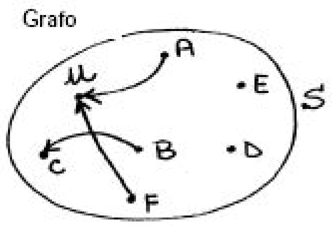
Proprietà antisimmetrica

Esempio

Il diagramma di Venn in figura rappresenta un insieme U e alcuni suoi sottoinsiemi.



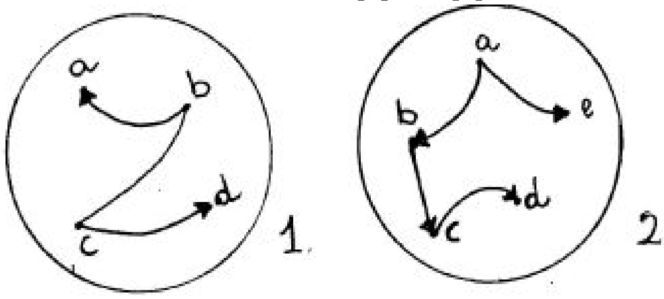
Consideriamo ora l'insieme di insiemi S = {U, A, B, C, D, E, F} e la relazione *R*: "essere sottoinsieme proprio di"; completa il grafo della relazione:



Certamente nel completare il grafo non avrai usato archi: è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà antisimmetrica** quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia **per qualunque *x* e *y* dell'insieme *A* se** $x \neq y$ **e** $x \Re y$ **non è vero che** $y \Re x$ **.**

140 Quale delle seguenti relazioni è antisimmetrica? [1] [2]

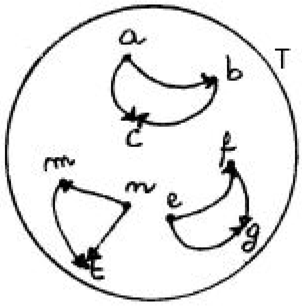


Il grafo 1 indica che la relazione non è antisimmetrica poiché, pur essendo b≠c si ha bRc e cRb (i due elementi b e c sono collegati da un arco); le proposizioni vere che si possono formare dall'analisi del grafo 2 non rimangono vere se si scambia il soggetto con il complemento (nel grafo gli elementi sono collegati solo con frecce): in esso è pertanto rappresentata una relazione antisimmetrica.

Proprietà transitiva

Esempio

Nel grafo sottostante è rappresentata una relazione ***R*** introdotta in un insieme T:



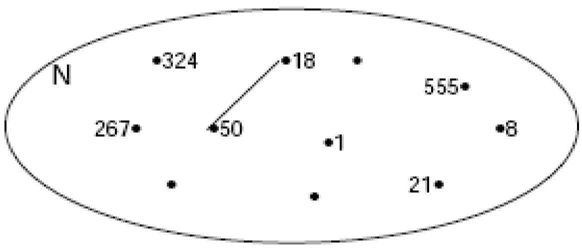
Dall'analisi della situazione rappresentata possiamo affermare che dalla verità di (a*R*b **e** b*R*c) segue la verità di a*R*c.
Analizzando gli altri elementi e la relazione *R*, possiamo osservare che essendo vera (e*R*f **e** f*R*g) è vera anche e*R*g; inoltre si ha che essendo vera (n*R*m **e** m*R*t) è vera anche n*R*t.

DEFINIZIONE. Una relazione $\Re$ introdotta in un insieme *A* gode della **proprietà transitiva** quando se $a \Re b$ e $b \Re c$ allora risulta anche $a \Re c$, con a, b, c elementi qualsiasi dell'insieme *A*.

Dal grafo di una relazione transitiva puoi osservare che le terne di elementi in relazione costituiscono i vertici di un triangolo; non è facile invece individuare la proprietà transitiva dalle altre rappresentazioni grafiche.

141 Verifica se, nell'insieme *N* dei numeri naturali, la relazione *R*: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva.

Osserva che non è possibile rappresentare completamente il grafo della relazione; tuttavia, in un diagramma di Eulero-Venn, segniamo alcuni numeri naturali che ci aiutino a raggiungere l'obiettivo:



Completa il grafo e le proposizioni:

da	18 *R* 50	e	50 *R* …	segue	… *R* ...
da	… *R* 555	e	... *R* 267	segue	… *R* ...

Presi tre numeri naturali x, y, z, se x ha lo stesso numero di cifre di y e y ha lo stesso numero di cifre di z è sempre vera la proposizione "x ha lo stesso numero di cifre di z"? ………
Puoi concludere che la relazione assegnata gode della proprietà transitiva? ……………

142 Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	relazione	è transitiva?
numeri naturali	essere multiplo	[SI] [NO]
regioni d'Italia	essere più a nord	[SI] [NO]
numeri interi	essere minore	[SI] [NO]
rette del piano	essere perpendicolari	[SI] [NO]
persone	essere padre di	[SI] [NO]
stati d'Europa	confinare con	[SI] [NO]

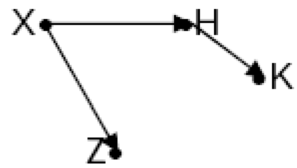
143 Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H=\{x\in\mathbb{N}/0\leqslant x\leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	0:4	1:4	2:4										12:4
resto	0	1											0

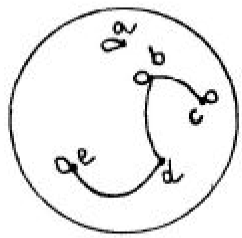
Introduciamo in H la relazione $x\Re y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\Re$ introdotta nell'insieme dei numeri naturali N è una relazione transitiva?

144 Completa il grafo in modo che la relazione rappresentata diventi transitiva:



145 La relazione R, di cui è assegnato il grafo, è:
[A] non riflessiva e transitiva [B] simmetrica e riflessiva
[C] transitiva [D] simmetrica e non riflessiva [E] solo riflessiva

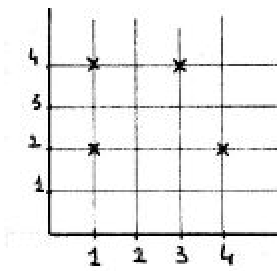


146 Quale proposizione è falsa?
[A] se una relazione è simmetrica, all'insieme $\mathbf{G}_R$ appartengono le coppie del tipo (a,b) e (b,a).
[B] il grafico cartesiano è un modo per rappresentare una relazione.
[C] la matrice di una relazione riflessiva presenta tutti uno sulla diagonale discendente.
[D] la matrice di una relazione antiriflessiva non presenta alcun uno sulla diagonale discendente.
[E] se una relazione è transitiva, allora è anche simmetrica.

147 Nell'insieme dei numeri naturali N quale delle seguenti relazioni è riflessiva?
[A] avere lo stesso numero di cifre [B] essere primo con [C] essere minore di
[D] essere divisibile [E] essere divisore

148 La relazione *R*:"essere multiplo" introdotta nell'insieme $A=\{x\in\mathbb{N}\,1\leqslant x\leqslant 5\}$ è:
[A] riflessiva e transitiva [B] solo riflessiva [C] simmetrica e transitiva
[D] riflessiva, simmetrica, transitiva [E] solo transitiva

149 Relativamente a una qualsiasi relazione *R*, quale proposizione è falsa?
[A] se $(x,y)\in G_R$ e $(y,z)\in G_R$ qualche volta si ha $(x,z)\in G_R$
[B] se $(x,y)\in G_R$ si ha sempre $(y,x)\in G_R$
[C] una relazione riflessiva presenta nel suo grafo il cappio su ciascun elemento
[D] una relazione binaria è individuata da un predicato che lega due argomenti dell'insieme A
[E] una relazione binaria genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A\times A$

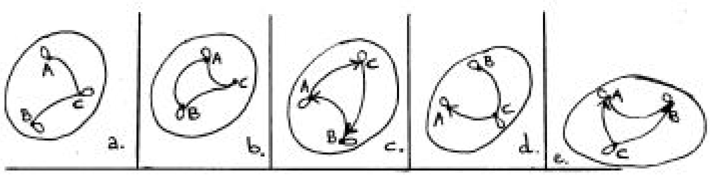


150 Con riferimento al grafico cartesiano disegnato di lato, quale proposizione è vera?
[A] nel suo grafo almeno un elemento non presenta il cappio
[B] la relazione è antisimmetrica
[C] la relazione è transitiva
[D] l'insieme G_R è costituito dalle coppie (1,2) (1,4) (3,4) (4,2)
[E] la relazione gode della proprietà simmetrica e riflessiva

151 La relazione *R*: "avere lo stesso numero di lati", introdotta nell'insieme dei poligoni del piano è
[A] solo riflessiva
[B] riflessiva, simmetrica e transitiva
[C] antisimmetrica
[D] non gode di nessuna proprietà
[E] non può essere considerata una relazione

152 Quale grafo a destra equivale alla matrice della relazione rappresentata a sinistra?

	A	B	C
A	1	0	1
B	1	1	0
C	0	1	1



[a.] [b.] [c.] [d.] [e.]

► 6. Relazioni di equivalenza

Esempio

Completa la tabella segnando le proprietà di cui gode ciascuna relazione indicata (Ri= riflessiva, Si=simmetrica, Tr=transitiva).

	relazione	insieme	
a)	Avere lo stesso perimetro	poligoni	[Ri] [Si] [Tr]
b)	Essere fratello di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
c)	Essere figlio di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
d)	Essere più alto di	persone	[Ri] [Si] [Tr]
e)	Avere gli angoli rispettivamente congruenti	triangoli	[Ri] [Si] [Tr]
f)	Iniziare con la stessa lettera	parole	[Ri] [Si] [Tr]
g)	Giocare nella stessa squadra	calciatori	[Ri] [Si] [Tr]
h)	$(a, b)\Re(x, y)$ se e solo se a+b=x+y	N x N	[Ri] [Si] [Tr]

Svolgimento

La relazione a) gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti

- "il poligono p ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (proprietà Riflessiva);
- "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro del poligono p_2" implica la verità della proposizione "il poligono p_2 ha lo stesso perimetro di p_1", qualunque siano i due poligoni p_1 e p_2 (proprietà Simmetrica);
- se "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro di p_2" e "p_2 ha lo stesso perimetro di p_3" allora si ha anche che "p_1 ha lo stesso perimetro di p_3", qualunque siano i poligoni p_1, p_2, p_3 (proprietà Transitiva).

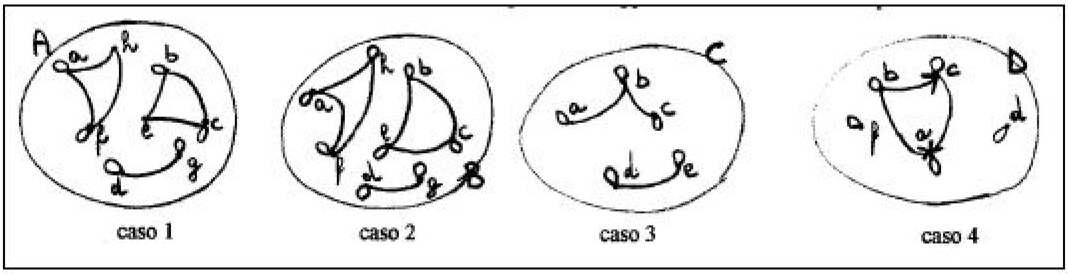
Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà **R**iflessiva, **S**immetrica, **T**ransitiva, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

DEFINIZIONE. Chiamiamo **relazione d'equivalenza** la relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

153 Completa la tabella seguente dopo aver riesaminato le relazioni considerate nelle varie attività che hai affrontato:

	relazione	insieme	è d'equivalenza?	
a)	essere multiplo	numeri naturali	[SI]	[NO]
b)	avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	[SI]	[NO]
c)	essere minore	interi relativi	[SI]	[NO]
d)	vincere	squadre di calcio	[SI]	[NO]
e)	avere lo stesso numero di angoli	poligoni	[SI]	[NO]
f)	essere il plurale	parole italiane	[SI]	[NO]
g)	essere il cubo	numeri italiani	[SI]	[NO]

154 Analizza i seguenti grafi e individua quello che rappresenta una relazione d'equivalenza:



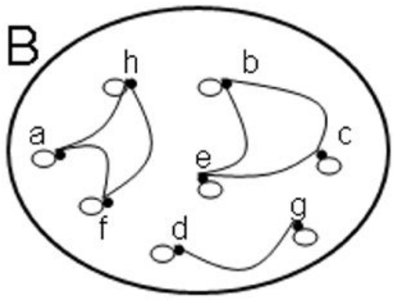
Traccia di soluzione:
Completa le proposizioni:

- Nel caso 1 non è rappresentata una relazione d'equivalenza perché ....
- Nel caso 2 la presenza del cappio su ciascun elemento indica che la relazione gode della proprietà ...., il fatto che coppie di elementi siano collegate da archi indica che vale la proprietà ...., infine terne di elementi sono vertici di .... e quindi la relazione gode della proprietà .... In conclusione ....
- La relazione del caso 3 non gode della proprietà ………………………. pertanto ....
- Nel caso 4 sussistono le proprietà .... e ...., ma non la proprietà .... ……............ pertanto la relazione ....

<u>Esempio</u>

Dato l'insieme B = {a, b, c, d, e, f, g, h} costruiamo alcuni suoi sottoinsiemi seguendo le istruzioni:

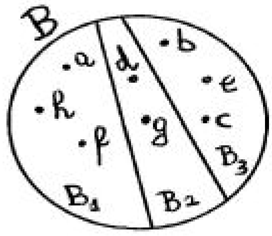
ripeti
scegliamo a caso un elemento di B;
formiamo un sottoinsieme contenente l'elemento scelto e tutti gli altri che con quello sono in relazione;
finché *non abbiamo esaurito tutti gli elementi.*



<u>Svolgimento</u>

- Scegliamo l'elemento *a*, formiamo il sottoinsieme avente come elementi *a*, *h*, *f* che con a sono in relazione: $B_1 = \{a, h, f\}$.

Gli elementi dell'insieme B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.



- Scegliamo *g* e formiamo il sottoinsieme B_2 avente come elementi *g* e *d*, l'unico che con esso è in relazione: $B_2 = \{g, d\}$.
  Gli elementi dell'insieme *B* non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti.
- Scegliamo *c* e formiamo il sottoinsieme B_3 avente come elementi *c, e, b* che con esso sono in relazione: $B_3 = \{c, e, b\}$.

Abbiamo esaurito gli elementi dell'insieme assegnato.

Abbiamo così ottenuto tre sottoinsiemi dell'insieme B, che hanno queste particolari caratteristiche

- nessuno è vuoto,
- a due a due sono disgiunti,
- la loro unione è l'insieme B.

Premettiamo le definizioni:

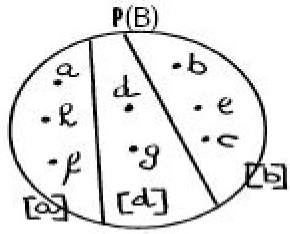
DEFINIZIONE. Determinare una **partizione di un insieme X** significa suddividere l'insieme stesso in un numero finito di sottoinsiemi X_1, X_2, X_3, ……… X_n , detti **classi**, tali che

1) nessun sottoinsieme è vuoto,
2) a due a due sono disgiunti,
3) la loro unione è l'insieme X.

La partizione di X è l'insieme i cui elementi sono le classi X_1, X_2, X_3, ……… X_n , e viene indicato con $P(X) = \{X_1, X_2, X_3, \ldots\ X_n\}$.

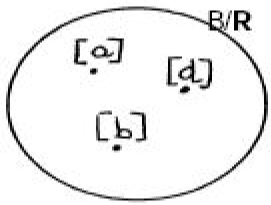
DEFINIZIONE. Quando in un insieme *A* è stata introdotta una relazione d'equivalenza, si chiama **classe d'equivalenza** ogni sottoinsieme di *A* contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione. Si viene così a determinare **una partizione dell'insieme *A* in classi d'equivalenza** ciascuna indicata racchiudendo in parentesi quadrate un suo qualunque elemento.

Nell'esempio sopra riportato le classi d'equivalenza sono i sottoinsiemi di B indicati con [a] , [b] , [c] ; la partizione dell'insieme *B* in classi d'equivalenza è rappresentata con il diagramma di Eulero-Venn a fianco disegnato.



DEFINIZIONE. Si chiama **insieme quoziente** di un insieme *A* rispetto a una relazione di equivalenza *R*, l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione *R*. L'insieme quoziente si indica con il simbolo *A/R*.

Nel caso dell'esempio 10 si passa all'insieme quoziente B/*R*, rappresentato col seguente diagramma di Eulero-Venn:



Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza R in un insieme A, possiamo stabilire la seguente catena di passaggi :

insieme A → partizione P(A) → insieme quoziente A/R

155 Fissa l'attenzione sulla relazione *R*:" frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme *S* degli alunni iscritti nella tua scuola.
Verifica che *R* è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potuto formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente?Determina la partizione **P**(S) in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente *S/R* .

156 Considera i tre simboli: £, $, %; dopo aver formato tutte le possibili tessere di tre caselle segnate con quei simboli, senza ripetizioni, introduci nell'insieme *T* delle tessere ottenute la relazione *R*: "avere uguale il primo simbolo di sinistra"; verifica se è una relazione d'equivalenza; costruisci la partizione di **P**(T) in classi d'equivalenza e forma l'insieme quoziente *T/R*.
Traccia di soluzione
Alcune tessere dell'insieme T sono:

£	$	%
%	$	£

Ecc.

157 Studia in *N* la relazione *R*: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:
- Quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- Da quanti elementi è costituito l'insieme *N/R*?
- Qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

158 Considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme N e studiane le proprietà.
- E' una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente *N/R*.
- Quante classi d'equivalenza hai formato?
- Puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- Giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in N dell'insieme dei numeri dispari"?

159 Considera l'insieme $A=\{x\in\mathbb{N}/1\leqslant x\leqslant 20\}$ e i suoi sottoinsiemi

$A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$; $A_2 = \{2, 6,10, 14, 18\}$; $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$; $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
1. Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn.
2. Si può affermare che quei sottoinsiemi determinano una partizione dell'insieme A?
3. È vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
4. Quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

160 Nell'insieme *N* dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione *R*: "x *R* y se e solo se x ha le stesse cifre di y".

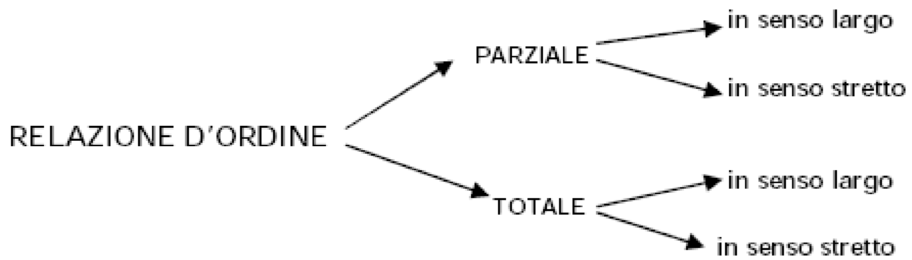
161 Nell'insieme *C* degli alunni della tua classe verifica se la relazione *R*: "x *R* y se e solo se il cognome di *x* ha la stessa lettera iniziale del cognome di *y*" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme *C* e l'insieme quoziente C/*R*.

►7. Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come "devo mettere in ordine i miei libri" oppure "qui non c'è ordine" e altre espressioni simili.
Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell'insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

DEFINIZIONE. Una relazione $\mathfrak{R}$, introdotta in un insieme *A*, si chiama **relazione d'ordine** se è antisimmetrica e transitiva.

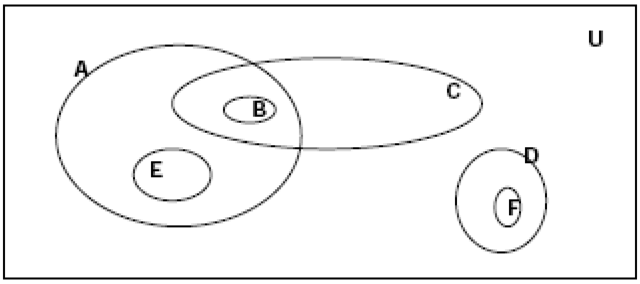
Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d'ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:



Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi; a questo scopo introduciamo la

DEFINIZIONE. Data una relazione $\mathfrak{R}$ d'ordine in un insieme *A*, **due elementi distinti** *x* e *y* sono **confrontabili** se rispetto ad $\mathfrak{R}$ se si ha $x\mathfrak{R}y$ oppure $y\mathfrak{R}x$.

Esempio
In base al diagramma il diagramma di Eulero-Venn di seguito riportato introduciamo nell'insieme S = {U, A, B, C, D, E, F}la relazione *R*: "essere sottoinsieme di".

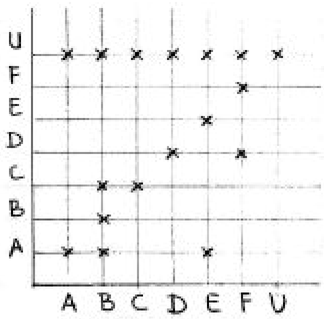


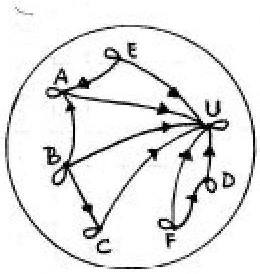
Ricordiamo che, dati due insiemi *X* e *Y*, *X* è sottoinsieme di *Y* quando ogni elemento di *X* appartiene a *Y* ; in simboli $X \subseteq Y$ e si legge X è contenuto in Y o X è uguale a Y.
Vogliamo studiare le proprietà della relazione *R*.

1. Poiché ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, possiamo dire che *R* è riflessiva.
2. Se $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$ allora $Y \not\subset X$; allora *R* è una relazione antisimmetrica.
3. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$; allora *R* è una relazione transitiva.

Per il nostro esempio la relazione è così rappresentabile:

	A	B	C	D	E	F	U
A	1	0	0	0	0	0	1
B	1	1	1	0	0	0	1
C	0	0	1	0	0	0	1
D	0	0	0	1	0	0	1
E	1	0	0	0	1	0	1
F	0	0	0	1	0	1	1
U	0	0	0	0	0	0	1





Da ogni rappresentazione si evidenziano le proprietà suddette. Inoltre si mette chiaramente in evidenza che esistono almeno due elementi dell'insieme S che non sono in alcun modo in relazione: ad esempio $A \not\subset D$ e $D \not\subset A$, ossia A e D non sono confrontabili.
Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine parziale (si dice parziale perché almeno due elementi non sono confrontabili), **in senso largo** (perché la relazione gode anche della proprietà riflessiva).

162 Riprendiamo il diagramma di Eulero-Venn dell'esempio precedente e introduciamo nell'insieme S = {U, A, B, C, D, E, F}la relazione *R*: "essere sottoinsieme proprio di". Studiamo le proprietà di questa relazione.
Rappresenta la relazione con la matrice:

	A	B	C	D	E	F	U
A							
B							
C							
D							
E							
F							
U							

Cosa è cambiato rispetto alla relazione precedente?

… … … … … … … … … … … … …

Sono ancora valide le proprietà antisimmetrica e transitiva?

… … … … … … … … … … … … …

Esistono elementi di S non confrontabili?

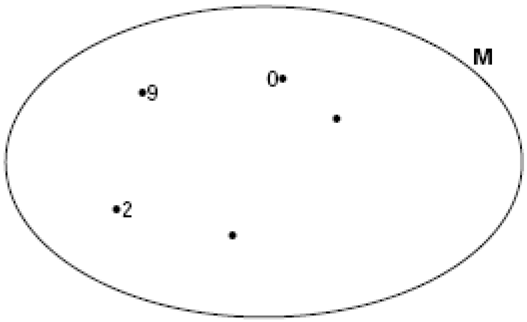
… … … … … … … … … … … … ...

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine parziale (esistono almeno due elementi che non sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva**).**

RELAZIONE D'ORDINE
proprietà
antisimmetrica
transitiva
→
PARZIALE
Esistono almeno due elementi non confrontabili
→ in senso largo: proprietà riflessiva
→ in senso stretto: proprietà antiriflessiva

163 Nell’insieme M = {1,8,3,4,10,2,7,0,5,9,6} viene introdotta la relazione *R* così definita: “x*R*y se e solo se y –x appartiene a N”.
Costruisci il grafo della relazione, completando il diagramma di Eulero-Venn
e la matrice della relazione:

Guardando le rappresentazioni, rispondi alle domande:



	1	8	3	4					5		6
1		1									
8											
7		1	0								
0				1							

La relazione è riflessiva?

La relazione è antisimmetrica?

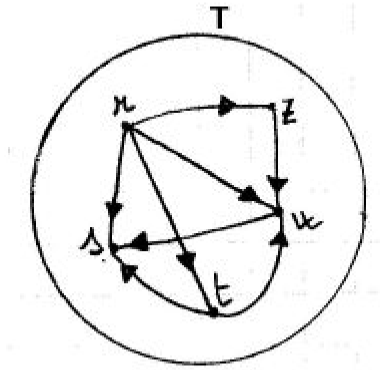
La relazione è transitiva?

È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

Una relazione di questo tipo si dice relazione d’ordine totale (due qualsiasi elementi si possono mettere in relazione, cioè sono confrontabili), **in senso largo** (la relazione gode della proprietà riflessiva)**.**

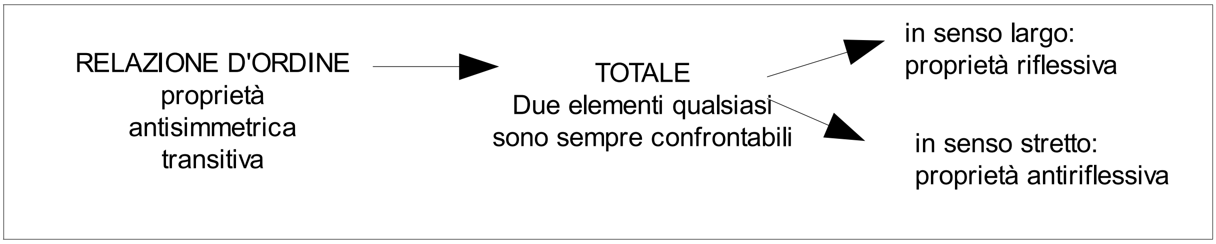
164 E' assegnata la relazione *R* nell’insieme *T*, rappresentata col grafo.
Analizzando il grafo, rispondi alle domande:

- La relazione è riflessiva? … …
- La relazione è antisimmetrica? … …
- La relazione è transitiva? … ….
- Due elementi distinti sono sempre confrontabili? … …

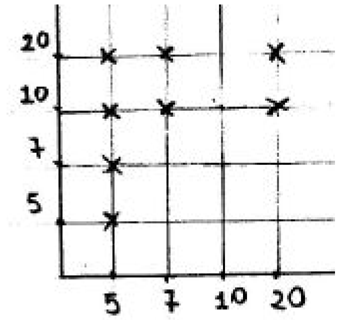


Alla prima domanda avrai risposto negativamente: nessun elemento dell’insieme *T* è in relazione con se stesso, mentre valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva; infine scelti due elementi qualsiasi dell’insieme *T*, essi sono sempre confrontabili.

Una relazione di questo tipo si dice relazione d'ordine totale (due qualsiasi elementi sono confrontabili), **in senso stretto** (la relazione gode della proprietà antiriflessiva)**.**



165 Verifica che la relazione *R*: "essere divisore" introdotta nell'insieme $J = \{3, 6, 10, 15, 21\}$ è una relazione d'ordine parziale in senso largo.



166 Perché la relazione *R* assegnata con il grafico cartesiano riportato a lato, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.

167 Nell'insieme $S = \{£, \$, \&, !, ?\}$ è definita una relazione *R* il cui Insieme Grafo è :

$G_R = \{(£, £) ; (\$, \$) ; (\&, \&) ; (?, ?) ; (!, !) ; (£, \&) ; (\$, \&) ; (!, ?)\}$

R è una relazione d'ordine? Di quale tipo?

168 Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione *R*: "x*R*y se e solo se l'altezza di *x* non supera l'altezza di *y*". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

169 Nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ la relazione *R*: "essere divisibile"

[A] non è una relazione d'ordine

[B] è antiriflessiva

[C] è d'ordine totale

[D] è d'ordine parziale in senso largo

[E] è d'ordine parziale in senso stretto

170 Nell'insieme $N-\{0\}$ la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

171 Nell'insieme $M=\{a,b,c,m,n,h\}$ la relazione di cui è assegnato il grafo è:

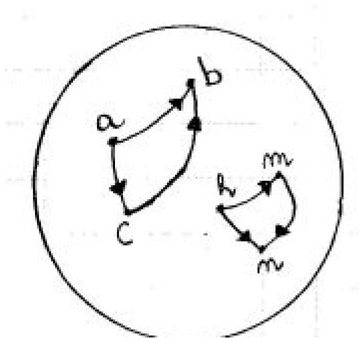
[A] d'equivalenza

[B] non transitiva

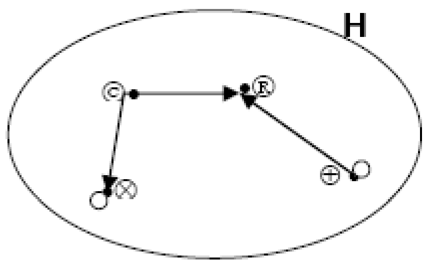
[C] d'ordine parziale in senso stretto

[D] d'ordine totale in senso stretto

[E] d'ordine totale in senso largo



172 Rappresenta nelle tre modalità studiate una relazione che sia solo simmetrica; ripeti le rappresentazioni per una relazione che sia almeno simmetrica. Quale significato hanno le due richieste formulate sopra?



173 Nell'insieme H = {®, ©, ⊗, ⊕ }è introdotta la relazione ***R*** di cui è rappresentato il grafo.
Determina l'insieme $\mathbf{G}_R$ Grafo della Relazione; costruisci il grafico cartesiano e la matrice.

174 L'insieme $\mathbf{G}_R$ di una relazione introdotta nell'insieme A = {a, b, c, d, e} è $\mathbf{G}_R$ = {(a,a) ; (a,b) ; (b,b) ; (d,d) ; (c,d) ; (d,e) ; (e,e) }; quale delle seguenti affermazioni è vera

[A] *R* è una relazione antiriflessiva
[B] *R* è una relazione solo antisimmetrica
[C] *R* è una relazione riflessiva
[D] *R* è una relazione transitiva e antisimmetrica

175 Verifica se la relazione *R* assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza, in caso positivo determina la partizione dell'insieme *A* = {□, ◊, ∞,∇} e l'insieme quoziente *A/R*.

	□	◊	∞	∇
□	1	1	0	0
◊	1	1	0	0
∞	0	0	1	1
∇	0	0	1	1

176 La relazione *R* : "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

177 I tre sottoinsiemi A_1 = { 36, 135, 432}; A_2 = {65}; A_3 = {66, 3522, 93, 435} dell'insieme A = {36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3522 }costituiscono una partizione dell'insieme A? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? A_1, A_2, A_3 sono classi d'equivalenza?

178 Nell'insieme *N* la relazione *R*: " x *R* y se e solo se $x \cdot y$ è un numero dispari" è d'equivalenza?

179 La relazione *R* : "x *R* y se e solo se x sta nella stessa nazione di y" nell'insieme

K = {Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granata, Venezia, Lione}

è d'equivalenza? Costruisci *A/R*.

180 In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- I° giorno: A vince contro B; C vince contro D
- II° giorno: D vince contro A; B vince contro C
- III° giorno: A vince contro C; B vince contro D

Il quarto giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due.

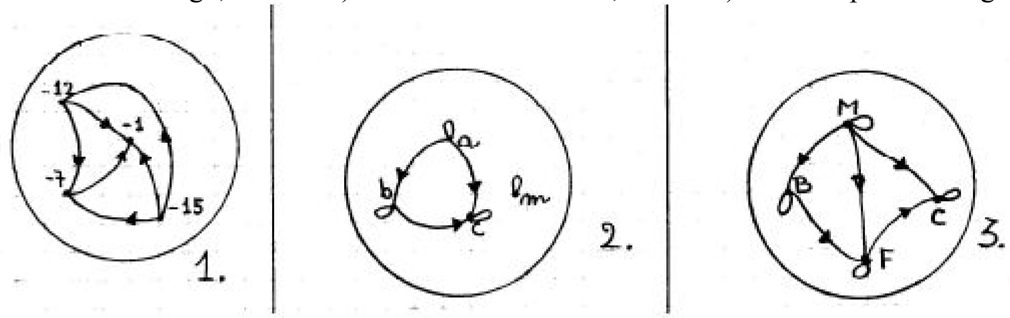
Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B?

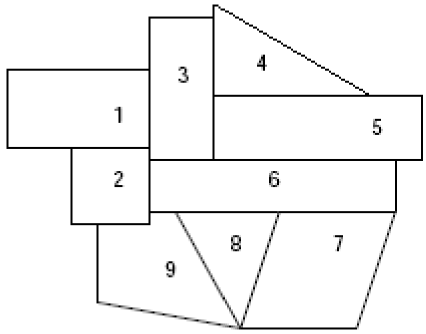
Il torneo è vinto dalla squadra C.

Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

181 Associa a ciascun grafo la corretta relazione d'ordine:

a) d'ordine totale largo; b) d'ordine totale stretto; c) d'ordine parziale largo





182 Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare questo modello, in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore.
Come si può risolvere il problema?

<u>Traccia di soluzione:</u>
Nell'insieme Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} studia la relazione R: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. [Risposta: 3]
La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.

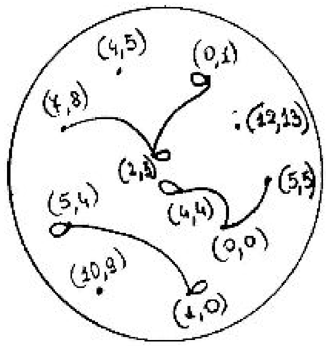
183 Nell'insieme di tutti gli iscritti a FaceBook determina le proprietà della relazione R: "x *R* y se e solo se il numero di amici di x supera il numero di amici di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

► 8. Particolari relazioni d'equivalenza

La costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

" Dio fece i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo."
Leopold Kronecker (Liegnitz 1823, Berlino 1891)

<u>Esempio</u>
Preso l'insieme A = {(4,5), (7,8), (0,1), (2,3), (5,4), (12,13), (10,9), (5,5), (1,0), (4,4), (0,0)}, sottoinsieme del prodotto cartesiano NxN, considera in A la relazione *R* così definita:
"(m,n) *R* (p,q) se e solo se la somma di m con q è uguale alla somma di n con p"
in linguaggio matematico: (m,n) *R* (p,q) se e solo se m+q = n+p



- Completa il suo grafo e deduci le proprietà:
- Costruisci e rappresenta con diagrammi di Eulero-Venn la partizione P(A) dell'insieme A e l'insieme quoziente A/*R*.
- Quante classi d'equivalenza hai ottenuto?
- È vero che ciascuna di esse può essere rappresentata da una coppia avente almeno un elemento nullo?
- Scrivi i rappresentanti delle classi d'equivalenza.

Proviamo ora a generalizzare quanto ottenuto.
Nel prodotto cartesiano NxN consideriamo la relazione *R* definita nell'attività precedente; essendo NxN formato da infiniti elementi non possiamo rappresentare il grafo della relazione, ma possiamo comunque studiarne le proprietà per stabilire se anche in questo insieme si mantengono le conclusioni raggiunte nell'esercizio.

- La relazione è riflessiva: per qualunque coppia (m,n) di NxN si ha (m,n) *R* (m,n).

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza m+n = n+m, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché l'addizione in N gode della proprietà commutativa.
Con riferimento all'attività precedente hai potuto infatti mettere il cappio sopra ogni coppia: ad esempio è vero che (4,5) *R* (4,5) poiché 4+5 = 5+4.

- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) appartenenti a NxN, se (m,n)*R*(p,q) allora (p,q)*R*(m,n).

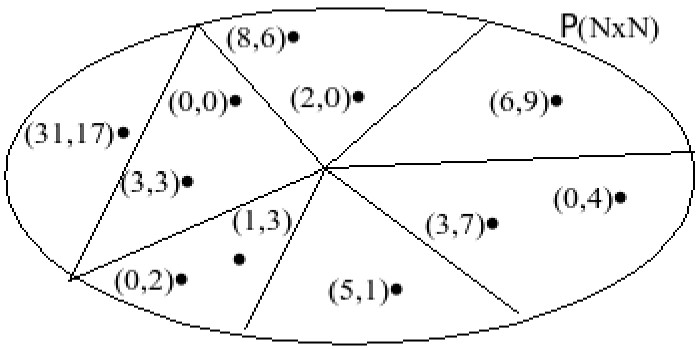
Infatti se (m,n)*R*(p,q) si ha m+q = n+p; per la proprietà commutativa dell'addizione in N si ha anche p+n = q+m, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).
Nell'esercizio precedente, ad esempio, la coppia (5,4) è in relazione con la coppia (10,9) perché è vero che 5+9 = 4+10; da questa è anche vero che 10+4 = 9+5, uguaglianza che assicura (10,9)*R*(5,4): nel grafo hai usato archi per evidenziare coppie in relazione.

- La relazione è transitiva: se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) allora (m,n)*R*(s,t) , per qualunque terna di coppie (m,n) , (p,q) , (s,t) appartenenti a NxN.

Infatti se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) si ha m+q = n+p e p+t = q+s; sommando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene m+q + p+t = n+p + q+s che può anche essere scritta
(m+t)+(q+p)=(n+s)+(q+p) per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in N. Confrontando i membri dell'uguaglianza si deduce che m+t = n+s, e quest'ultima assicura la verità dell'affermazione (m,n)*R*(s,t).
Riferendoti all'esercizio svolto sopra hai potuto stabilire che (5,4)*R*(10,9) e (10,9)*R*(1,0) poiché 5+9=4+10 e 10+0=9+1; procediamo come nel ragionamento precedente e sommiamo membro a membro le due uguaglianze; otteniamo 5+9+10+0 = 4+10+9+1, uguaglianza che si può anche scrivere (5+0)+(9+10) = (4+1)+(10+9), da cui 5+0=4+1 che assicura la verità di (5,4)*R*(1,0): nel grafo della relazione compaiono triangoli aventi come vertici coppie in relazione.

Conclusione 1
La relazione R così introdotta nell'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme NxN.

Analizzando con attenzione P(NxN), possiamo determinare quale coppia ci conviene assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.
Si può osservare che

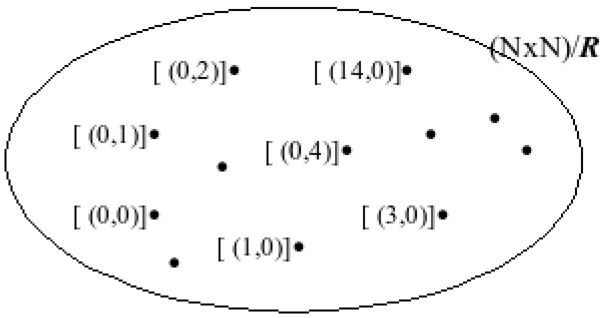


- coppie formate da elementi uguali appartengono alla stessa classe d'equivalenza che può quindi essere rappresentata dalla coppia (0,0);
- la coppia (m,n) con m > n è equivalente alla coppia (m-n,0) essendo m+0 = n+m-n; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) può essere rappresentata dalla coppia (m-n,0);
- la coppia (m,n) con m < n è equivalente alla coppia (0, n-m) essendo m+n-m = n+0; pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m,n) è rappresentata dalla coppia (0,n-m).

184 Determina la coppia avente un elemento nullo, equivalente a
(31,17) … … … … (6,9) … … … … (5,1) … … … …

Conclusione 2
Ciascuna classe d'equivalenza può essere rappresentata da una coppia di numeri naturali avente almeno un elemento nullo.

L'insieme quoziente (NxN)/*R* è pertanto:



DEFINIZIONI
Si chiama **numero intero relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in NxN la relazione (m,n) *R* (p,q) se e solo se m+q = n+p.
Si chiama **forma canonica del numero intero relativo** la coppia scelta come rappresentante della classe d'equivalenza.

Possiamo ad esempio dire che la classe [(3,7)] è un numero intero relativo di forma canonica (0,4).

185 Completa la tabella:

numero intero relativo	elementi della classe d'equivalenza	forma canonica del numero intero
[(5,7)]		
	(7,5) (11,9) (34,32) (3,1) ……….	
		(7,0)
[(56,90)]		
	(3,3) (76,76) (9,9) (43,43) ……….	
		(0,4)
	(4,9) (8,13) (57,62) ……………	

DEFINIZIONI
Si chiama **numero intero positivo** la classe d'equivalenza [(n,0)] e si indica con il simbolo +n.
Si chiama **numero intero negativo** la classe d'equivalenza [(0,n)] e si indica con il simbolo -n
Si chiama **zero** la classe d'equivalenza [(0,0)] e si indica con 0
Si chiama **valore assoluto del numero intero relativo** il numero naturale diverso da zero che compare nella sua forma canonica.

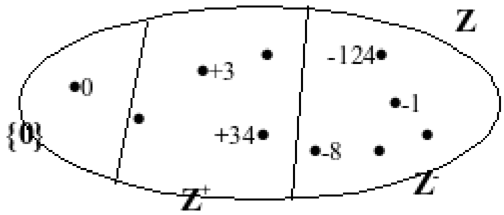
186 Completa la tabella:

numero intero	forma canonica	simbolo usuale	valore assoluto
		+ 6	
	(0,2)		
[(5,5)]			
		- 1	

DEFINIZIONE. L'insieme (NxN)/*R* è chiamato **insieme dei numeri interi relativi** e indicato con il simbolo $\mathbb{Z}$.

Osservazioni

- L'insieme dei numeri interi relativi viene semplicemente chiamato insieme dei numeri interi.
- Esso contiene tre sottoinsiemi Z^+ = {x / x è intero positivo}, Z^- = {x / x è intero negativo}, e l'insieme il cui unico elemento è lo zero {0}. Scriviamo quindi $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



- Quando si debbano considerare solamente gli interi positivi e negativi si usa il simbolo Z_0 col quale si indica che l'insieme dei numeri interi relativi è stato privato dello zero:
  $Z_0 = Z^+ \cup Z^- = Z - \{0\}$

La costruzione dell'insieme dei numeri razionali

Indichiamo con N_0 l'insieme dei naturali privato dello zero, precisamente $N_0 = N - \{0\}$e costruiamo l'insieme NxN_0; esso sarà costituito da tutte le coppie ordinate di numeri naturali di cui il secondo elemento è diverso da zero, cioè $(0,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ mentre $(5,0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$.
In questo insieme sia *R* la relazione così definita
(m,n)*R*(p,q) se e solo se $m \cdot q = n \cdot p$

Esempio

Segna se Vero o Falso e dai la motivazione di quanto affermi:

coppie	V	F	motivazione
(3,5) R (15,25)			
(3,9) R (1,3)			
(8,9) R (7,8)			
(0,6) R (0,1)			

Analizziamo le proprietà della relazione:

- La relazione è riflessiva: per qualunque $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ si ha (m,n) *R* (m,n).

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza m·n = n·m, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché la moltiplicazione in N gode della proprietà commutativa.

- La relazione è simmetrica: per qualunque (m,n) e (p,q) dell'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ se (m,n)*R*(p,q) allora (p,q)*R*(m,n).

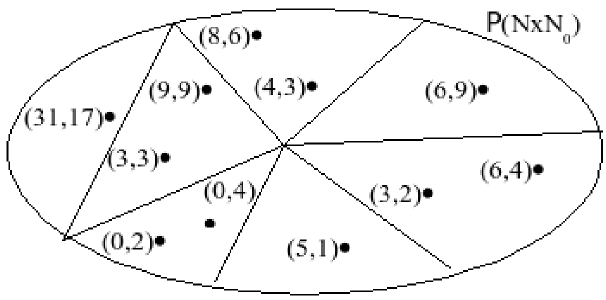
Infatti se (m,n)*R*(p,q) si ha m·q = n·p; per la proprietà commutativa della moltiplicazione in N si ha anche p·n = q·m, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).

- La relazione è transitiva: se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) allora (m,n)*R*(s,t) , per qualunque terna di coppie (m,n) , (p,q) , (s,t) appartenenti a $N\text{x}N_0$.

Infatti, se (m,n)*R*(p,q) e (p,q)*R*(s,t) sappiamo che m·q = n·p e che p·t = q·s; ora moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene m·q · p·t = n·p · q·s che può anche essere scritta (m·t)·(q·p) = (n·s)·(q·p) per le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in N. Confrontando i membri dell'uguaglianza e dividendo per i fattori uguali si deduce che m·t = n·s, che assicura la verità dell'affermazione (m,n)*R*(s,t).

Conclusione 3

Si può concludere che la relazione *R* introdotta nell'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$.



Vogliamo determinare la coppia da assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza.

Per fare questo associamo a ciascuna coppia (a,b) di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ la frazione $\frac{a}{b}$ e osserviamo che la relazione *R* in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ prende significato se trasferita nell'insieme delle frazioni dalla operazione che permette di costruire frazioni equivalenti.

Esempio

Presa la coppia (4,3) ad essa associamo la frazione $\frac{4}{3}$; alla coppia (8,6) associamo la frazione $\frac{8}{6}$. Le coppie (4,3) e (8,6) stanno nella stessa classe d'equivalenza poiché 4·6 = 3·8; le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

187 Completa il ragionamento:

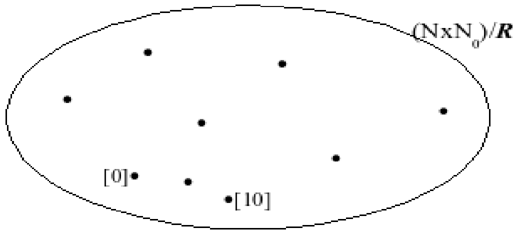
Alla coppia (6,4) viene associata la frazione ……; alla coppia (.., ...) è associata la frazione $\frac{3}{2}$.

Le coppie … … … … … stanno nella … … … … … … … … … … … … … … … .... … …;
le frazioni … … … … … … sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

188 Ripeti l'esercizio prendendo coppie di $N\text{x}N_0$ in relazione e mostrando la relazione di equivalenza tra le rispettive frazioni.

Conclusione 4
Tutte le coppie appartenenti ad una classe d'equivalenza risultano associate ad una stessa frazione; scegliamo dunque come rappresentante di ciascuna classe la frazione ridotta ai minimi termini.

L'insieme quoziente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0/R$ è pertanto:



DEFINIZIONI
Si chiama **insieme dei numeri razionali assoluti** l'insieme quoziente $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0/R$; si indica con il simbolo Q_A.
Si chiama **numero razionale assoluto** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in NxN_0 la relazione R: (m,n) R (p,q) se e solo se $m\cdot q = n\cdot p$; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini.

Quanto abbiamo detto ci permette di passare dall'insieme delle frazioni ad un insieme di numeri che, benché scritti con il simbolo *m/n*, lo stesso usato per rappresentare una parte di una grandezza, hanno un significato completamente diverso dalla frazione. D'altra parte, hai già visto nella secondaria di primo grado che al simbolo *m/n* si può attribuire il significato di quoziente della divisione tra il numeratore e il denominatore e che i numeri razionali sono tutti quelli che si possono scrivere sotto forma di frazione.

189 Completa la tabella:

coppie	appartengono alla stessa classe d'equivalenza?	rappresentante della classe	rappresentano lo stesso numero razionale?	simbolo del numero razionale
(1,2); (3,6)	SI	$[\frac{1}{2}]$	SI	$\frac{1}{2}$
(2,7); (4,49)				
(8,5); (40,25)				
(60,12); (5,0)				
(20,2); (10,1)				

190 Completa la catena di trasformazioni:

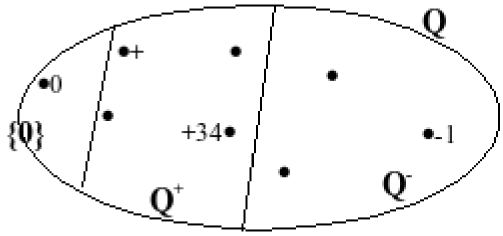
coppie	numero razionale come frazione	rappresentazione decimale
(1,2)R(3,6)	$\frac{1}{2}$	0.5
(2,7)R(4,14)		
(8,5)R(40,25)		
(60,12)R(10,2)		
(2,3)R (12,18)		

Conclusione 5
Se introduciamo la stessa relazione R nell'insieme ZxZ_0, possiamo ottenere le seguenti definizioni:

DEFINIZIONI
Si chiama **insieme dei numeri razionali relativi** l'insieme quoziente $(ZxZ_0)/R$; esso si indica con il simbolo Q.
Si chiama **numero razionale relativo** ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in ZxZ_0 la relazione *R*: (m,n) *R* (p,q) se e solo se $m \cdot q = n \cdot p$; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini dotata di segno.

Osservazioni

- L'insieme dei numeri razionali relativi viene più semplicemente chiamato insieme dei numeri razionali.
- Esso contiene tre sottoinsiemi particolari Q^+ = {x / x è razionale positivo},
  Q^- = {x | x è razionale negativo}, e l'insieme il cui unico elemento è lo zero {0}. Scriviamo quindi $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn:



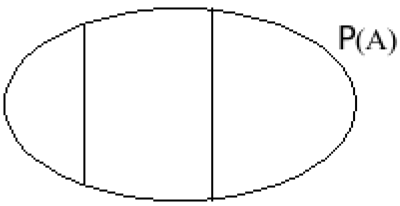
- Quando si devono considerare solamente i razionali positivi e negativi, zero escluso, si usa il simbolo Q_0 col quale si indica appunto l'insieme dei numeri razionali relativi privato dello zero:
  $Q_0 = Q^+ \cup Q^- = Q - \{0\}$

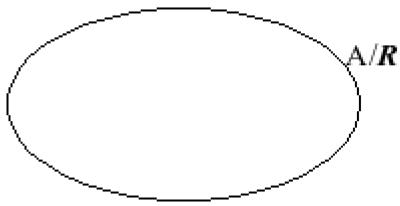
Classi di resti modulo n

191 Considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per 3" introdotta nell'insieme $A=\{n \in \mathbb{N} / 0 \leqslant n \leqslant 13\}$ e studiane le proprietà.
Ricordiamo che il resto della divisione si calcola con l'operazione *mod*; completiamo dunque la tabella sottostante:

	0 mod 3	1 mod 3	2 mod 3				6 mod 3	7 mod 3				11 mod 3		13 mod 3
resto	0						0					2		

La relazione *R* è d'equivalenza; infatti …
… …
Completa l'insieme P(A) partizione dell'insieme A e l'insieme quoziente A/*R*





Quali sono i rappresentanti delle classi d'equivalenza?
Sarebbe cambiato qualcosa se avessimo introdotto la stessa relazione nell'insieme N?
E se sostituissimo N con Z cosa cambierebbe?

192 Nell'insieme N considera la relazione d'equivalenza *R*: "avere lo stesso resto nella divisione per 2". Quante classi d'equivalenza puoi formare? Rappresenta l'insieme P(N). Quali sono i rappresentanti di ciascuna classe? Riconosci in queste classi, particolari sottoinsiemi dell'insieme N?

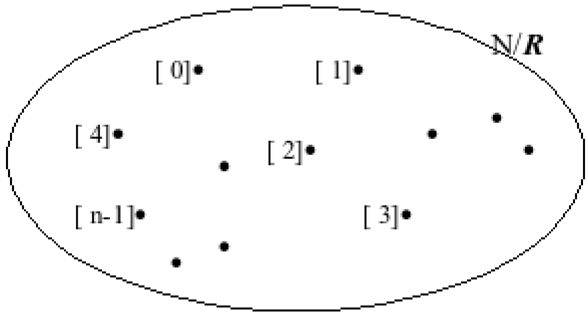
Generalizziamo ora l'esercizio.
Fissato un numero naturale n > 1, considera la relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n" introdotta nell'insieme N, studiane le proprietà e stabilisci se è d'equivalenza.

Osserviamo innanzitutto che nella divisione intera per n il resto si ottiene con l’operazione *mod* e si ha come resto 0, 1, 2, ………. n-1 cioè n resti;

- La relazione è riflessiva, infatti per qualunque mÎ N si ha m*R*m.
- La relazione è simmetrica, infatti per qualunque p e q dell’insieme N se p*R*q allora q*R*p. Precisamente, se p*R*q significa che p *mod* n = q *mod* n e per la proprietà simmetrica dell’uguaglianza possiamo scrivere q *mod* n = p *mod* n, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra q e p.
- La relazione è transitiva: se p*R*q e q*R*s allora p*R*s , per qualunque terna di naturali. Infatti se p*R*q significa p *mod* n = q *mod* n e se q*R*s significa che q *mod* n = s *mod* n; per la proprietà transitiva dell’uguaglianza si ha p *mod* n = s *mod* n, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra p e s.

Conclusione 6

La relazione *R*: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n", introdotta nell’insieme dei numeri naturali, è una relazione d’equivalenza e permette quindi una partizione dell’insieme N in n classi d’equivalenza aventi come rappresentanti tutti e soli i possibili resti della divisione intera per n. L’insieme quoziente è formato da n elementi, viene rappresentato come in figura e viene chiamato **insieme delle classi di resti modulo *n*.**



L’insieme quoziente *N/R* si indica anche col simbolo N_n dove l’indice *n* indica il numero rispetto al quale si è eseguita l’operazione *mod*.

193 Determina gli elementi di N_7.

Traccia di soluzione:

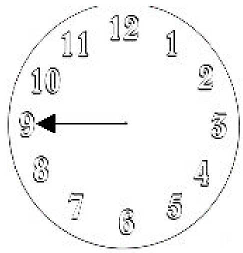
Nell’insieme N si considera la relazione d’equivalenza *R*:“avere lo stesso resto nella divisone per 7”

Le classi d’equivalenza sono: [0], [ ], … … … … …, [6].

Nella classe [0] stanno tutti i … … … … … … … che divisi per 7 danno … …, cioè … … …

In quale classe sta il numero 427? E il numero 74?

194 Elenca e descrivi gli elementi dell'insieme Z_{12}.



Trovi qualche analogia con il disegno dell'orologio riprodotto accanto?

Come rispondi alla domanda :”5 ore dopo le 9 di mattina dove si trova la lancetta delle ore?” È sbagliato dire “4 ore dopo le 9 di mattina sono le 2”?

195 Nel supermercato al banco della frutta la bilancia presenta una tastiera come quella in figura, premendo il bottone relativo alla frutta da pesare si ottiene l'adesivo con il prezzo.

Sistema, senza contare casella per casella, il numero che corrisponde ai miei acquisti di oggi:

zucchine al numero75; arance al numero 63; spinaci al numero 48; patate al numero 56.

Hai potuto sfruttare le classi di resti modulo 8?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

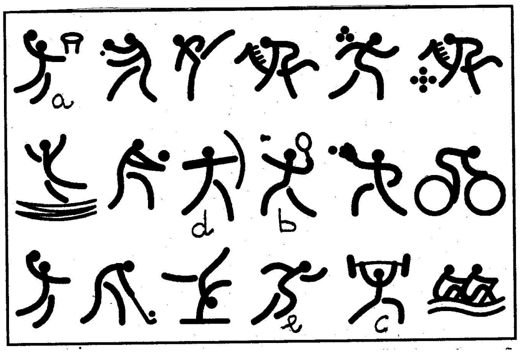
5. CORRISPONDENZE TRA INSIEMI

►1. Prime definizioni

Ti proponiamo due semplici esercizi per introdurre l'argomento che qui vogliamo trattare.

196 Quando camminiamo per la strada della nostra città, vediamo tanti segnali lungo il percorso che, attraverso simboli, ci danno informazioni sul comportamento corretto che dobbiamo tenere.
Sia A = {segnali stradali della figura accanto} e B = {divieto di accesso, divieto di transito, attraversamento pedonale, obbligo di fermata, diritto di precedenza, doppia curva, strada deformata, senso obbligato}; Come nell'esempio, collega con una freccia un segnale stradale con il suo significato, aggiungi il significato degli altri simboli prendendoli dall'insieme B:

197 In occasione dei giochi olimpici del 2008, artisti cinesi hanno interpretato graficamente alcuni sport tracciando i simboli riprodotti in figura.
Tra questi alcuni sono evidenziati con lettere dell'alfabeto (a,b,c,d,e). Sia F = {a, b, c, d, e} e *K* il predicato binario: "rappresenta graficamente".
Scrivi tutte le proposizioni vere che puoi formare prendendo come soggetto del predicato *K* un elemento di F e come complemento un elemento dell'insieme degli sport S = {corsa, pallacanestro, tennis, tiro con l'arco, sollevamento pesi}, come nell'esempio:
Il simbolo *e rappresenta graficamente la corsa*
Il simbolo *a* ……………………………………
Il simbolo ………………………………………
Il simbolo ……………………………………..
Il simbolo ……………………………………..



In entrambi gli esercizi, hai formato coppie ordinate associando ad un elemento del primo insieme un elemento del secondo insieme mediante il predicato binario enunciato.

DEFINIZIONE. Si chiama **corrispondenza *K* tra due insiemi A e B**, il predicato binario avente come soggetto un elemento di A e come complemento un elemento di B. Essa definisce un sottoinsieme G_K del prodotto cartesiano AxB, costituito dalle coppie ordinate di elementi corrispondenti:
$G_k = \{(a, b) \in A \times B / a\,K\,b\}$.

Osservazione
Nel capitolo precedente abbiamo chiamato relazione un predicato binario che si riferisce a due elementi dello stesso insieme; la differenza di terminologia sta semplicemente nella sottolineatura del fatto che si considerano appartenenti allo stesso insieme oppure appartenenti a due insiemi diversi il soggetto e il complemento del predicato binario enunciato.
A seconda del contesto in cui analizziamo un predicato binario, parleremo di corrispondenza o di relazione.
Nelle pagine che seguono tratteremo di corrispondenze, mettendo in luce le loro caratteristiche.

DEFINIZIONE. Si chiama **dominio D** di una corrispondenza l'insieme A in cui si trova il soggetto della proposizione vera costruita con il predicato *K*; **codominio C** l'insieme degli elementi che costituiscono il complemento della stessa proposizione.

Per indicare in linguaggio matematico che si è stabilita una corrispondenza tra due insiemi A e B scriviamo:

$k: A \rightarrow B$ "predicato" oppure ***K***: $A \xrightarrow{K:\text{predicato}} B$.

Formalizziamo quanto fatto con i primo 2 esercizi di questo capitolo:

$k: A \rightarrow B$ "significare", oppure $A \xrightarrow{K:\text{significare}} B$; dominio **D = A**; codominio **C = B**

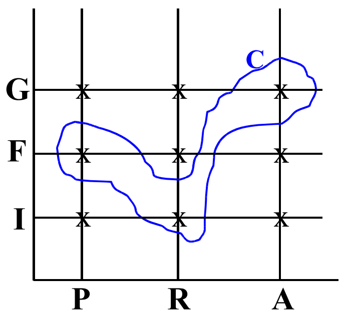
$k: F \rightarrow S$ "rappresentare graficamente", oppure $F \xrightarrow{K:\text{rappresentare graficamente}} S$ dominio F; codominio S.

DEFINIZIONE. Definita una corrispondenza $k: A \rightarrow B$, nella coppia (a,b) di elementi corrispondenti, **b** si chiama **immagine di a nella corrispondenza *K***. L'insieme delle immagini degli elementi del dominio è un sottoinsieme del **C**odominio chiamato **insieme Immagine**. Verrà indicato con **IM** e $\text{IM} \subseteq C$.

►2. Rappresentazione di una corrispondenza

Esempio

Consideriamo gli insiemi: A = {**P**arigi, **R**oma, **A**tene} e B = {**I**talia, **F**rancia, **G**recia}; il prodotto cartesiano AxB è rappresentato col grafico cartesiano (i suoi elementi sono segnati con le crocette in nero).



Esso è formato dalle 9 coppie ordinate aventi come primo elemento una città (elemento di A) e come secondo elemento uno stato d'Europa (elemento di B).

Il predicato binario ***K***:"essere la capitale di", introdotto nell'insieme AxB, determina il sottoinsieme $\mathbf{G}_K$ i cui elementi sono le coppie (Parigi, Francia); (Roma, Italia) ; (Atene, Grecia).

Il dominio della corrispondenza è **D** = {**P**arigi, **R**oma, **A**tene} e il codominio è **C** = {**I**talia, **F**rancia, **G**recia}e **IM** = **C**.

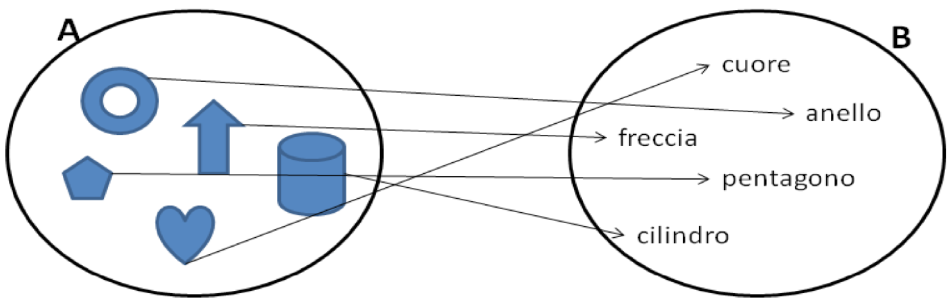
Una corrispondenza si può rappresentare con un grafico cartesiano

198 Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza K: "essere nato nell'anno" di dominio l'insieme A = {Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama, } e codominio l'insieme B = {1901, 1564,1961,1879,1769,1920,1768} . Rappresenta per elencazione il sottoinsieme G_K del prodotto cartesiano AxB. Stabilisci infine gli elementi di IM.

199 L'insieme A={casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione} è il codominio della corrispondenza *K*: "essere il numero di sillabe di" il cui dominio è $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$. Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme G_K , scrivi per elencazione l'insieme IM .

Esempio

Nella figura sottostante sono rappresentati gli insiemi A e B con diagrammi di Eulero-Venn;



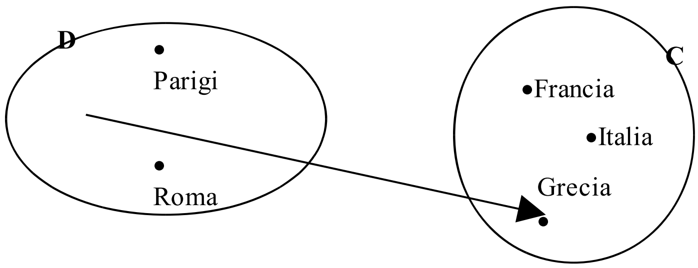
Collegando con una freccia, ciascun elemento di A con la sua forma, possiamo rappresentare con un grafico sagittale la corrispondenza ***K***: "essere di forma" tra gli insiemi assegnati.

A risulta essere il **D**ominio e **B** il **C**odominio della corrispondenza; **IM = C.** La freccia che collega ogni elemento del dominio con la sua immagine rappresenta il predicato ***K***.

Una corrispondenza si può rappresentare con un grafico sagittale

200 Completa la rappresentazione con grafico sagittale della corrispondenza definita nell'esempio 1

La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato ***K***: " essere la capitale di".

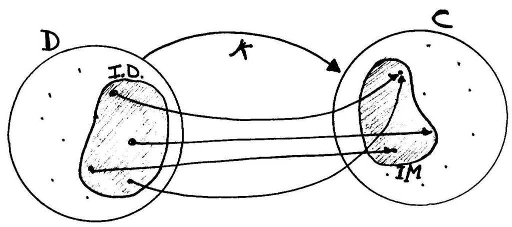


Esempio

Consideriamo gli insiemi R = {regioni d'Italia} e M = {Ligure, Ionio, Tirreno, Adriatico} e la corrispondenza $k: R \rightarrow M$ "essere bagnata/o da"; **R** è il **D**ominio e **M** il **C**odominio di questa corrispondenza.
L'insieme $\mathbf{G}_K$ delle coppie ordinate aventi come primo elemento una regione e come secondo elemento un mare è:
$\mathbf{G}_K$ = {(Liguria, Ligure); (Toscana, Tirreno); (Lazio, Tirreno); (Campania, Tirreno); (Basilicata, Tirreno); (Calabria, Tirreno); (Calabria, Ionio); (Puglia, Ionio); (Puglia, Adriatico); (Molise, Adriatico); (Abruzzo, Adriatico); (Emilia-Romagna, Adriatico); (Marche, Adriatico); (Veneto, Adriatico);(Friuli Venezia Giulia, Adriatico}.
Se rappresentiamo questa corrispondenza con un grafico sagittale notiamo che non tutti gli elementi del **D**ominio hanno l'immagine in ***K***. La corrispondenza definita si può generare solo in un sottoinsieme del **D**ominio.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **I**nsieme di **D**efinizione della corrispondenza, indicato con **I.D.** il sottoinsieme del **D**ominio i cui elementi hanno effettivamente un corrispondente nel **C**odominio.

Nel grafico è rappresentata una generica situazione formatasi dall'aver definito una corrispondenza tra due insiemi; sono in grigio l'**I**nsieme di **D**efinizione, sottoinsieme del Dominio e l'insieme **IM**magine, sottoinsieme del **C**odominio.



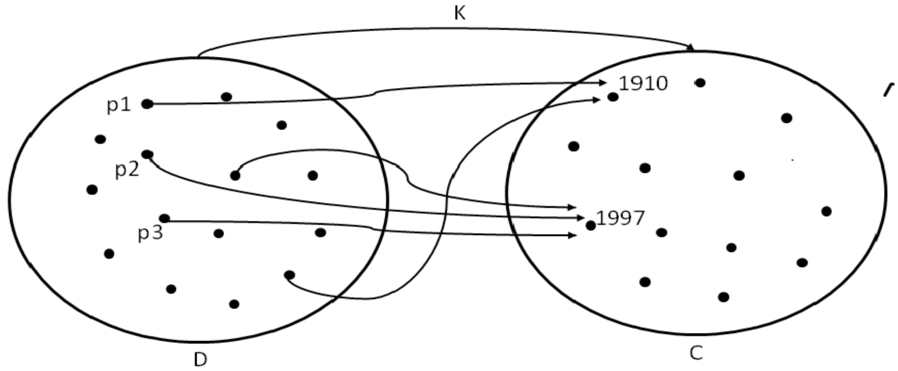
Osserviamo che in taluni casi si ha la coincidenza del **D**ominio con l'**I**nsieme di **D**efinizione e la coincidenza del Codominio con l'insieme IMmagine: **D=I.D.** e **C=IM**

►3. Caratteristiche di una corrispondenza

In questo paragrafo vogliamo analizzare alcuni tipi di corrispondenza; lo faremo riprendendo alcuni esempi già visti e analizzandone di nuovi.

Esempio

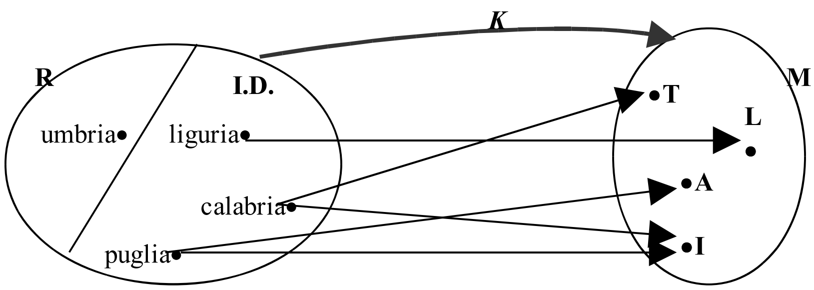
Generalizziamo uno degli esercizi precedenti sulle date di nascita, prendiamo come dominio **D** = {persone italiane viventi} e come codominio **C** = {gli anni dal 1900 al 2009}.
Evidentemente **I.D. = D**, ogni persona ha un determinato anno di nascita, ma **più persone sono nate nello stesso anno**; inoltre IM potrebbe coincidere con C, vista la presenza sul territorio nazionale di ultracentenari, comunque scriveremo $\mathrm{IM} \subseteq \mathrm{C}$.
Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Una corrispondenza di questo tipo è detta molti → uno.

Esempio

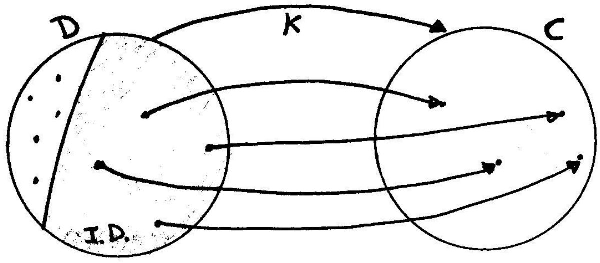
Analizziamo la corrispondenza dell'esempio precedente $k: R \rightarrow M$ "essere bagnata/o da" tra l'insieme delle regioni d'Italia e l'insieme dei mari; $\mathrm{I.D.} \subset \mathrm{D}$ poiché alcune regioni non sono bagnate da alcun mare; **molte regioni sono bagnate dallo stesso mare**, ma succede che **alcune regioni sono bagnate da due mari**. **IM = C**: un mare bagna almeno una regione. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



Una corrispondenza di questo tipo è detta molti → molti.

Esempio

Generalizziamo la corrispondenza ***K***: " essere la capitale di " tra gli insiemi dominio **D** = {città d'Europa} e codominio **C** = {stati d'Europa}. È evidente che $\mathrm{I.D.} \subset \mathrm{D}$ **non tutte le città sono capitali**, mentre **IM = C** in quanto ogni stato ha la sua capitale; inoltre due città diverse non possono essere capitali dello stesso stato. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



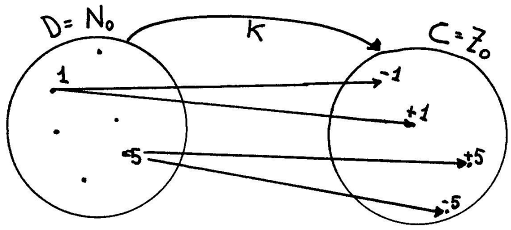
Una corrispondenza di questo tipo è detta uno → uno.

Esempio

Consideriamo tra l'insieme N_0 dei numeri naturali diversi da zero e l'insieme Z_0 degli interi relativi diversi da zero la corrispondenza ***K***: "essere il valore assoluto di".

Per la definizione di valore assoluto di un intero, possiamo senz'altro dire: **N_0 =D=I.D.** ; **Z_0 =C=IM**

Ma succede che **numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto**, quindi ogni elemento di N_0 ha due immagini, per cui il grafico sagittale di questa corrispondenza è:

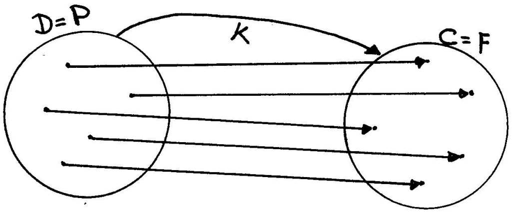


Una corrispondenza di questo tipo è detta uno → molti.

DEFINIZIONE. Le **corrispondenze** di tipo molti → uno e uno → uno sono dette **univoche**; in esse ogni elemento dell'Insieme di Definizione ha una sola IMmagine nel codominio.

Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K*** che associa ad ogni persona il suo codice fiscale: ogni persona ha il proprio codice fiscale, persone diverse hanno codice fiscale diverso. **D**ominio e **I.D**. coincidono e sono l'insieme P={ persone}, **C**odominio e **IM** coincidono e sono l'insieme
F={ codici fiscali }. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo:



È di questo stesso tipo il grafico sagittale della corrispondenza che associa ad ogni automobile la sua targa, ad ogni moto il suo numero di telaio, ad ogni maggiorenne, cittadino italiano, il suo certificato elettorale ……..

In tutti questi casi la corrispondenza è di tipo **uno → uno**, il dominio coincide con l'insieme di definizione e l'insieme immagine coincide con il codominio.

DEFINIZONE. Una corrispondenza di tipo **uno → uno** in cui **D = I.D.** e **C = IM** è detta **corrispondenza biunivoca**.

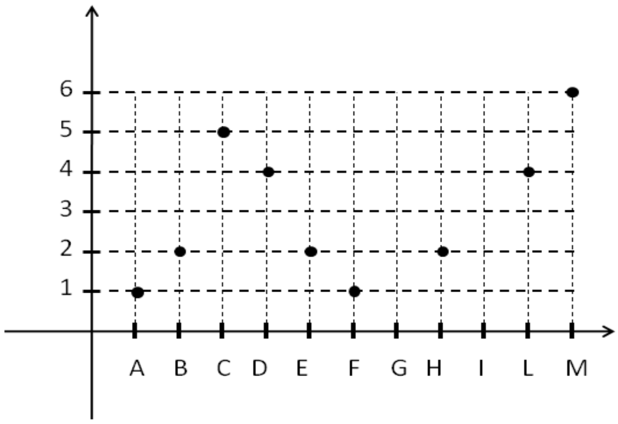
201 È univoca la corrispondenza ***K*** definita tra l'insieme P = { parola del proverbio "rosso di sera, bel tempo si spera"}e l'insieme A = {lettere dell'alfabeto italiano}che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme IMmagine e Codominio: IM ….C. Fai il grafico sagittale della corrispondenza.

202 **K** è la corrispondenza tra l'insieme N dei naturali e l'insieme degli interi relativi Z espressa dal predicato "essere il quadrato di". Ti sembra corretto affermare che Dominio e Insieme di Definizione coincidono? Perché IM = C? La corrispondenza è univoca?

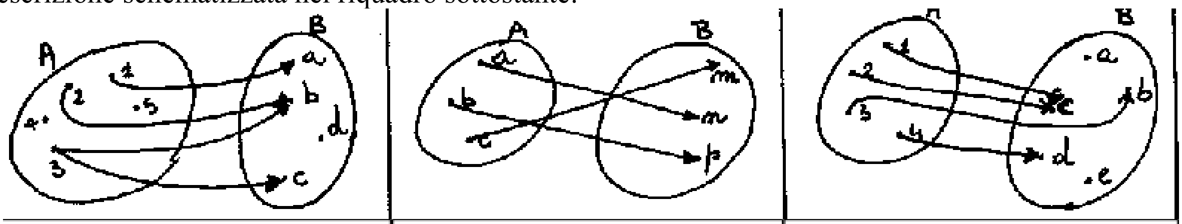
203 Una corrispondenza K è assegnata con il suo grafico cartesiano:

Completa e rispondi alle domande:
D = { ……………………………}
C = { ……………………………}
I.D.= { ……………………………}
IM = { ……………………………}

1. La corrispondenza è univoca?
2. 2 è l'immagine di quali elementi dell'Insieme di Definizione?
3. Quale elemento del codominio è l'immagine di M?



204 I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze, K_1, K_2, K_3. Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:



D = ……………	**D** = ……………	**D** = ……………
C = ……………	**C** = ……………	**C** = ……………
I.D.= …………	**I.D.**= …………	**I.D.**= …………
IM = ………	**IM** = ………	**IM** = ………
Tipo = ……………	**Tipo** = ……………	**Tipo** = ……………

205 Il Dominio della corrispondenza K è l'insieme ZxZ e Z ne è il Codomino; l'immagine della coppia (a,b) è l'intero p = a•b.

- Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme Immagine.
- Perché questa corrispondenza non è biunivoca?
- Tutte le coppie aventi almeno un elemento uguale a zero hanno come immagine ……….
- 1 è l'immagine di ……………………
- Te gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è ………
- Un numero negativo è immagine di …………………………

Fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

206 Il Dominio della corrispondenza K è l'insieme ZxZ e Q ne è il Codomino; l'immagine della coppia (a,b) è il numero razionale $q=\frac{a}{b}$.

1) Stabilisci l'Insieme di Definizione e l'insieme IMmagine.
2) Completa:
- lo zero è immagine delle coppie …………………………
- se gli elementi della coppia sono numeri opposti l'immagine è ………………
- se gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è ………
- un numero negativo è immagine di …………………………

fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

207 In un gruppo di 10 persone, due si erano laureate in medicina e tre in legge nell'anno 1961, mentre quattro anni dopo, una si era laureata in fisica, un'altra in scienze e due in legge.
Considerate i seguenti insiemi:
P = {x / x è una persona del gruppo} ; A = {1960, 1961,1964, 1965}; F = {x / x è una facoltà universitaria}
Fatene la rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn e studiate le corrispondenze K_1, K_2, espresse dai predicati:

K_1:"essersi laureato nell'anno" K_2:"essere laureato in"

mettendo in evidenza per ciascuna Dominio, Codominio, Insieme di Definizione, IMmagine, tipo.
Completate:

d) Nel gruppo ci sono … persone laureate in legge, di cui … nell'anno 1961 e le altre … nell'anno…
e) Nel 1961 si sono laureate … di cui … in medicina
f) Negli anni ……….. non si è laureata nessuna persona del gruppo considerato
g) Tra le10 persona … non si è laureata

N.B. ciascuno possiede una sola laurea
Maria si è laureata in fisica nello stesso anno in cui si è laureato suo marito Luca; Andrea è fratello di Luca, non è medico, ha frequentato una facoltà diversa da quella del fratello e si è laureato in un anno diverso. Supponendo che Maria, Luca, Andrea siano tra le 10 persone di cui sopra, completate:

- Maria si è laureata nell'anno …… Andrea si è laureato nell'anno ……… in ……….. Luca si è laureato nell'anno ……… in ……….. N.B. ciascuno possiede una sola laurea

►4. Insiemi finiti e insiemi infiniti

Cardinalità di un insieme

Il concetto di "corrispondenza biunivoca" permette di affrontare il problema del confronto tra insiemi. Stabiliamo subito una

DEFINIZIONE. Due insiemi A e B si dicono **equipotenti** se è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca.

Esempio

Sia S l'insieme dei giorni della settimana e H l'insieme delle note musicali:
Sistemando gli elementi dei due insiemi come visualizzato nella seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	do	re	mi	fa	sol	la	si

ci rendiamo conto che tra di essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca, ottenuta semplicemente associando ad ogni giorno della settimana una e una sola nota musicale.
Possiamo procedere anche scrivendo i giorni della settimana ciascuno su un foglietto da inserire in un'urna A_1 e facendo altrettanto con gli elementi dell'insieme H inseriti in un'urna A_2 ; pescando alternativamente un foglietto da A_1 e uno da A_2 , ci accorgiamo che, esauriti i foglietti in A_1 sono contemporaneamente esauriti quelli in A_2 .
Concludiamo: **l'insieme S è equipotente all'insieme H**.

208 Mostra che l'insieme M dei mesi dell'anno è equipotente all'insieme O dei segni zodiacali.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{N}_7 = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leqslant 7\}$ la cui rappresentazione per elencazione è $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}$; come abbiamo fatto nell'esempio precedente, possiamo visualizzare la corrispondenza biunivoca che si stabilisce tra S, H e N_7 per mezzo della seguente tabella

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	do	re	mi	fa	sol	la	si
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
N_7	1	2	3	4	5	6	7

Si verifica facilmente che il predicato "essere equipotente" è una relazione d'equivalenza: la classe d'equivalenza di insiemi equipotenti è il numero naturale cardinale che ne indica la numerosità.

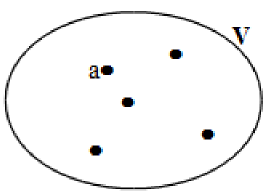
DEFINIZIONE. Si chiama **cardinalità** di un insieme A e si indica con *card*A o **#A** la classe d'equivalenza degli insiemi equipotenti ad A; essa indica il numero degli elementi di A. L'insieme vuoto ha cardinalità 0.

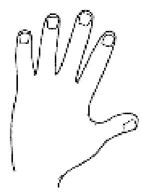
Gli insiemi H, S, N_7 appartengono alla stessa classe d'equivalenza, la caratteristica comune è il numero di elementi: $\#H = \#S = \# N_7 = 7$.

DEFINIZIONE. Un **insieme** A si dice **finito** se esiste un n, naturale maggiore o uguale ad 1, tale che sussista una corrispondenza biunivoca tra A e N_n. In tal caso scriviamo *card*A = n.

Gli insiemi H e S di cui sopra sono insiemi finiti; gli insiemi M e O dell'esercizio 1 hanno cardinalità 12 e sono insiemi finiti.

209 Stabilisci la cardinalità dell'insieme V delle vocali della lingua italiana e dell'insieme D delle dita di una mano.





Completa l'insieme V. Stabilisci una corrispondenza ………..…. tra ….. e …… … Determina N_n …………
Concludo: #V = ……… = ………

Prendiamo nuovamente in considerazione l'insieme $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7\}$ e un suo qualunque sottoinsieme

proprio, ad esempio $N_3 = \{1,2,3\}$; risulta evidente che non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra N_7 e N_3 .
Questo fatto può essere preso come caratteristica di un insieme finito.
In generale possiamo affermare che l'insieme $\mathbb{N}_n=\{x\in\mathbb{N}/0<x\leqslant n\}$ con $n\geqslant 1$ non ha sottoinsiemi propri che possano essere messi in corrispondenza biunivoca con esso: si dice che N_n è un insieme finito e un qualunque insieme A in corrispondenza biunivoca con N_n è finito e ha cardinalità n.
Esistono insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio?

Esempio
Consideriamo l'insieme N dei naturali e il suo sottoinsieme proprio dei numeri pari, che indichiamo con P.
Costruiamo una tabella: qui non possiamo inserire tutti i numeri naturali, quindi metteremo puntini di sospensione per indicare che l'elenco prosegue:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	….

Abbiamo pertanto costruito una **corrispondenza tra** l'insieme **N** (Dominio) **e** l'insieme **P** (Codominio) **di tipo 1→1**: ad ogni numero naturale abbiamo associato il suo doppio (quindi un numero pari) che evidentemente è unico e viceversa ogni pari è l'immagine di un unico naturale. Inoltre il **D**ominio e l'**I**nsieme di **D**efinizione **coincidono** (ogni numero ha il doppio) e anche **C**odominio e insieme **IM**magine **coincidono** (ogni pari è immagine di un solo naturale). La corrispondenza è biunivoca, **N e P sono equipotenti** e la tabella va così modificata:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	….

Questo fatto paradossale non può verificarsi solo per gli insiemi finiti.
Riportiamo la seguente definizione che risale al matematico Richard Dedekind.

DEFINIZIONE. Un **insieme** è **infinito** se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

210 Considera la corrispondenza ***K*** che ad ogni numero naturale associa un numero intero relativo secondo la seguente regola

- se $n\in N$ è pari allora il suo corrispondente è $+\left(\frac{n}{2}\right)$
- se $n\in N$ è dispari allora il suo corrispondente è $\frac{-(n+1)}{2}$

Completa:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	….
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	

Qual è il numero naturale cui corrisponde il numero intero negativo –5 ? ……………
Qual è l'immagine (il corrispondente) di 15 ? ……………………
Qual è l'insieme IMmagine dell'insieme **N** ? ………………………
La legge definita genera una corrispondenza biunivoca tra **N** e **Z** ? …………………
Quale conclusione puoi trarre ? ………………………………

211 Nel “Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo”, Galileo Galilei pone attraverso la domanda di Salviati e la risposta di Simplicio il problema dell’infinità dei naturali:

> **Salviati** - [...] Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?
> **Simplicio** - Non si può dire altrimenti.

Considera la corrispondenza ***K*** che ad ogni naturale associa il suo quadrato;
Completa:

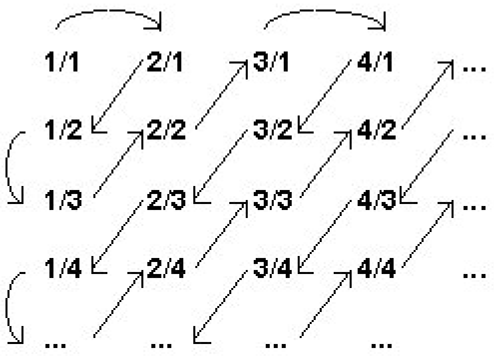
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
K	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N^2										

(abbiamo indicato con N^2 l’insieme dei quadrati)

Qual è l’immagine di 5? ……….
Di quale naturale è immagine 121? …………………
K è una corrispondenza biunivoca tra **N** e **N^2** ? …………..
È vero che **N^2** è un sottoinsieme proprio di **N**? ………
Quale conclusione puoi trarre ? ……………………..

> DEFINIZIONE. Un **insieme** X si dice **numerabile** quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra esso e l’insieme N dei naturali.

Dagli esempi precedenti e dagli esercizi svolti, possiamo concludere che l’insieme N, l’insieme P dei pari, l’insieme N^2 dei quadrati, l’insieme Z degli interi, sono **insiemi numerabili**, hanno dunque tutti la stessa cardinalità.
Ma quale valore possiamo attribuire alla cardinalità degli insiemi sopra elencati se essi sono infiniti?
La **cardinalità** dell’insieme dei numeri naturali viene indicata da Cantor con il simbolo $\aleph_0$ (si tratta della prima lettera dell’alfabeto ebraico con l’indice 0 e si legge **aleph con 0**).
Nel 1874, attraverso un procedimento detto "diagonalizzazione", Cantor dimostra che anche **l’insieme Q dei numeri razionali è numerabile**. Vediamo come possiamo ripercorrere la dimostrazione di questo fatto.



Ricordiamo che ogni numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione e che frazioni equivalenti sono lo stesso numero razionale. Costruiamo la seguente tabella delle frazioni, infinite righe e infinite colonne: nella prima colonna tutte la frazioni con numeratore 1, nella seconda quelle con numeratore 2 e così via. Attribuiamo ai suoi elementi l’ordinamento indicato dalle frecce; esso ci permette di costruire una corrispondenza biunivoca tra le frazioni positive e N; anzi considerando solamente quelle ridotte ai minimi termini, che rappresentano il numero razionale assoluto, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra Q$_A$ e N nel modo seguente:

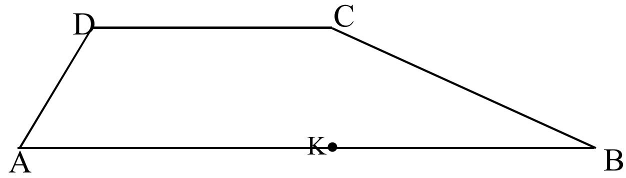
Q$_A$	1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4	....
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....

Cantor nel 1874 enunciò il seguente teorema.

> TEOREMA. Non c’è corrispondenza biunivoca tra l’insieme R dei numeri reali e l’insieme N.

determinando un altro tipo di infinito la cui cardinalità denotò con il simbolo $\aleph_1$
Noi tralasciamo la dimostrazione del teorema sopra enunciato per la sua complessità e la incontrerete nel corso degli studi superiori; qui abbiamo voluto mostrarvi che vi sono diversi gradi di infinito e che di fronte ad insiemi “infiniti” non possiamo affermare che “la parte è minore del tutto”. A questo proposito vi proponiamo il seguente esercizio.

212 Prolungate i lati obliqui del trapezio ABCD fino ad incontrarsi nel punto O.
Le semirette di origine O e comprese tra OA e OB, proiettano il segmento DC nel segmento AB, facendo corrispondere ad un punto di DC un punto di AB.
Direste Vera o Falsa l'affermazione: "I punti del segmento DC sono tanti quanti quelli del segmento AB" ? ……………



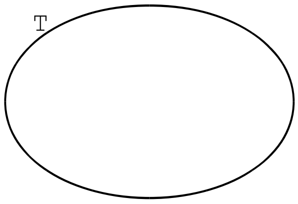
Seguite questi passaggi rispondendo ai quesiti

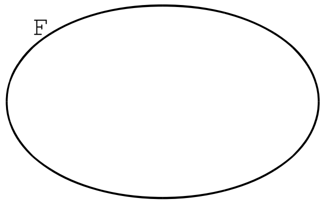
1. Quale punto corrisponde a D, e quale a C? ………………….
2. Ogni punto di CD trova un corrispondente punto in AB? …………………
3. Di quale punto è immagine il punto K di AB? ……………….
4. Ogni punto di AB è immagine di un solo punto di CD? ………………….
5. La proiezione costruita stabilisce una corrispondenza biunivoca tra CD e AB ? …………
6. A quale conclusione vi ha condotto questo esercizio? …………………..

213 Dati gli insiemi
$A=\{x : x=2n^2-1 \; con \; n\in N \; e \; 0\le n<2\}$; $B=\{y\in Z: \; -1\le y\le 1\}$ è vero che si possono mettere in corrispondenza biunivoca?

214 Dato l'insieme $K=\{a,b,c,d\}$, costruite l'insieme $K\times K$.
Considerate il suo sottoinsieme $H=\{(x,y): x \text{ precede } y \text{ nell' ordine alfabetico}\}$
È vero che tale insieme è equipotente all'insieme formato dalle facce di un cubo?

215 Attraverso la costruzione di un grafo sagittale, attribuite il valore di verità alla proposizione: "Il sottoinsieme T di **NxN** formato dalle coppie i cui elementi danno come somma 3 è equipotente all'insieme F dei divisori di 14."





216 Attribuite il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) un insieme infinito è numerabile V F
b) un insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio V F
c) la cardinalità dell'insieme Q è maggiore di quella dell'insieme Z V F
d) due insiemi equipotenti sono infiniti V F

217 Considerate l'insieme $P^*=\{2^n \text{ con } n\in\mathbb{N}\}$ delle potenze di 2,

1. Completate la tabella sottostante:

n	0	1											
potenza													

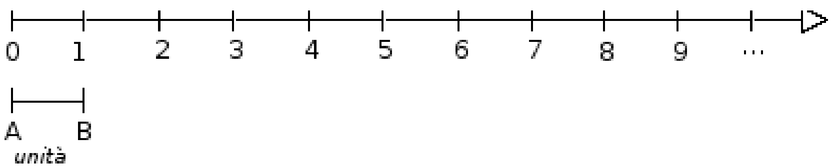
2. Quali proposizioni tra quelle assegnate sono vere?
   p1: P* è un sottoinsieme di N
   p2: 0 appartiene a P*
   p3: P* è numerabile
   p4: Nessun elemento di P* è maggiore di 2065438

[A] solo la p1 [B] la p1 e la p3 [C] la p1, la p2 e la p3 [D] tutte e quattro

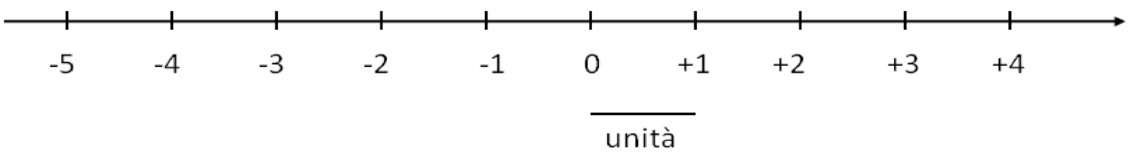
3. Quali considerazioni potete fare sull'infinità di P*?

►5. La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici avete visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme N = {0, 1, 2, 3, 4, …. } e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio N e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma **non tutti i punti della semiretta sono immagine di un numero naturale**: l'insieme **IM**magine **non coincide con** il **C**odominio e **la corrispondenza non è biunivoca.**



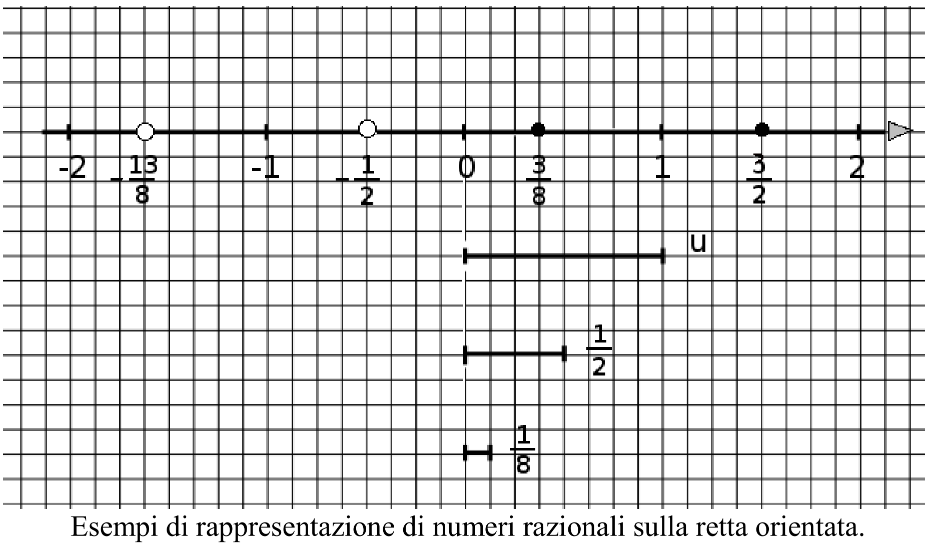
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme Z come Dominio e i punti di una retta orientata come Codominio; nella figura viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma **non tutti i punti della retta sono immagine di un numero intero**: l'insieme **IM**magine **non coincide con** il **C**odominio e **la corrispondenza non è biunivoca.**

Abbiamo già visto nel punto precedente che N e Z sono due insiemi infiniti con la stessa cardinalità e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che **N e Z sono** due **insiemi discreti**.

Consideriamo ora l'insieme **Q** dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere depositati su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante



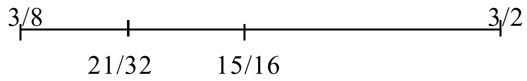
Esempi di rappresentazione di numeri razionali sulla retta orientata.

Sappiamo che **Q è** equipotente all'insieme **Z**, ma rispetto ad esso presenta un'altra caratteristica: esso è **denso**, ciò tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali.

Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra 3/8 e 3/2 si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato e si ottiene $q=\frac{15}{16}$ che è minore di 1 e a maggior ragione minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come puoi verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16.

Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{15}{16}\right)=\frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di q. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.



Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **Q** e i punti della retta.
Invece, no! Nel capitolo "Insiemi Numerici-introduzione ai numeri reali" abbiamo visto che benché l'insieme **Q** sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sull'asse dei numeri tutti i suoi elementi rimangono sulla retta ancora altri punti liberi. La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali.
L'insieme che si ottiene dall'**unione dell'insieme Q** con l'**insieme J degli irrazionali** è l'**insieme R dei numeri reali**, cui Cantor attribuì cardinalità $\aleph_1$. La retta geometrica orientata è in corrispondenza biunivoca con **R,** il che vuol dire che ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale, razionale o irrazionale.

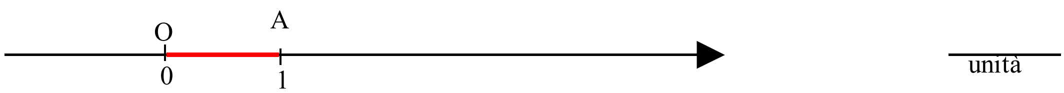
DEFINIZIONE. Si chiama **ascissa di un punto sulla retta reale** il numero reale α che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

Esempio

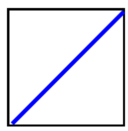
Determinare l'immagine del numero reale $\alpha=1+\sqrt{2}$ *sulla retta reale.*

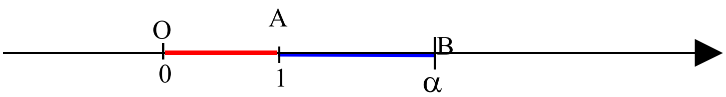
Soluzione:

Fisso la retta orientata e un suo punto O al quale attribuisco ascissa 0; fisso un segmento arbitrario come unità di misura e quindi determino il punto A di ascissa 1 riportando il segmento unitario a partire da O, nel verso indicato dalla freccia.



Costruisco il segmento rappresentativo del numero irrazionale $\sqrt{2}$, che è la diagonale del quadrato di lato l'unità (vedi C1_p4). Metto questo segmento adiacente al segmento OA, come in figura:

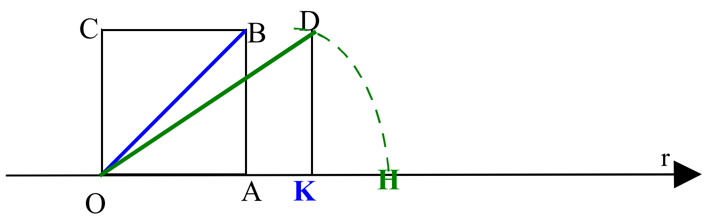




Il punto B è l'immagine del numero α, e scriviamo B(α)

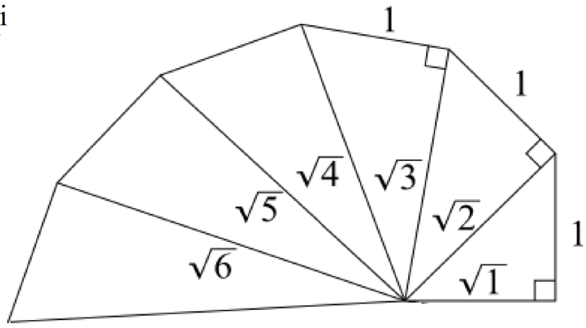
Sulla retta razionale si possono collocare tutti i numeri del tipo $\sqrt{n}$ con $n\in\mathbb{N}_0$.

Nella figura è segnato il punto **K** immagine del numero $\sqrt{2}$; sulla perpendicolare alla retta r nel punto K prendiamo il segmento KD = OA e congiungiamo D con O. Per il teorema di Pitagora sul triangolo OKD si ha $\overline{OD}^2=\overline{OK}^2+\overline{KD}^2=\overline{OK}^2+\overline{OA}^2$ e passando alle misure $\overline{OD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2=2+1=3$ pertanto $\overline{OD}=\sqrt{3}$; puntando il compasso in O con raggio OD tracciamo l'arco che incontra la retta r in **H** immagine del numero irrazionale $\sqrt{3}$.



Proseguendo in questo modo possiamo ottenere sulla retta razionale i punti associati ai numeri del tipo $\sqrt{n}$.

Un'altra classica costruzione, nota come "spirale di Teodoro", permette di ottenere i segmenti di misura $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}_0$.
Si inizia con la costruzione del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1; sappiamo già che la sua ipotenusa è il segmento di misura $\sqrt{2}$. Sulla perpendicolare in C ad AC si prende il segmento CD di misura 1: applicando il teorema di Pitagora come abbiamo fatto sopra, otteniamo $\overline{AD}=\sqrt{3}$. Ripetiamo la costruzione dal vertice D e otteniamo il triangolo rettangolo ADE la cui ipotenusa è $\overline{AE}=\sqrt{4}$ e poi $\overline{AF}=\sqrt{5}$ e così via.



218 Determinate sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali:
$\alpha=\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\beta=\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\delta=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; $\lambda=\sqrt{3}-3$

219 Verificate che il numero $\chi=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ non è uguale al numero $\omega=\sqrt{5}$, usando la rappresentazione sulla retta orientata.

220 Il segmento qui accanto è la diagonale del quadrato di lato unitario:
Determinate sulla retta reale il punto immagine di +1 e di –1.

221 Stabilite il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non vi è nessun numero reale".

►6. Funzioni o applicazioni

Diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE. Una **corrispondenza univoca** tra due insiemi A e B non vuoti si chiama **funzione o applicazione di A in B** se e solo se **Dominio = Insieme di Definizione = A .**

Esempio

Analizziamo le corrispondenze sotto rappresentate con grafico sagittale:

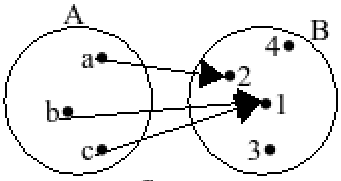


fig.1

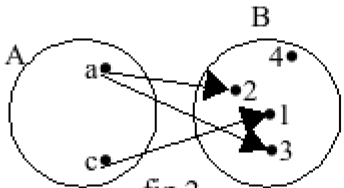


fig.2

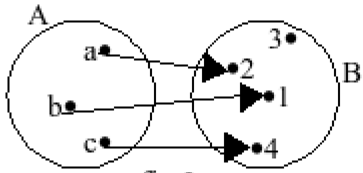


fig.3

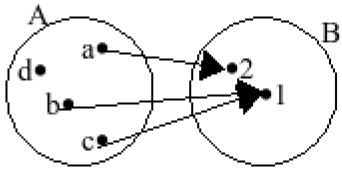


fig.4

Le corrispondenze di fig.1 e fig.3 rappresentano una funzione; in fig.2 non è rappresentata una funzione non essendo una corrispondenza univoca; in fig.4 il **D**ominio non coincide con l'insieme A, quindi non si ha una funzione.
I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi A e B sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera ***f*** e si intende la legge che **associa ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B**.
Per indicare la legge che fa passare dall'insieme A all'insieme B usiamo la scrittura

$$f: A \rightarrow B \quad oppure \quad A \xrightarrow{f} B$$

DEFINIZIONI
L'elemento **y** di B, corrispondente di un elemento x del **D**ominio, viene detto **immagine di x nella funzione *f*** e si scrive **y = *f*(x)** che si legge *"y uguale effe di x"*.
Il sottoinsieme proprio o improprio di B formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del **D**ominio si chiama **Codominio o insieme IMmagine** e si scrive **C = IM = *f*(D).** Osserviamo che non necessariamente ogni elemento di B è immagine di un elemento del dominio per cui $C \subseteq B$.

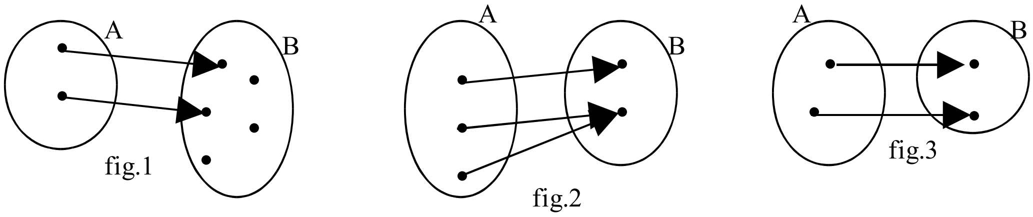
222 Per le funzioni rappresentate nell'esempio precedente, completa:
fig.1 : D = ID = {………} ; C = IM = {……..} ; f(a) = …….. ;
fig.3 : D = ID = {………} ; C = IM = {……..} ; f(….) = 4 ;

223 È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?
1. Completa: D = ID = …………………….
2. È vero che IM = { città d'Italia}? …………………………………
3. Completa f(Liguria) = ………………….; f(…………..) = Cagliari?

224 Assegnati gli insiemi A={mare, ruspa, fegato, generale} e B={1,2,3,4,5,6,7,8,9} la corrispondenza che associa ad ogni elemento di A il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?
1. Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme IMmagine
2. Quale relazione sussiste tra B e IM?

Funzioni iniettive – suriettive - biunivoche

Esempio
Nella figure sottostanti sono rappresentate funzioni:



In fig.1 si ha IM $\subset B$, elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B
In fig.2 si ha IM = B , ma elementi distinti di A hanno la stessa immagine in B
In fig.3 si ha IM = B e elementi distinti del Dominio A hanno immagini distinte in B

I tre esempi ci illustrano tre tipi diversi di funzioni:

DEFINIZIONI
Si dice **iniettiva** una funzione in cui elementi distinti del Dominio hanno immagini distinte in B: **per qualunque x_1, x_2 di A con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.**
Si dice **suriettiva** una funzione in cui **IM = B.**
Si dice **biunivoca o biiettiva** una funzione che sia **contemporaneamente iniettiva e suriettiva.**

Pertanto in fig.1 è rappresentata una funzione iniettiva, in fig.2 una funzione suriettiva e in fig.3 una funzione biunivoca.

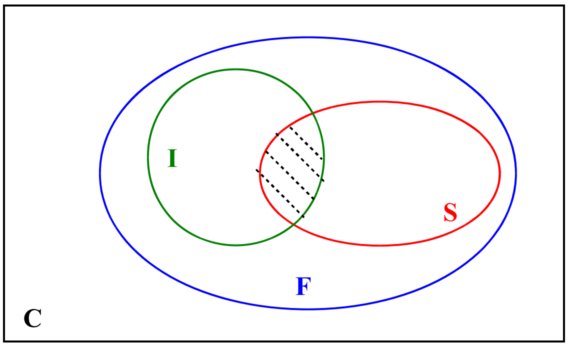
225 Tra le funzioni rappresentate nell'esempio precedente ce n'è una iniettiva? Classifica le altre.

226 Si è ammessi alla facoltà U se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il suo punteggio è una funzione? Se rispondi affermativamente, sai dire di che tipo è la funzione?

227 Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

Riportiamo un diagramma riepilogativo sui diversi tipi di corrispondenze:

Legenda:
C insieme delle corrispondenze
F insieme delle funzioni
S insieme delle funzioni suriettive
I insieme delle funzioni iniettive
$I \cap S$ insieme delle funzioni biunivoche

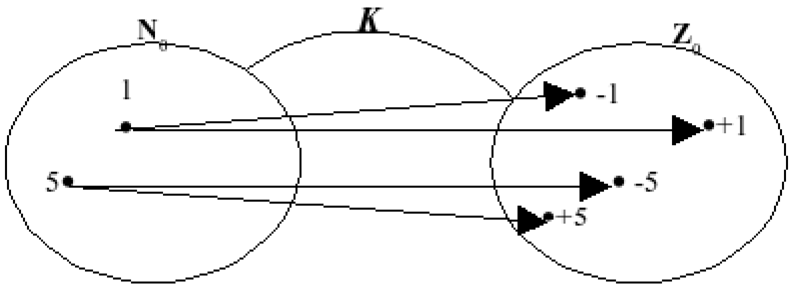


Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione ***f*** può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento **x** del dominio si chiama **variabile indipendente**; il corrispondente elemento **y = *f*(x)** si chiama **variabile dipendente**.

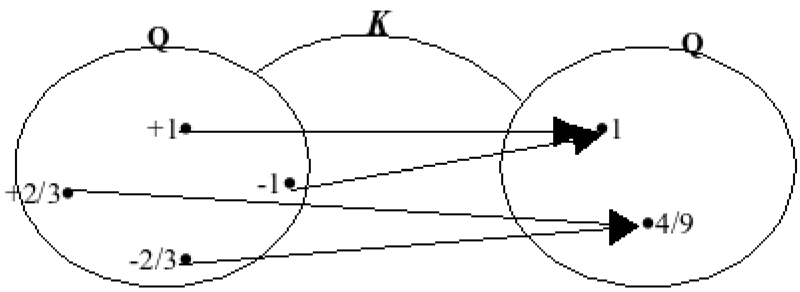
Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K***: **"essere il valore assoluto"** tra l'insieme N_0 dei naturali diversi da zero e l'insieme Z_0 degli interi relativi diversi da zero. Questa corrispondenza **non è una funzione** in quanto **non è** una corrispondenza **univoca**: un elemento di N_0 ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dal grafico sottostante:



Esempio

Consideriamo la corrispondenza ***K*** che **associa ad ogni numero razionale il suo quadrato**. Essa è una funzione di **D**ominio **Q**: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame **non** è **iniettiva**, come rappresentato dal grafico sottostante:



L'immagine y di ogni x appartenente a Q è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula ***f*:** $y = x^2$.

Per quanto riguarda l'insieme **IM**magine o Codominio della funzione esso è un sottoinsieme proprio di **Q**: il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure -25, razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi $\Im \subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione **non** è **suriettiva**

Esempio

Analizziamo la corrispondenza che **associa ad ogni intero il suo valore assoluto**.
Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto.
La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l'insieme Z, pertanto è una funzione:
f: Z → N rappresentata in forma analitica con $y=|x|$ con $x\in\mathbb{Z}$ e $y=f(x)\in\mathbb{N}$.

$x\in\mathbb{Z}$	0	+1	-1	-2	+2	+3	-3	.....
$y\in\mathbb{N}$	0	1	1	2	2	3	3	.....

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del **D**ominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione **non** è **iniettiva**

228 Con riferimento all'esempio precedente, è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate: f(…….) = 45
L'osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva?
Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

Esempio

È assegnata la funzione $f:x\in N\rightarrow(x-2)\in Z$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale il numero intero ottenuto da quello sottraendo 2. L' espressione analitica della funzione è ***f***: y = x – 2 e la legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella

$x\in\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2)\in\mathbb{Z}$	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	....

Ogni elemento dell'insieme N trova il corrispondente in Z; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è **iniettiva**; il Codominio o insieme IMmagine è un sottoinsieme proprio di Z e precisamente **C** = **IM** = $\{y\in\mathbb{Z}/\,y\geqslant-2\}$, pertanto la funzione **non** è **suriettiva**.

Esempio

Analizziamo la corrispondenza: $f_1:x\in N\rightarrow(x-2)\in N$ costruendo la relativa tabella:

$x\in\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$(x-2)\in\mathbb{N}$			0	1	2	3	4	....

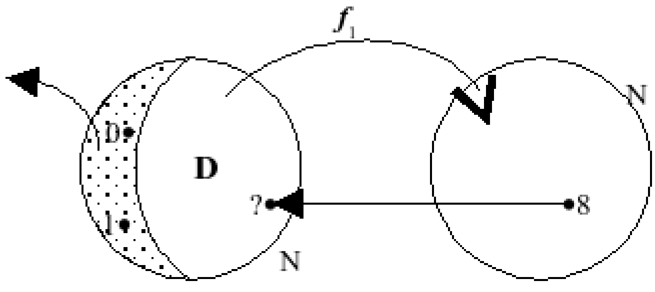
Vediamo che né 0 né 1 hanno l'immagine nella corrispondenza assegnata.

Fissiamo allora come Dominio un sottoinsieme di N e precisamente **D = ID = N – {0,1}**; e procediamo nell'analisi della funzione f_1: $y=x-2$;

229 Completa l'analisi della funzione

1. elementi diversi del **D**ominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è **iniettiva**; si ha anche **C = IM = N** e pertanto la funzione è **suriettiva**, quindi …………
2. Preso y = 8 sapresti trovare l'elemento del **D**ominio di cui è immagine? ………..

Completa con l'ultimo risultato trovato la rappresentazione in forma sagittale della funzione.



Il dominio è stato ottenuto con una restrizione dell'insieme N

Esempio

Consideriamo la corrispondenza che **associa ad ogni numero razionale il suo inverso** (o reciproco).

Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale x significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se x è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su Q e fissiamo **D = ID = Q_0** La corrispondenza è una funzione tra **Q_0** e **Q**. In simboli matematici ***f:*** $y=\frac{1}{x}$

230 Stabilite se la funzione ***f:*** $y=\frac{1}{x}$ è iniettiva. Nell'insieme **IM**magine c'è lo zero?

Completate **C = IM = ………**

Completate la tabella

$x \in \mathbb{Q}_0$	-2	-7/8	+1				-1	
$y \in \mathbb{Q}_0$				+1/3	-12/5	-7/8		-1

231 Consideriamo la funzione ***f*** che **associa ad ogni numero razionale il suo triplo**.

$Q \xrightarrow{f} Q$ la sua espressione in forma analitica è ***f***: y = ………

Dominio = **ID** = **Q;** possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.

Codominio = **IM** = **Q;** infatti il triplo di un numero razionale è ancora un numero razionale.

Rispondete:

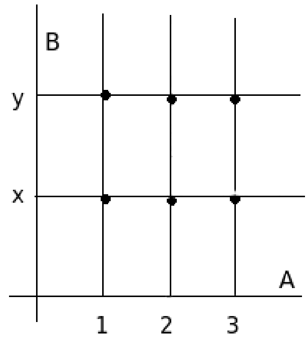
1. Qual è l'immagine di 0? ……………………………….
2. Quale elemento del dominio ha per immagine 5? ………………………………..
3. È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? ……………………….
4. È vero che –1 è immagine di –3? ……………………………….
5. La funzione è iniettiva?
6. È biunivoca?

Fai il grafo sagittale della funzione.

6. Rappresentazione grafica di funzioni

►1. Punti del piano e coppie di numeri reali

Ricordiamo che abbiamo definito **prodotto cartesiano** di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A\times B=\{(a\,;b)|a\in A \text{ e } b\in B\}$.



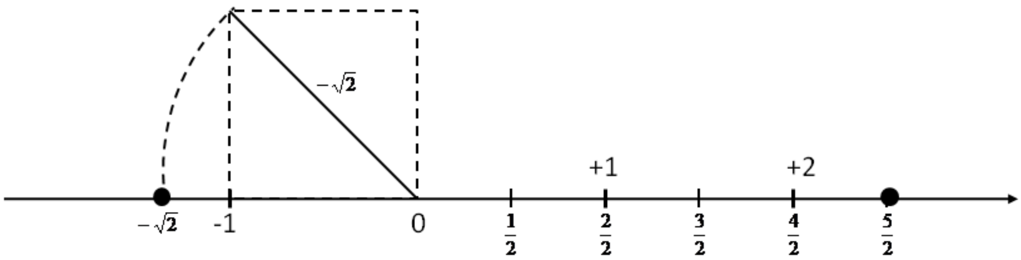
Esempio

Il prodotto cartesiano dei due insiemi A={1,2,3} e B={x,y} è AxB = {(1;x), (1;y), (2;x), (2;y), (3;x), (3;y)} e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura accanto.

Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale. (vedi il paragrafo "corrispondenza tra insiemi")

Esempio

Al numero reale $\delta=\frac{5}{2}$ corrisponde il punto P; Q è l'immagine del numero reale $\alpha=-\sqrt{2}$

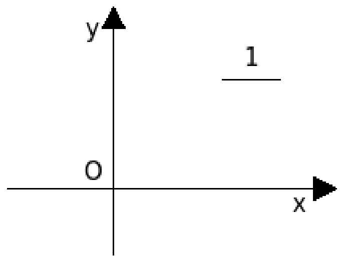


Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Preso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ = {(0;0), (0;+), (0;-), (+;0), (+;+), (+;-), (-;0), (-;+), (-;-) }

È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?

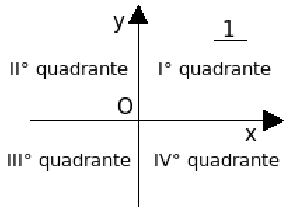


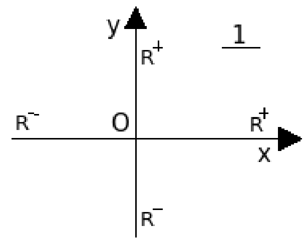
Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra, sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura.

Indichiamo con **x** l'asse orizzontale che chiamiamo **asse delle ascisse** e con **y** l'asse verticale che chiamiamo **asse delle ordinate**.

DEFINIZIONE. Si chiama **riferimento cartesiano ortogonale monometrico** la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura.



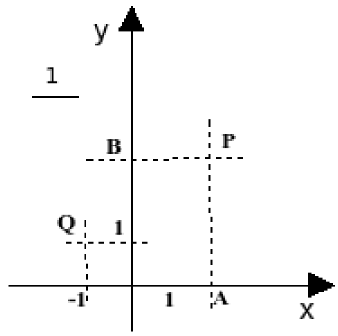


Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale:
O è immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi.

Per rappresentare gli elementi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ cioè le coppie ordinate di numeri reali (α;β) procediamo nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale α;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale β;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

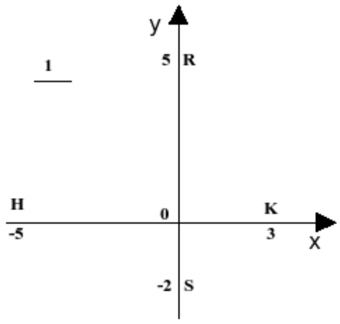
Il punto P, intersezione delle parallele tracciate, è l'immagine della coppia ordinata (α;β).



Esempio

Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate (2;3) e (-1;1)
Nella figura accanto è tracciata la costruzione descritta sopra: P è il punto del piano immagine della coppia (2;3) e Q è il punto immagine della coppia (-1;1).

232 Prova tu, rappresentando le coppie (4;-1) e (-4;1).
Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?



Esempio

Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: (0;5) , (0;-2) , (-5;0) , (3;0)
Osserviamo che il punto A immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia (0;5) sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia (0;-2) al punto S dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto B immagine dello zero sull'asse y coincide con O, le coppie (-5;0) e (3;0) sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

Il punto **O** è immagine della coppia (0;0) ed è chiamato **Origine**.

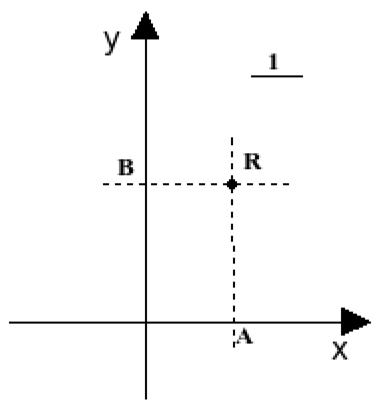
Prima conclusione: ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

233 Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse:

$(0;-1)$ $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$ $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{5}{3};1\right)$

$\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ $(-8;9)$ $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$ $(-1;0)$

Completa l'osservazione conclusiva:
"Tutte le coppie del tipo (+;+) individuano punti del ………..…...……"
"Tutte le coppie del tipo (..;..) individuano punti del IV° quadrante"
"Tutte le coppie del tipo (-;+) individuano punti del …………......………"
"Tutte le coppie del tipo (-;-) individuano punti del ………...…………"
"Tutte le coppie del tipo (…;0) individuano punti del ………...………"
"Tutte le coppie del tipo (…;…) individuano punti dell'asse y"



Prendiamo ora un punto R del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da R la parallela all'asse y che interseca l'asse x nel punto A. A questo punto è associato un numero reale α. Analogamente da R tracciamo la parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto B immagine di un numero reale β. Al punto R associamo la coppia di numeri reali (α;β).

Diremo che **R è il punto di coordinate (α;β)**, α si chiama **ascissa** del punto R, β **ordinata** del punto R.

Seconda conclusione: ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.

In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e anzi diremo, secondo gli esempi precedenti, "P è il punto (2;3), Q il punto (-1;1)" invece di "P è il punto immagine della coppia (2;3)" o "P è il punto di coordinate (2;3)".

Un po' di storia
Nel II° secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine.
La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri.
Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre.
I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.
Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti algebrici.
La geometria analitica tratta questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

Distanza di due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto $P(\alpha;\beta)$, il numero reale $|\alpha|$ rappresenta la misura della distanza del punto dall'asse y e il numero reale $|\beta|$ rappresenta la misura della distanza di P dall'asse x.

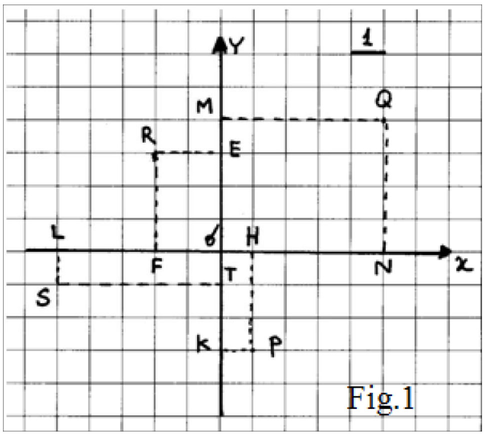


Fig.1

Esempio
Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti P(+1;-3) , Q(+5;+5) , R(-2;+3) , S(-5;-1).
Dati: P(+1;-3)
Obiettivo:
$PH\perp$asse X ; il segmento PH è la distanza di P dall'asse x.
$PK\perp$asse y ; il segmento PK è la distanza di P dall'asse y.
Per quanto detto sopra si ha
$\overline{PH}=|-3|=-(-3)=3 \quad \overline{PH}=|+1|=1$
Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy, conoscendo le coordinate degli estremi A e B del segmento stesso.
I° caso: i due punti hanno la stessa ascissa: il segmento AB è parallelo all'asse y e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse x.
Dati: A(2;7) , B(2;3) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva: $\overline{AB}=\overline{AH}-\overline{BH}=y_A-y_B=7-3=4$
Dati: A(5;5) , B(5;-3) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva:
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=y_A+(-y_B)=y_A-y_B=5-(-3)=8$
Dati: A(-2;-1) , B(-2;-6) Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Procedura risolutiva:
$\overline{AB}=\overline{BK}-\overline{AK}=-(y_B)-(-y_A)=y_A-y_B=-1+6=5$

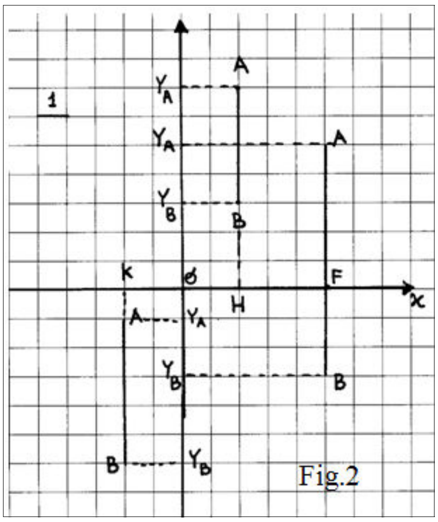


Fig.2

Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere:
La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ordinate è $\overline{AB}=|x_a-x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.

234 Sono assegnati i punti A(3;-1) , B(3;5) , M(-1;-1) , N(-1;-7). È vero che $\overline{AB}=\overline{MN}$?

II° caso: i due punti hanno la stessa ordinata: il segmento AB è parallelo all'asse x e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse y. (Fig.3)
Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento AB nella figura accanto, verifica che in ogni caso $\overline{AB}=|x_A-x_B|$
La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ascisse è $\overline{AB}=|x_A-x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.

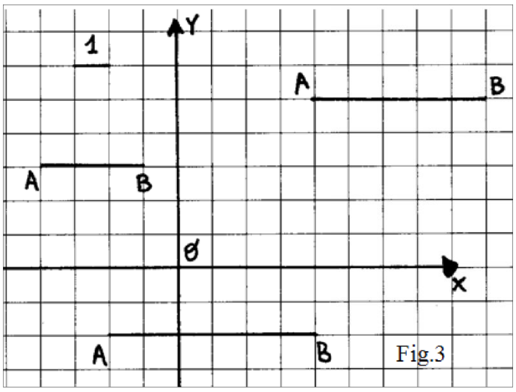


Fig.3

235 Sono assegnati i punti A(1;5) , B(-4;5) , C(-4;-2) , D(5;-2).
Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinate l'area del quadrilatero ABCD.

236 Determinate l'area del quadrilatero MNPQ sapendo che M(6;-4) , N(8;3) , P(6;5) , Q(4;3).

III° caso: è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati. (Fig.4)
Dati: $A(x_A;x_B), B(x_B;y_B)$ Obiettivo: $?\ \overline{AB}$
Tracciando da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y si determina il vertice C del triangolo rettangolo ABC di cui AB è l'ipotenusa.
Per il teorema di Pitagora si ottiene:
$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_C-y_B)^2}$$
Poiché $x_C=x_B$ e $y_C=y_A$ sostituendo si ha:
$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\ .$$

La misura del segmento AB, note le coordinate dei suoi estremi è $\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$ **.**

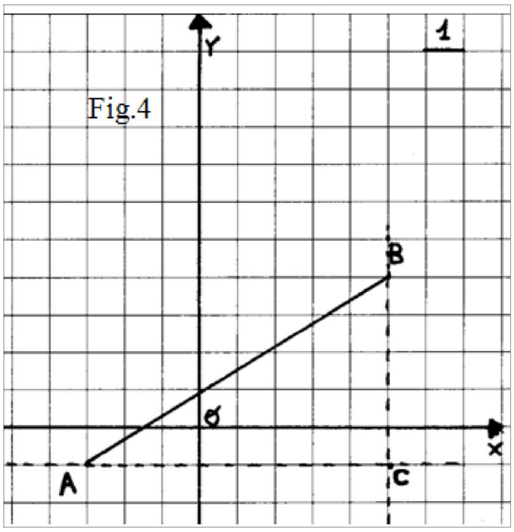


Fig.4

237 Determina $\overline{AB}$ sapendo che A(7;-1) e B(-3;-6).

238 Determina la distanza di $P(-3;2{,}5)$ dall'origine del riferimento.

239 Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$.

240 Determina il perimetro del quadrilatero di vertici A(1;5) , B(-4;5) , C(-4;-2) , D(5;-2).

241 Determina il perimetro del quadrilatero di vertici M(6;-4) , N(8;3) , P(6;5) , Q(4;3).

242 Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici A(1;-3), B(4;3), C(-3;1), D(-6;-5).

243 Verifica che il triangolo di vertici E(4;3) , F(-1;4) , G(3;-2) è isoscele.

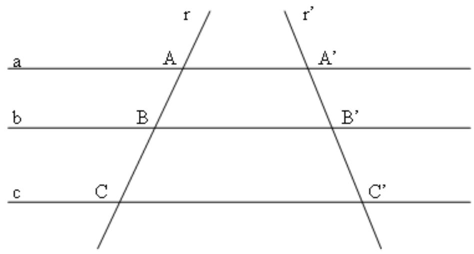
244 Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x; il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC}=\frac{17}{2}$. Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$.

245 I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area la misura delle sue diagonali.

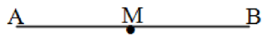
246 Il punto G appartiene all'asse x, ha ascissa maggiore all'ascissa di F ed è tale che $\overline{EF}=\overline{FG}$.
Determina il perimetro del trapezio OGEC.

Punto medio di un segmento

Ricordiamo il teorema di Talete: "in un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale". Cioè, se $AB \equiv BC$ allora $A'B' \equiv B'C'$

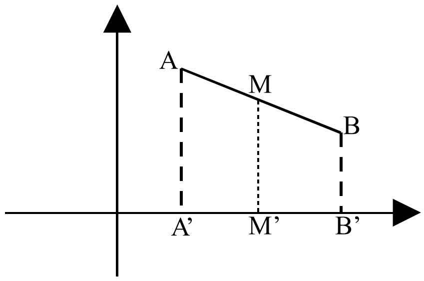


Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento: il punto medio di un segmento AB è il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti: $AM \equiv MB$.



Vogliamo ora affrontare il seguente problema: conoscendo le coordinate degli estremi A e B di un segmento determiniamo le coordinate del suo punto medio.

Dati:	Obiettivo
$A(x_A; y_A)$	? $M(x_M; y_M)$
$B(x_B; y_B)$	
$AM \equiv MB$	



Strategia: essendo $AM \equiv MB$. per il teorema di Talete $A'M' \equiv M'B'$. ; si ha inoltre $A'(x_A; 0)$, $B'(x_B; 0)$, $M'(x_M; 0)$ e quindi $x_M - x_A = x_B - x_M$ da cui $2x_M = x_A + x_B$ e dunque $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Con ragionamento analogo tracciando dai punti A, B, M le parallele all'asse x si ricava $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Le coordinate del punto medio M di un segmento AB, con $A(x_A; x_B), B(x_B; y_B)$ **sono**

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \textbf{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$ **.**

<u>Esempio</u>

Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4}+2}{2} = \frac{5}{8}; \quad y_M = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{quindi} \quad M\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{4}\right)$$

247 Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2}; 0), B(0; \sqrt{2})$

b) $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6}; 3\right)$

c) $A(-1; 4), B(1; -4)$

d) $A\left(0; -\frac{3}{2}\right), B(-2; -1)$

e) $A\left(1+\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right); B\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $A\left(\frac{7}{5}; -\frac{7}{5}\right), B(1; -1)$

g) $A\left(-3; \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}; -3\right)$

248 I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P , punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC.

249 I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3; 5)$, $B(3; -5)$, $C(3,5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC. Determina il perimetro di ABC e di MNP. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

$R.\left[2p_{ABC}=2(8+\sqrt{34});\ \ 2p_{MNP}=(8+\sqrt{34});\ \ \frac{2p_{ABC}}{2p_{MNP}}=2;\ \ S_{ABC}=30;\ \ S_{MNP}=\frac{15}{;}\ \ \frac{S_{ABC}}{S_{MNP}}=4\right]$

250 Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3),\ B(6;-1),\ C(-4;-3)$ è rettangolo. È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

251 Verifica che i segmenti AB e CD di estremi i $A\left(\frac{1}{2};2\right),\ B\left(-\frac{3}{4};-2\right),\ C(3;1),\ D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ punti hanno lo stesso punto medio. È vero che $\overline{AC}\cong\overline{BD}$?

►2. Il grafico di una funzione

Premettiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONI
Una funzione ***f*** è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento **x** (**variabile indipendente)** del **D**ominio associa uno e un solo valore **y** della **variabile dipendente**.
L'elemento **y**, corrispondente di un elemento **x** del **D**ominio, viene detto **immagine di x nella funzione *f*** e si scrive **y = *f*(x)** che si legge *"y uguale effe di x"*.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per Dominio e Codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- **Con linguaggio comune**, purché in modo preciso e inequivocabile:
  esempio: La funzione ***f*** "associa ad ogni numero razionale il suo triplo"
- **Attraverso un algoritmo**, cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita) :
  Per esempio:

Prendi un numero razionale → Moltiplicalo per 3 → Scrivi il risultato

Variabile indipendente: x
Valore in ingresso $\xrightarrow{f}$ Variabile dipendente: y
Valore in uscita

- **Mediante una tabella**:

x	-2	0	3	7	10
y	-6	0	9	21	30

- **Con una formula** che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente:
  Per esempio: y = 3x

252 Sono assegnate alcune funzioni con una formula; compila le tabelle accanto a ciascuna.

1) $f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}\quad y=\frac{1}{2}x$

x					
y					

2) $f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}\quad y=-x$

x					
y					

3) $f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}\quad y=2-3x$

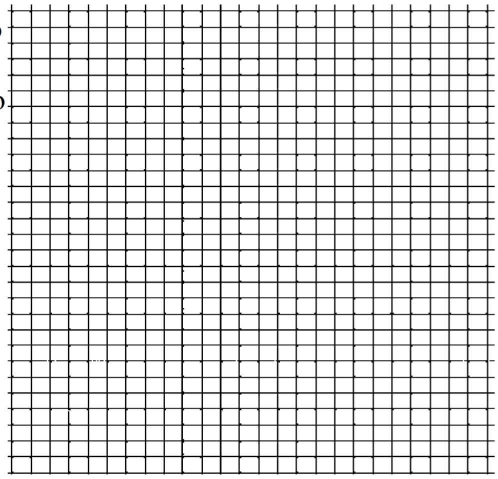
x					
y					

253 Esprimi con linguaggio comune la funzione 1) dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

a) Qual è l'immagine di 0? y = …………………
b) Quale elemento del **D**ominio ha per immagine 5? x =………………..

c) È vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? …… Perché? …………………
d) È vero che –1 è immagine di –2? …………perché? ……………………

254 Traccia sul piano quadrettato a fianco un riferimento cartesiano ortogonale monometrico.
Completa la tabella per la funzione $y = 2x$ avente come Dominio e Codominio l'insieme R dei numeri reali:



x	0		1/2	2	-3	
y		2				5

Ogni coppia (x;y) determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.

DEFINIZIONE. Si chiama **grafico di una funzione** l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

Osservazione
I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

Funzione di proporzionalità diretta

x	0	-1	1/2	2	-3	-5/2
y	0	2	-1	-4	6	5
y/x						

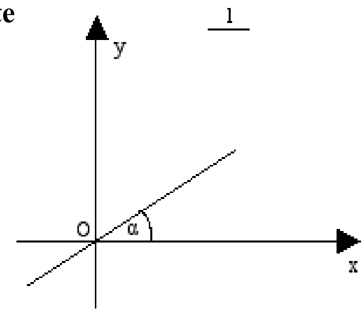
Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x. Cosa osservi?

… … … … … … … … … … … … … …

… Completa: $\frac{y}{x} =$ ……

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità diretta**.
In simboli, y direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x$

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una retta passante per l'origine; la costante k si chiama coefficiente angolare della retta.



Nella figura è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle x un angolo α; la costante k ci dà informazioni su tale angolo.

255 Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni la costante k, traccia il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

a) $f_1 : y = \frac{1}{2}x$
b) $f_2 : y = x$
c) $f_3 : y = \frac{4}{3}x$
d) $f_4 : y = \frac{3}{5}x$
e) $f_5 : y = 5x$
f) $f_6 : y = -\frac{1}{2}x$

g) $f_7: y=-x$ h) $f_8: y=-\frac{3}{4}x$

256 Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni. Evidenzia con un tratto più calcato la funzione f_2 e compila la tabella:

funzione	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
k: coefficiente angolare					

Cancella i termini errati nella seguente analisi:
"*Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la f_2; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la f_2.*"

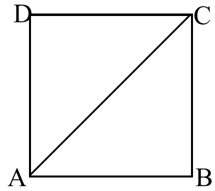
257 Ripeti l'esercizio precedente per le seconde cinque funzioni, evidenziando la funzione f_7; costruisci l'analoga tabella e cancella i termini errati nella seguente analisi:
"*Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di -1 stanno sopra/sotto la f_7; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di -1 stanno sopra/sotto la f_7.*"

Conclusione
Se la costante di proporzionalità è positiva, l'angolo α è acuto, se la costante è negativa allora l'angolo α è ottuso.

Problema

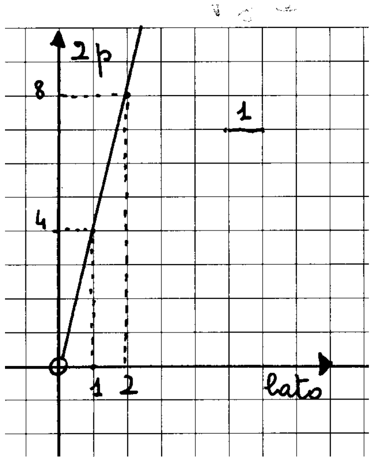
Nel quadrato ABCD il cui lato misura x, determinare il perimetro e la diagonale.

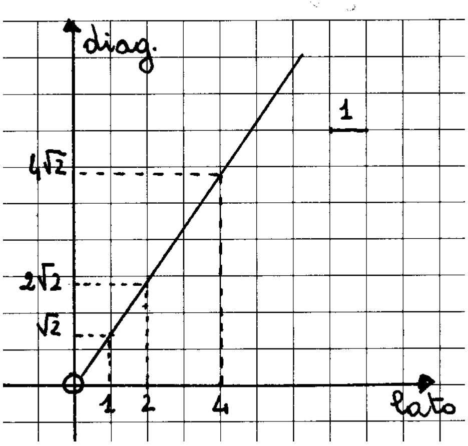
Dati: $\overline{AB}=x$ con $x>0$ *Obiettivo:* $?\ 2p;\ ?\ \overline{AC}$



Soluzione

$2p=4\cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato.
Indicato con y il perimetro scriviamo $y=4x$, funzione di proporzionalità diretta con $Dominio=R^+$, coefficiente $k=4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.





Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2+\overline{BC}^2 = x^2+x^2 = 2x^2$ da cui

$\overline{AC} = \sqrt{2\cdot x^2} = x\cdot\sqrt{2}$

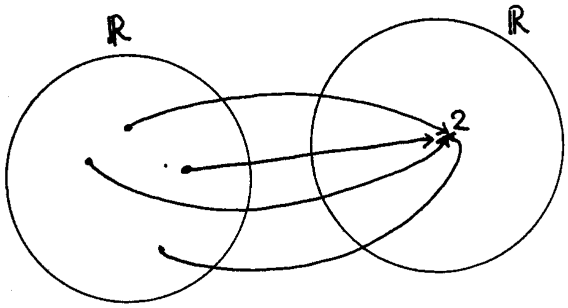
Indicando con y la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2}\cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $D=R^+$.
La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine.

258 x rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero; determina la misura della altezza al variare della misura del lato. Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

259 Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2metri?

La funzione costante

Il seguente grafo rappresenta una funzione in cui **D**ominio = **R** e l'insieme **IM**magine = **{2}**:

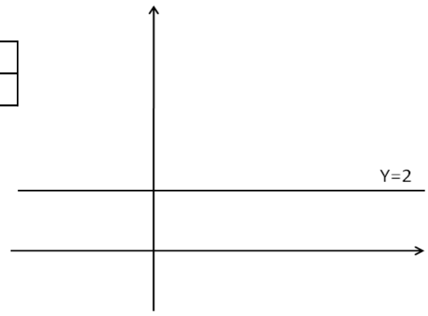


DEFINIZIONE. Si chiama **funzione costante** la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall x \in \mathbb{R}$ è $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale:

formula: $y=2$

x	-2	0	-3	1	2	…
y	2	2	2	2	...	...



Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (asse x).

Osserviamo che se k è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I° e II° quadrante); se k è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III° e IV° quadrante); se k =0 allora la retta coincide con l'asse x delle ascisse.

260 Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni:

y=-2; y=6; y=0; y=-1 y=+3

261 Traccia nel riferimento cartesiano la funzione $y=1$ e $y=-3$; nello stesso riferimento traccia la funzione $y=2x$. Le tre rette individuano nel piano due punti. Determina la distanza dei due punti.

262 Le due funzioni f_1 e f_2 di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione y= -2 un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio.

f_1:	x	-2	0	+3	-1
	y	2	0	-3	1
f_2	x	1	0	+3	-2
	y	4	0	12	-8

263 Traccia il grafico cartesiano delle funzioni $f_1: y = 2x$ $f_2: y = -\frac{1}{2}x$ $f_3: y = 2$ e indica con A e B rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_3 e di f_2 con f_3. Considera il triangolo AOB (O è l'origine del riferimento). È vero che $\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{OB}^2$? Sai trarre una caratteristica del triangolo AOB? Traccia nello stesso riferimento la funzione $f_4 = y-4$ e indica con C e D rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_4 e di f_2 con f_4. Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:

***f*:** Prendi un numero reale x → Raddoppia il valore scelto → Sottrai 1 al valore trovato → Scrivi y = espressione trovata

Variabile indipendente: x
Valore in ingresso $\xrightarrow{f}$ Variabile dipendente: y
Valore in uscita

Completa:
La funzione assegnata si esprime con linguaggio comune: " la differenza tra ……………………..

La formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è y = … …
La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

x	-2	0	…	…	…	…	…
y			0				

Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale.
Rispondi:

- i punti trovati sono allineati? SI NO
- la funzione è una proporzionalità diretta? SI NO

DEFINIZIONE. Una funzione espressa dalla formula $y = m \cdot x + q$ con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ il cui grafico è una retta si dicono **funzioni lineari**.

264 Sono assegnate le funzioni lineari: $f_1: y = \frac{1}{2}x - 2$ $f_2: y = -x - \frac{3}{4}$ $f_3: y = 6x - 6$

Rappresentale in un riferimento cartesiano ortogonale dopo aver compilato per ciascuna una tabella di valori.

265 Segna nel riferimento cartesiano ortogonale i punti assegnati tramite la tabella:

x	-3	-3/2	0	3	6
y	-2	-1	0	2	4

La funzione assegnata è una proporzionalità diretta?
Scrivi la formula $y = \ldots\ldots\ldots$
Completa ora la tabella avente i medesimi valori della variabile indipendente, ma i valori della variabile dipendente siano ottenuti dai precedenti diminuiti di 2:

x	-3	-3/2	0	3	6
y	…	…	-2	…	…

Scrivi la formula della nuova funzione $y = \ldots\ldots\ldots$
Traccia il suo grafico nello stesso riferimento. È una funzione lineare? ………..

Significato dei coefficienti m e q nella funzione lineare y = mx+q

Se $m=0$ la funzione è $y=q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse x.
Se $m\neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse.
Se $m>0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m<0$ l'angolo è ottuso.
Se $q=0$ la funzione è $y=ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine.
Se $q\neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse y)

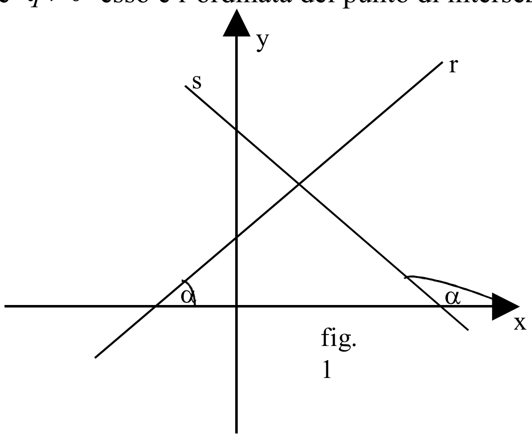


fig. 1

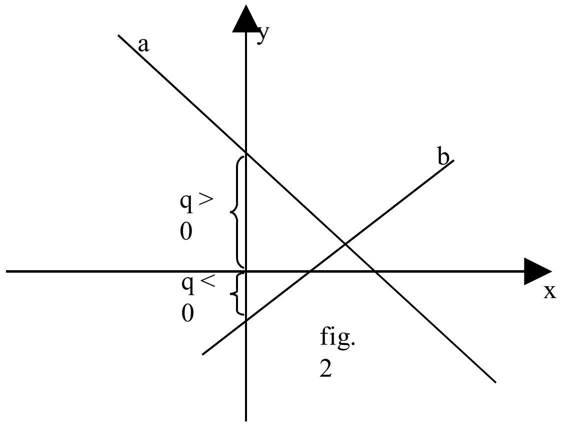


fig. 2

Conclusione
La funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

266 Riferendoti ai grafici delle figure 1 e 2, completa:

- nella formula della funzione avente r come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente s come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente a come grafico si ha m …. 0 e q …...0;
- nella formula della funzione avente b come grafico si ha m …. 0 e q …...0.

È possibile assegnata una tabella di corrispondenza determinare la formula della funzione lineare?
Si può determinare; noi analizzeremo solo un caso particolare.

Esempio

Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

x	-2	-1	0	1	2/3
y	-8	-5	-2	1	0

Soluzione

Segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x\,;\,y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (d'altra parte il rapporto y/x non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di m (coefficiente angolare) e di q .
Dalla tabella so individuare il valore di q : $q=-2$. Potrei ripercorrere all'inverso il procedimento dell'esercizio 13: sommo 2 a tutte le ordinate trovando la tabella della proporzionalità diretta $y=3x$
Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y=3x-2$.

x	-2	-1	0	1	2/3
y	-6	-3	0	3	2

Osserviamo che questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di q .

267 Le tabelle individuano coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico.

F_1	x	5	-1	0	3	1
	y	-2	4	-3	0	2
F_2	x	-4	-4/3	0	-1/3	4/3
	y	-2	0	1	3/4	2
F_3	x	-6	-1	0	3	1
	y	-11/3	-1/3	1/3	7/3	1

La funzione di proporzionalità inversa

Problema

La base e l'altezza del rettangolo ABCD misurano rispettivamente 3cm e 4cm.
Determina la sua area.
Soluzione: ………………………………….
Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato?
………………………………………..
Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati.
Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare **tutti** i rettangoli equivalenti a quello assegnato?
…………………………………………………
Generalizziamo: I lati x e y di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$

x	6	8	10	1/3	4/3
y	2	3/2	6/5	36	9

Osserviamo che se fissiamo il valore di x il lato y vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella

Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché ……………………………………………………
Ti sembrano allineati? ……………………….

DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il prodotto** tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità inversa**. In simboli: y inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \frac{k}{x}$

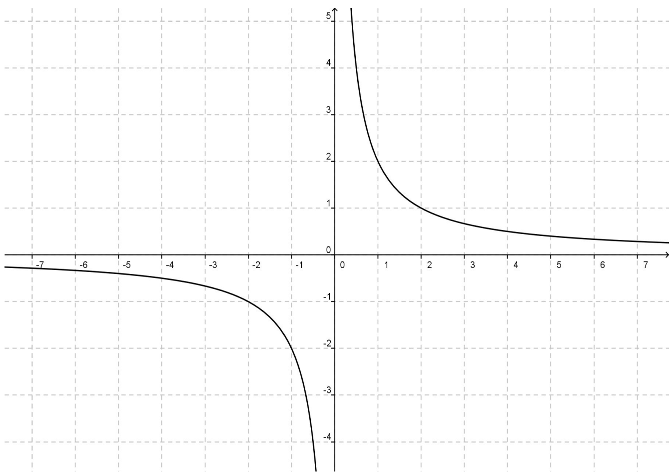
Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è una curva chiamate iperbole.
Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante k.

Caso k > 0: quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro concordi; al numero positivo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

Esempio

rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$.
Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-3	-1	-1/2	1	4	1/2	3
y	-2/3	-2	-4	2	1/2	4	2/3



e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2).
Il dominio è $D = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $\text{IM} = \mathbb{R}_0$.
Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva **è una iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel I° e III° quadrante.

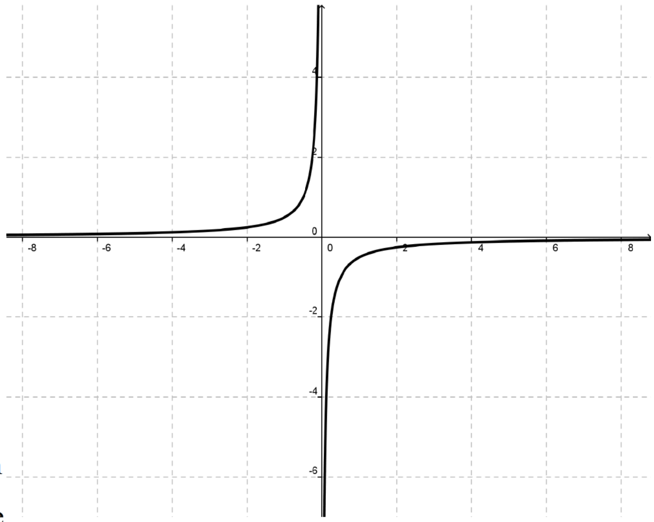
Caso k < 0: quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro discordi; al numero positivo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

<u>Esempio</u>

Rappresentare graficamente la funzione $y = -\frac{1}{2x}$.

Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-2	-1	-1/2	1	2	1/2	3/2
y	+1/4	1/2	1	-1/2	-1/4	-1	-1/3



e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y=0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, in questo caso $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $D = \mathbb{R}_0$, l'insieme immagine è $\text{IM} = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva **è una iperbole**; essa è formata da due rami che si collocano nel II° e IV° quadrante.

268 Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

a) $f_1 = -\frac{3}{2x}$ b) $f_2 = \frac{1}{x}$ c) $f_3 = \frac{5}{x}$

d) $f_4 = \frac{-3}{x}$ e) $f_5 = -\frac{1}{x}$ f) $f_6 = -\frac{2}{5x}$

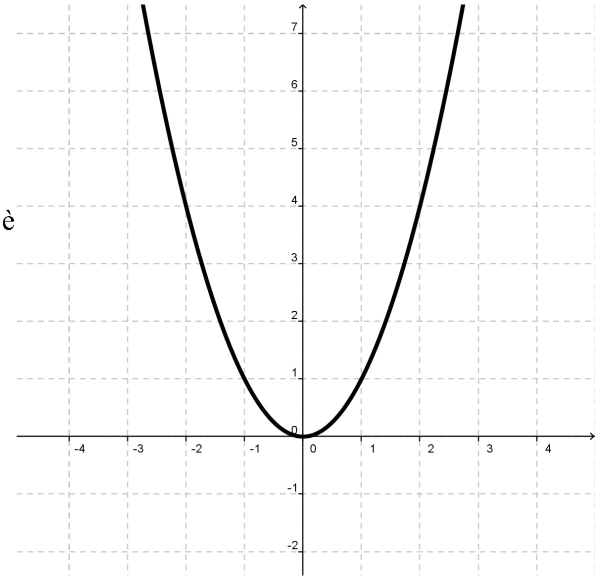
269 Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva γ $y = -\frac{1}{2x}$ e le rette r_1: $y=2$ e r_2: $y=-2$. Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A_1 = r_1 \cap \gamma$ e $A_2 = r_2 \cap \gamma$.

La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costane, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa oppure una funzione lineare:

x	-2	-1	1/2	0	2	3	3/2
y	4	1	1/4	0	4	9	9/4

Costruisci le proposizioni del tipo:
"La tabella rappresenta/non rappresenta una funzione di …………..”
Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, quella tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato.
Il dominio di tale funzione è $D=R$, mentre l'Immagine è $\text{IM}=R^{+}\cup\{0\}$.
Possiamo osservare che è costante il rapporto tra il valore della variabile dipendente e il quadrato della variabile dipendente quando è diversa da zero; essendo $\frac{y}{x^2}=1$ con $x\neq 0$ la formula in cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è, in questo caso, $y=x^2$.
Costruiamo il suo grafico, utilizzando i punti della tabella:



DEFINIZIONE. Una funzione in cui risulta **costante e diverso da zero il rapporto** tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama **funzione di proporzionalità quadratica**.
In simboli: y proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2}=k$ con $k\in\mathbb{R}$ e $k\neq 0$ o anche $y=k\cdot x^2$

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata parabola. Il punto O(0;0) si chiama vertice della parabola.

270 Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

a) $f_1=-x^2$ b) $f_2=x^2$ c) $f_3=-\frac{1}{2}x^2$

d) $f_4=-\frac{5}{2}x^2$ e) $f_5=\frac{3}{4}x^2$ f) $f_6=\frac{7}{3}x^2$

271 Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni, completando:
- se $k>0$ allora i punti della parabola si trovano……………..
- se $k<0$ allora i punti della parabola si trovano ……………..
- se $k>1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=x^2$? ………………
- se $0<k<1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=x^2$?……………
- se $k<-1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=-x^2$?……………
- se $-1<k<0$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y=-x^2$?…………

272 Determina la distanza del punto di ascissa $x=-2$ della parabola $y=3x^2$ dal suo vertice.

273 Sono assegnate le funzioni f_1: $y=(-x)^2$ e f_2: $y=-x^2$ di proporzionalità quadratica.

h) Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione.
i) Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune.
j) Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico.
k) Puoi confermare la risposta data alla prima richiesta?

274 Completa la seguente tabella:

funzione	in linguaggio comune	formula	tipo
F_1	Associa ad ogni x reale il valore –2/3		
F_2	Associa ad ogni x reale il triplo del suo quadrato		
F_3		$y=-5x^2$	
F_4	Associa ad ogni x reale il suo doppio aumentato di 3/2		
F_5	Associa ad ogni x reale diverso da zero l'opposto del suo reciproco		
F_6		$y=-5x$	

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate
Per quale/i è vero che per qualunque x del dominio è $\mathrm{IM}=\mathbb{R}$

275 Il rettangolo ABCD ha il lato AB triplo del lato BC. Indica $\overline{BC}=x$; determina il perimetro del rettangolo in funzione di x. $2p=\dots\dots\dots$
Spiega perché è necessaria la condizione $x>0$; rappresenta graficamente nel riferimento cartesiano la funzione perimetro.
Determina ora l'area in funzione di x, $area=\dots\dots\dots$; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

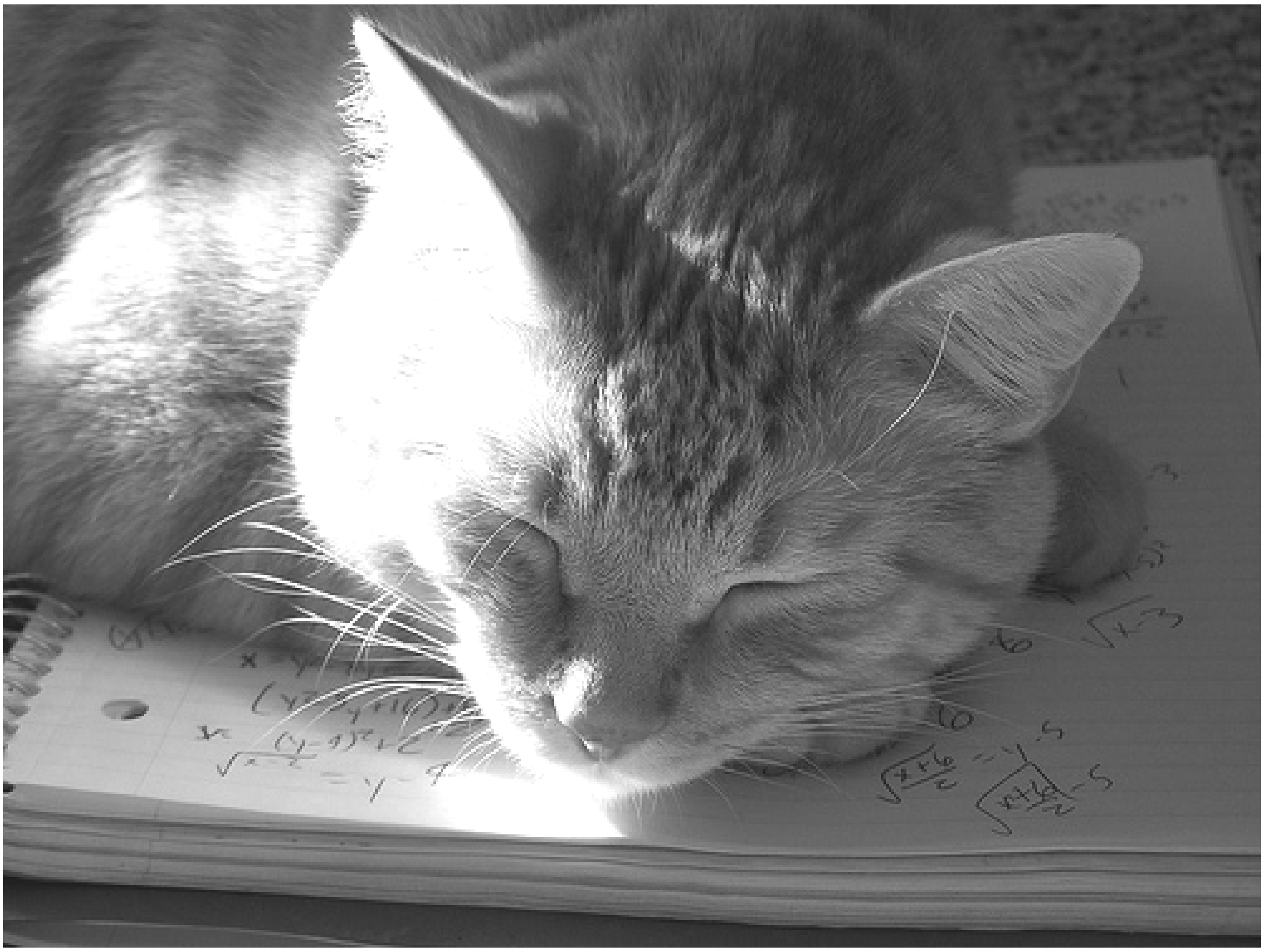
276 Il triangolo rettangolo ABC, retto in A ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore $\overline{AB}=x$ e spiega perché è necessaria la condizione $x>0$. Determina in funzione di x l'area del triangolo. $area=\dots\dots\dots$ rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale.
Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di $20cm^2$.
Calcola in funzione di x il perimetro del triangolo: $2p=\dots\dots\dots$, rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di x.

277 Nel triangolo isoscele ABC il lato obliquo AB è doppio della base BC; indica $\overline{BC}=x$ e determina in funzione di x il perimetro del triangolo. $2p=\dots\dots\dots$
Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.
Se il perimetro è cm120, quanto misurano i lati del triangolo?
Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

MATEMATICA C^3

ALGEBRA 1

3. LE BASI DEL CALCOLO LETTERALE



Ernest!
Photo by: Ssmallfry
taken from: http://www.flickr.com/photos/ssmallfry/2262374892/

1. ESPRESSIONI LETTERALI E VALORI NUMERICI

►1. Lettere per esprimere formule

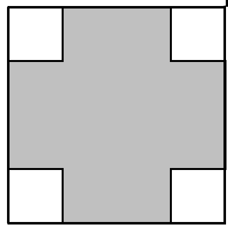
In tutte le villette a schiera di recente costruzione del nuovo quartiere Stella, vi è un terreno rettangolare di larghezza 12m e lunghezza 25m. Quanto misura la superficie del terreno?

Il prodotto delle dimensioni rappresenta la misura richiesta: $S=(25\cdot 12)m^2=300$ Il semplice problema che abbiamo risolto è relativo ad un caso particolare; quel terreno con quelle dimensioni. Ma se le dimensioni fossero diverse?

La procedura per determinare la misura della superficie ovviamente è sempre la stessa e la possiamo esprimere con una formula: , n $A=b\cdot h$ ella quale abbiamo indicato con *b* la misura di una dimensione e con *h* la misura dell'altra dimensione, assegnate rispetto alla stessa unità di misura.

La formula ha carattere generale; essa serve ogni qualvolta si chiede di determinare la superficie di un rettangolo, note le misure delle dimensioni (base e altezza) rispetto alla stessa unità di misura.

In geometria si utilizzano tantissime formule che ci permettono di determinare perimetro e area delle figure piane, superficie laterale e totale e volume dei solidi. Nelle formule le lettere sostituiscono le misure di determinate grandezze, tipiche di quella figura o di quel solido.



1 Esprimi con una formula l'area della superficie della zona colorata, indicando con l la misura del lato AB e con b la misura di AC.
Svolgimento: l'area del quadrato è…., l'area di ciascuno dei quadratini bianchi è…. Pertanto l'area della superficie in grigio è….

►2. Lettere per descrivere schemi di calcolo

L'insegnante chiede agli alunni di scrivere "il doppio della somma di due numeri".

- Antonella scrive: $2\cdot(3+78)$
- Maria chiede "quali sono i numeri? Se non li conosco non posso soddisfare la richiesta"
- Giulia scrive: $2\cdot(a+b)$

Maria si è posta il problema ma non ha saputo generalizzare la richiesta. Antonella si è limitata ad un caso particolare. Giulia ha espresso con una formula l'operazione richiesta dall'insegnante.

L'uso di lettere dell'alfabeto per indicare numeri ci permette di generalizzare uno schema di calcolo

2 Scrivi l'espressione algebrica letterale relativa alla frase " eleva al quadrato la differenza tra il cubo di un numero e il doppio del suo quadrato"
Svolgimento: detto a il numero generico, il cubo di *a* si indica con…, il doppio quadrato di *a* si indica con … e infine il quadrato della differenza sarà: …………

3 Traduci in parole della lingua italiana il seguente schema di calcolo: $(a-b)^3$
Svolgimento: indicati con a e b due generici numeri la traduzione dell'espressione algebrica in parole sarà: "…………………"

DEFINIZIONE. Un'**espressione letterale** o **espressione algebrica** è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.

Osservazione 1: per scrivere un'espressione letterale ci si deve attenere a regole precise, quelle stesse che utilizziamo per scrivere espressioni numeriche.
Per esempio, la scrittura $3\cdot 4+$ non è corretta, in quanto il simbolo + dell'addizione deve essere seguito da un altro numero per completare l'operazione. Analogamente non è corretta l'espressione letterale $a\cdot c+$

Osservazione 2: come nelle espressioni numeriche le parentesi indicano la priorità di certe operazioni rispetto ad altre.
La formula $a\cdot(x+y)$ specifica "il prodotto di un numero per la somma di due altri" . Essa è diversa da che $a\cdot x+y$ rappresenta "la somma del prodotto di due numeri con un terzo numero".

4 Individua tra quelle sottostanti le espressioni letterali scritte correttamente:

1) $b\cdot\frac{4}{5}+\left(3-\frac{7}{2}\right)\cdot a-a$ 2) $a\cdot+2-b^4$ 3) $(\ x\cdot(a-b)^2+(x-3)$

4) $x^y-a:2$ 5) $-a+4b+c$

Svolgimento: sono corrette la 1, la 4 e la 5; la 2 presenta un doppio segno di operazioni $\cdot+$, la 3 ha la prima parentesi tonda che non è stata chiusa.

►3. Lettere per esprimere proprietà

Per esprimere le proprietà delle operazioni tra numeri si usano le lettere per indicare che valgono per numeri qualsiasi.
La scrittura $(a+b)+c=a+(b+c)$ esprime la proprietà associativa dell'addizione. In essa le lettere a, b, c indicano numeri qualsiasi. I due schemi di calcolo ci dicono che per sommare tre numeri, è indifferente aggiungere alla somma dei primi due il terzo oppure aggiungere al primo la somma degli altri due.

5 Collega con una freccia la proprietà dell'operazione con la sua scrittura attraverso lettere:

PROPRIETÀ	ESPRESSIONE
Commutativa dell'addizione	$\boxed{a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y}$
Associativa della moltiplicazione	$\boxed{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$
Distributiva del prodotto rispetto alla somma	$\boxed{a+b=b+a}$

6 Esprimere con le lettere la proprietà commutativa della moltiplicazione
Svolgimento: considerati a e b due numeri qualsiasi, la proprietà commutativa si esprime per mezzo dell'espressione………; cioè ……………………….

►4. Il valore numerico di un'espressione letterale

Ogni espressione letterale rappresenta uno schema di calcolo in cui le lettere che vi compaiono sostituiscono numeri. L'espressione letterale $2\cdot x^2+x$ traduce una catena di istruzioni che in linguaggio naturale sono così descritte: "prendi un numero; fanne il quadrato; raddoppia quanto ottenuto; aggiungi al risultato il numero preso inizialmente".
Questa catena di istruzioni si può anche rappresentare in modo schematico $x\rightarrow x^2\rightarrow 2\cdot x^2\rightarrow 2\cdot x^2+x$ e può essere usata per istruire un esecutore a "calcolare" l'espressione letterale quando al posto della lettera x si sostituisce un numero.
Calcoliamo il valore dell'espressione $2\cdot x^2+x$, sostituendo alla lettera il numero naturale 5.
Seguiamo la schematizzazione $x\rightarrow x^2\rightarrow 2\cdot x^2\rightarrow 2\cdot x^2+x$ e otteniamo: $5\rightarrow 25\rightarrow 50\rightarrow 55$.
Il risultato è 55.
Più brevemente scriviamo 5 nell'espressione letterale al posto di x: otteniamo l'espressione numerica il cui $2\cdot 5^2+5$ risultato è 55.
E se al posto di x sostituiamo -5? Cambia il risultato?
Bene, eseguiamo la sostituzione: $2\cdot(-5)^2+(-5)=$ = …….. Lasciamo a te il calcolo finale.
Ti sei accorto che il risultato è cambiato.

DEFINIZIONI
In un'espressione letterale **le lettere** rappresentano **le variabili** che assumono un preciso significato quando vengono sostituite da numeri.
Chiamiamo **valore di un'espressione letterale** il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere sostituiamo un numero. Il valore dell'espressione letterale **dipende dal valore assegnato alle sue variabili**.

7 Consideriamo l'espressione letterale $E=-3\cdot a+2\cdot(-a+1)$.
Osserviamo che vi compare una sola variabile, la lettera *a*; supponiamo che E rappresenti uno schema di calcolo tra numeri interi relativi. Determiniamo il valore dell'espressione per alcuni della sua variabile:
$a=-2 \rightarrow -3\cdot(-2)+2\cdot(-(-2)+1)=+6+2\cdot(2+1)=6+6=12$
$a=1 \rightarrow -3\cdot(1)+2\cdot(-(1)+1)=-3+2\cdot(-1+1)=-3+0=-3$
$a=-1 \rightarrow$ …………………
Costruiamo una tabella ponendo in una riga i valori della variabile e nell'altra i corrispondenti valori di E:

a	-2	1	-1
E	12	-3	

8 L'espressione letterale $E=-3\cdot a+2\cdot(-a+1)$ rappresenta ora uno schema di calcolo tra numeri razionali relativi; completa la tabella:

a	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{5}$	-11	0
E				

R. $[-2;\ 9;\ 57;\ 2]$

Ad ogni valore razionale attribuito alla variabile, corrisponde un valore dell'espressione assegnata.

9 Calcola il valore dell'espressione letterale le $E=\frac{3}{7}\cdot a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot(a-b)+a-b$ cui variabili a, b rappresentano numeri razionali, per i valori assegnati nella tabella sottostante.
Svolgimento: se vogliamo calcolare il valore dell'espressione letterale dobbiamo scegliere due numeri razionali, uno da assegnare alla variabile a, l'altro alla variabile b.

a	3	0	2	$-\frac{3}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
E				

Risposte: $(3,-3)\rightarrow-\frac{6}{7};\ \left(0,-\frac{1}{2}\right)\rightarrow\frac{1}{4};\ \left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\rightarrow\frac{27}{28}$

In conclusione, ad ogni coppia di numeri razionali, corrisponde un numero razionale dell'espressione.

10 Calcolare il valore numerico della seguente espressione: $3a(a-b)$ per *a* =1, *b* =1
Svolgimento: $3\cdot1\cdot(1-1)=3\cdot1\cdot0=0$.

11 Calcolare il valore numerico dell' espressione: $\frac{a}{a-3}+\frac{b}{3-b}$ per *a* = -1, *b* = 0
Svolgimento: = $\frac{-1}{-1-3}+\frac{0}{3-0}$ ....

12 Calcola il valore di $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$ costruita con le variabili x e y che rappresentano numeri razionali.
L'espressione letterale assegnata traduce il seguente schema di calcolo:" la divisione tra la differenza di due numeri e il triplo del primo numero". Completa la seguente tabella:

x	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{3}{4}$	-4
y	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2
E				

Ti sarai accorto che in alcune caselle colorate compare lo stesso valore per E: perché secondo te succede questo fatto?
Vi sono, secondo te, altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?

►5. Condizione di esistenza di un’espressione letterale

Ti proponiamo adesso alcuni casi particolari, sempre riferiti alla stessa espressione $E=\frac{x-y}{3\cdot x}$

1° caso:

x	Y	E
1	1	0

Il numeratore della frazione è 0, mentre il denominatore vale 3; il calcolo finale è dunque $\frac{0}{3}=0$

13 *Vi sono secondo te altre coppie che fanno assumere ad E quello stesso valore?*

2° caso:

x	y	E
0	25	

Invece di mettere un valore ad E, abbiamo messo dei punti di domanda perché in questo caso il numeratore della frazione è -25 mentre il denominatore vale 0;

il calcolo finale è dunque $\frac{-25}{0}=$ Impossibile.

14 *Vi sono secondo te altre coppie che rendono impossibile il calcolo del valore per E?*

Non possiamo allora concludere che per ogni coppia di numeri razionali (x , y) l’espressione E assume un numero razionale. Per poter calcolare il valore di E non dobbiamo scegliere coppie aventi x uguale a zero.
Scriveremo quindi come premessa alla ricerca dei valori di E la **Condizione di Esistenza** $x\neq 0$
L’esempio appena svolto ci fa capire che di fronte a un’espressione letterale dobbiamo riflettere sullo schema di calcolo che essa rappresenta prima di assegnare valori alle variabili che vi compaiono.
Se l’espressione letterale presenta una divisione in cui il divisore contiene variabili, dobbiamo stabilire la **C**ondizione di **E**sistenza, eliminando quei valori che rendono nullo il divisore.
Per comprendere la necessità di porre le condizioni d’esistenza ricordiamo la definizione di divisione.
Quanto fa 15 diviso 5? Perché?
In forma matematica: $15:5=3$ perché $3\cdot 5=15$. Quindi, generalizzando; $a:b=c$ se $c\cdot b=a$.
Vediamo ora cosa succede quando uno dei numeri è 0.
Quanto fa $0:5?$
Devo cercare un numero che moltiplicato per 5 mi dia 0: trovo solo 0; infatti $0\cdot 5=0$.
Quanto fa $15:0?$
Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 15: non lo trovo; infatti nessun numero moltiplicato per 0 fa 15. Quindi, $15:0$ è impossibile perché non esiste x per il quale $x\cdot 0=15$.
Quanto fa $0:0?$
Devo cercare un numero che moltiplicato per 0 mi dia 0: non né trovo solo uno. Infatti, qualunque numero moltiplicato per 0 fa 0. Per esempio, $0:0=33$ infatti $33\cdot 0=0$, anche $0:0=-189{,}67$ infatti $-189{,}67\cdot 0=0$, $0:0=0$ infatti $0\cdot 0=0$, ancora $0:0=10^{99}$ infatti $10^{99}\cdot 0=0$. Quindi $0:0$ è indeterminato, perché non è possibile determinare un x tale che $x\cdot 0=0$, per qualunque valore di x si ha $x\cdot 0=0$.

Consideriamo l’espressione letterale $E=\frac{a-b}{a+b}$ dove a e b rappresentano numeri razionali. Premettiamo :

- ✓ la descrizione a parole dello schema di calcolo: “divisione tra la differenza di due numeri e la loro somma”
- ✓ la domanda che riguarda il denominatore: “quando sommando due numeri razionali otteniamo 0 al denominatore? “
- ✓ la **C**ondizione di **E**sistenza: “ a e b non devono essere numeri opposti”.

Siamo ora in grado di completare la tabella:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E					

Dalla Condizione di Esistenza, ci accorgiamo subito che la prima coppia e la quarta sono formate da numeri opposti, pertanto non possiamo con esse calcolare il valore di E. L’ultima coppia è formata da numeri uguali pertanto la loro differenza è 0; il numeratore si annulla e quindi il valore di E è 0. Per la coppia $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ il valore di E è -1 mentre è 1 per la coppia $\left(\frac{3}{4},0\right)$ vale 1.

La tabella verrà quindi così completata:

a	3	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
b	-3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{19}{2}$
E	impossibile	-1	1	impossibile	0

15 Adesso prova tu con l'espressione $E=-\frac{x-2}{2x^2}$ completando la tabella:

x	2	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$
E				

16 Calcola il valore numerico dell'espressione: $\frac{3x-1}{x}$ per $x=0$

Svolgimento: Sostituendo alla x il valore assegnato si ha una divisione per........... e quindi………

►6. Altri esercizi

17 Scrivi la formula che ci permette di calcolare l'area di un trapezio avente base maggiore $B=5$ cm, base minore $b=2$ cm e altezza $h=4$ cm.

18 Scrivi la formula che ci consente di calcolare il perimetro di un quadrato di misura *l*.

19 Determina l'altezza h relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC.

CASO NUMERICO: $\overline{AB}=8m.$ $\overline{AC}=15m.$

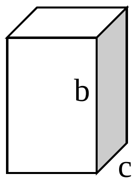
CASO GENERALE: Indica con x e y le misure dei cateti, e determina la formula per calcolare la misura di h_i .

20 Il volume della scatola avente le dimensioni di 7cm. 10cm. 2cm. è ……….

Generalizza la questione indicando con a, b, c la misura delle sue dimensioni ……………

Se raddoppiamo ciascuna dimensione allora il volume diventa

$\alpha)\ 2\cdot a\cdot b\cdot c$ $\beta)\ a^2\cdot b^2\cdot c^2$ $\gamma)\ 6\cdot a\cdot b\cdot c$ $\delta)\ 8\cdot a\cdot b\cdot c$



Scrivi sotto forma di espressioni letterali le seguenti frasi

21 Moltiplica *a* per l'inverso di *a*. $\left[a\cdot\frac{1}{a}\right]$

22 Moltiplica *a* per l'opposto del cubo di *a*.

23 Sottrai ad *a* l'inverso di *b*. $\left[a-\frac{1}{b}\right]$

24 Somma al triplo di *a* il doppio quadrato di *b*.

25 Sottrai il doppio di *a* al cubo di *a*. $[a^3-2a]$

26 Moltiplica l'inverso di *b* per il quadrato dell'inverso di *a*.

27 Somma al cubo di *a* il quadrato della somma di *a* e *b*.

28 Dividi il quadrato di *a* per il triplo cubo di *b*.

29 Moltiplica il quadrato di *b* per l'inverso del cubo di *a*.

Scrivi con una frase le seguenti espressioni

30 $3a$ [Il triplo di *a*]

31 $2b-5a$

32 $a\cdot\frac{1}{a}$

33 $\frac{2a}{3b^2}$ [Dividi il doppio di *a* per il triplo del quadrato di *b*]

34 $(a+b)^2$

35 $\frac{3x+y}{2x^2}$

Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni algebriche:

36 $3x^2-\frac{1}{4}x^2$ per $x=\frac{1}{2}$ *Svolgimento:* $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\ldots\ldots\ldots=\frac{11}{16}$

37 $5a^2b$ per $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{5}$ *Svolgimento:* $5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

38 $4a+a^3$ per $a=2$ $[16]$

39 $2a+5a^2$ per $a=-1$ $[3]$

40 $3x+2y^2(xy)$ per $x=1,\ y=-\frac{1}{2}$ $\left[\frac{11}{4}\right]$

41 $a^2-b^{-1}+ab$ per $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

42 $3a^2b-7ab+a$ per $a=1,\ b=3$ $[-11]$

43 $3xy-2x^2+3y^2$ per $x=\frac{1}{2},\ y=2$ $\left[\frac{29}{2}\right]$

44 $\frac{2}{3}\cdot a\left(a^2-b^2\right)$ per $a=-3,\ b=-1$ $[-16]$

45 $\frac{xy}{x}+3xy^3$ per $x=2,\ y=-1$ $[-7]$

46 $\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}+2a+3b$ per $a=\frac{1}{4},\ b=-2$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

47 $3x^3+2xy\left(\frac{x^2}{y}\right)+2y^2$ per $x=-2,\ y=\frac{3}{4}$ $\left[-\frac{311}{8}\right]$

48 $\frac{4a-7b}{(2a+3b)^3}\cdot ab^3$ per $a=-\frac{1}{2},\ b=1$ $\left[\frac{9}{16}\right]$

49 $\frac{x}{x+3}+y^2-\frac{xy-3x+y}{(xy)^2}$ per $x=3,\ y=\frac{1}{3}$ $\left[\frac{149}{18}\right]$

51 $\frac{(4a-2b)\cdot 2a^2}{3b^3}\cdot\frac{3}{4}ab+a^3$ per $a=1,\ b=-1$ $[4]$

52 $\frac{4x^2-5xy+3y}{6x+y^2}$ per $x=-1,\ y=2$ $[-10]$

53 $\frac{3}{2}\cdot a^2+\frac{1}{2}a-1$ per $a=0\ ;\ a=-1\ ;\ a=1$

54 $-a^2\cdot b\cdot c^3$ per $(a=0;\ b=1;\ c=-1)$ e per $\left(a=-1;\ b=\frac{9}{16};\ c=\frac{4}{3}\right)$

55 $-\frac{3}{2}a+2b^2+11$ per $\left(a=-20;\ b=-\frac{1}{2}\right)$ e per $\left(a=\frac{2}{3};\ b=0\right)$

56 $2\cdot x^5-8\cdot x^4+3\cdot x^3+2\cdot x^2-7\cdot x+8$ per $x=0;\ x=-1;\ x=1$

57 $-a^2+\frac{1}{a}-3\cdot a^3$ per $a=\frac{1}{3};\ a=-1;\ a=0\ ;\ a=1$

Sostituendo alle lettere i numeri, affianco indicati, stabilisci se le seguenti espressioni hanno significato:

58 $\frac{x+3}{x}$ *per* $x=0$ SI NO

59 $\frac{x^2+y}{x}$ *per* $x=3,\ y=0$ SI NO

60 $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ *per* $a=1,\ b=1$ [non ha significato perché $\frac{4}{0}$ non è un numero]

61 $\frac{5x^2+3y-xy}{(x^2+y)^3}$ *per* $x=2,\ y=-2$ SI NO

62 $\frac{a^3+b+6a^2}{a^2+b^2+3ab-3a^2}$ *per* $a=1,\ b=\frac{4}{3}$ SI NO

Lettere per verificare/ confutare uguaglianze o proprietà

63 Sostituendo alle lettere numeri razionali arbitrari, determina se le seguenti uguaglianze tra formule sono **V**ere o **F**alse

$a^2+b^2=(a+b)^2$ V F

$(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$ V F

$(5a-3b)\cdot(a+b)=5a^2+ab-3b^2$ V F

64 Se n è un qualunque numero naturale, l'espressione $2\cdot n+1$ dà origine

[A] ad un numero primo [B] ad un numero dispari

[C] ad un quadrato perfetto [D] ad un numero divisibile per 3

65 Quale formula rappresenta un multiplo di 5, qualunque sia il numero naturale attribuito ad n?

[A] $5+n$ [B] n^5 [C] $5\cdot n$ [D] $\frac{n}{5}$

2. MONOMI

►1. L’insieme dei monomi

D’ora in poi quando scriveremo un’espressione letterale in cui compare l’operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l’operazione. Così l’espressione verrà scritta in modo

$5\cdot a^2+\frac{3}{8}\cdot a\cdot b-7\cdot b^2$ più compatto $5a^2+\frac{3}{8}ab-7b^2$.

> DEFINIZIONE. Una espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama **monomio.**

Esempi

- L’espressione nelle due variabili a e b $E=5\cdot 2a^2\frac{3}{8}ab7b^2$ è un monomio perché vediamo che numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.
- L’espressione $E=2a^2-ab^2$ non è un monomio poiché tra le lettere compare anche il segno di sottrazione.

66 Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi:

$E_1=35x^2+y^2;\quad E_2=-4^{-1}ab^4c^6;\quad E_3=\frac{4}{x}y^2;\quad E_4=-\frac{87}{2}x^2z$

Per rispondere in modo corretto devo individuare quelle espressioni in cui compare solamente la ……………; pertanto sono monomi ……………….

Osservazioni

Gli elementi di un monomio sono **fattori**, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche **potenze**, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

> DEFINIZIONE. Un **monomio** si dice **ridotto in forma normale** quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempio

Il monomio $E=5\cdot 2a^2\frac{3}{8}ab7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna. Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$; eseguiamo il prodotto di potenze con le stesse basi otteniamo a^3b^3 . Il monomio in forma normale è $E=\frac{105}{4}a^3b^3$

> Procedura per ridurre in forma normale un monomio
> **- moltiplicare tra loro i fattori numerici**
> **- moltiplicare le potenze con la stessa base**

67 Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$\frac{4}{9}ab18c^3 2^{-2}a^3b=\frac{\dots}{\dots}a^{\dots}b^{\dots}c^{\dots};\qquad -x^5\frac{1}{9}y^4(-1+5)^2y^7=\dots\dots\dots$

> DEFINIZIONE. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama **coefficiente.**

Esempio

Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi e i rispettivi coefficienti:

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1

DEFINIZIONI
Se il coefficiente del monomio è zero il **monomio** si dice **nullo.**
Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale ne costituisce la **parte letterale.**

Esempio

L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$

è un monomio dal momento che il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3 b c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione;

il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Controesempi

L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3+bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati oltre che dalla moltiplicazione anche dalla addizione.

L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$.

DEFINIZIONE. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono **simili.**

Esempio

Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0{,}5\,a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$. L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

DEFINIZIONE. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono **monomi opposti.**

Esempio

I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.

Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$, ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti

68 Nell'insieme $M=\left\{-\frac{34}{5}a^3b\ ,\ 3^2a^2b^4\ ,\ \frac{1}{3}\mathrm{ab}^3\ ,\ a^3b\ ,\ -a\ ,\ 7\mathrm{a}^2b^4\ ,\ -\frac{1}{3}\mathrm{ab}^3\ ,\ -89\mathrm{a}^3b\right\}$ dei monomi, determina i sottoinsiemi **S** dei monomi simili e in essi le coppie di monomi opposti facendone una rappresentazione con diagrammi di Venn.

DEFINIZIONI
Il **grado complessivo** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.
Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il **grado** del monomio **rispetto a quella variabile.**

Esempio

Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6 ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale (3+1+2=6). Rispetto alla variabile a è di terzo grado, rispetto alla variabile b è di primo grado ed infine è di secondo grado rispetto alla variabile c.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o più variabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?
Consideriamo il monomio $56a^3b^0c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo: . Se in un $56a^3\cdot 1\cdot c^2=56a^3c^2$ monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3a^0x^0=-3\cdot 1\cdot 1=-3$.

Osservazione
Esistono **monomi di grado 0**; essi presentano solo il coefficiente e pertanto **sono** equiparabili ai **numeri razionali.**

►2. Il valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo numeri.

Esempio

Calcola il valore del monomio $3x^4y^5z$ per i valori $x=-3\ ;\ y=5\ ;\ z=0$
Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3\cdot(-3)^4\cdot 5^5\cdot 0=0$ essendo uno dei fattori nullo.

Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule della geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo = $\frac{1}{2}bh$; area del quadrato = l^2 ; perimetro del quadrato = $4l$; area del rettangolo = bh ; volume del cubo = l^3 ecc.
Esse acquistano significato quando al posto delle lettere sostituiamo numeri positivi che rappresentano le misure della figura considerata.

69 Calcola l'area di un triangolo che ha altezza $h=2{,}5$ e base $b=\frac{3}{4}$.

Il monomio che permette di calcolare l'area del triangolo è ……, sostituendo i valori numerici alle variabili ottengo ………

Individua l'esatta definizione tra quelle proposte

70 Un monomio è:
[A] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto operazioni di moltiplicazione e potenza con esponente intero;
[B] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto addizioni e moltiplicazioni tra termini numerici e termini letterali;
[C] un'espressione algebrica letterale nella quale figurano soltanto prodotti di fattori numerici e letterali;
[D] un'espressione algebrica letterale nella quale numeri e lettere sono legati dalle operazioni razionali.

71 Il grado complessivo di un monomio è:
[A] l'esponente della prima variabile che compare nel monomio;
[B] la somma di tutti gli esponenti che compaiono sia ai fattori numerici sia a quelli letterali;
[C] il prodotto degli esponenti delle variabili che compaiono nel monomio;
[D] la somma degli esponenti di tutte le variabili che vi compaiono.

72 Due monomi sono simili se:
[A] hanno lo stesso grado;
[B] hanno le stesse variabili;
[C] hanno lo stesso coefficiente;
[D] hanno le stesse variabili con rispettivamente gli stessi esponenti.

73 Nell'insieme *E*, i cui elementi sono espressioni letterali, determina il sottoinsieme *M* dei monomi:

$$E=\left\{3+\mathrm{ab};\ -2\mathrm{a};\ -\frac{7}{3}\mathrm{ab}^2;\ -\left(\frac{4}{3}\right)^3;\ \mathrm{a}^2\mathrm{bc}\cdot\frac{-2}{a^3};\ 4\mathrm{a}^{-3}\mathrm{b}^2\mathrm{c}^5;\ -x\ ;\ 8\mathrm{x}^4-4\mathrm{x}^2;\ -y\cdot\left(2\mathrm{x}^4+6\mathrm{z}\right);\ \frac{\mathrm{abc}^9}{3+7^{-2}}\right\}$$

$M=\{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\}$

74 Completa: Nel monomio $m=-\frac{5}{2}a^3x^2y^4z^8$ distinguiamo Coefficiente = ……….

Parte letterale = ……….. Grado complessivo = …… Il grado della lettera x è ………

75 L'insieme dei monomi: $M=\left\{\frac{1}{3}abc^2\ ;\ \frac{1}{3}a^2bc\ ;\ -3abc^2\ ;\ -\frac{1}{3}abc^2\right\}$ contiene

[A] monomi aventi lo stesso coefficiente
[B] monomi con la stessa parte letterale
[C] monomi nelle stesse variabili
[D] monomi dello stesso grado
[E] monomi di grado dispari

76 Motiva brevemente la verità o falsità delle seguenti proposizioni:

"Se due monomi hanno ugual grado allora sono simili" V F perché … … … … … … … ...
"Se due monomi sono simili allora hanno lo stesso grado" V F perché … … … … … … … ...

77 Quale diagramma di Venn rappresenta in modo corretto la seguente proposizione:
"alcune espressioni letterali non sono monomi"
legenda: L insieme della espressioni letterali, M insieme dei monomi

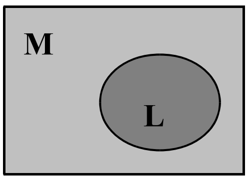


Fig 2

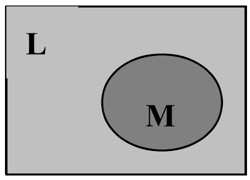


Fig1

78 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) Il valore del monomio $-a$ è negativo per qualunque a diverso da zero V F
b) Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero V F
c) Il monomio b^6 è il cubo di b^2 V F
d) L'espressione ab^{-1} è un monomio V F
e) Il valore del monomio ab è nullo per a = 1 e b = -1 V F

►3. Moltiplicazione di due monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza, divisione.
Ricordiamo che definire in un insieme un'operazione significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.
La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano fattori e il risultato si chiama prodotto, proprio come negli insiemi numerici.

DEFINIZIONE. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti, per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

<u>Esempio</u>

Assegnati i monomi $m_1=-4x^2yz^3$ $m_2=\frac{5}{6}x^3z^6$ il monomio prodotto è

$$m_3=\left(-4\cdot\frac{5}{6}\right)\left(x^2\cdot x^3\right)\cdot y\cdot\left(z^3\cdot z^6\right)=-\frac{10}{3}x^5yz^9$$

<u>Procedura per moltiplicare due monomi</u>
La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:

- nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;
-nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.

79 Determina il prodotto dei monomi delle seguenti coppie:

$m_1=-x^2y^4;\quad m_2=-\frac{8}{5}x^2y;\quad m_1\cdot m_2=m_3=+\frac{8}{5}x^{\cdots}y^{\cdots}$

$m_1=-\frac{15}{28}xy^3;\quad m_2=-\frac{7}{200}x^2y^2;\quad m_1\cdot m_2=m_3=\cdots\cdots\cdots$

$m_1=a^5b^5y^2;\quad m_2=-\frac{8}{5}a^2y^2b^3;\quad m_1\cdot m_2=m_3=\cdots\cdots$

80 Determina il grado dei monomi fattori dati nell'esercizio precedente e determina il grado del monomio prodotto:

grado di m_1	grado di m_2	grado di m_3

Puoi concludere che il grado del monomio prodotto è:
[A] Il prodotto dei gradi dei suoi fattori
[B] La somma dei gradi dei suoi fattori
[C] Minore del grado di ciascuno dei suoi fattori
[D] Uguale al grado dei suoi fattori

Le proprietà della moltiplicazione:

- commutativa: $m_1\cdot m_2=m_2\cdot m_1$
- associativa: $m_1\cdot m_2\cdot m_3=(m_1\cdot m_2)\cdot m_3=m_1\cdot(m_2\cdot m_3)$
- 1 è l'elemento neutro: $1\cdot m=m\cdot 1=m$
- se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0\cdot m=m\cdot 0=0$

Esegui le seguenti moltiplicazioni

81 $(-2xy)\cdot(+3ax)$ $\qquad 6a(-2ab)(-3a^2b^2)$ $\qquad -x(14x^2)$

82 $(-1)(-ab)$ $\qquad 1{,}5a^2b\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$ $\qquad -\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$

83 $1{,}\bar{6}\,xa(1{,}2xy^2)$ $\qquad \left(\frac{12}{7}m^2n^3\right)\left(-\frac{7}{4}mn\right)$ $\qquad \left(-\frac{5}{4}ax^2\right)\left(\frac{3}{10}x^3y\right)$

84 $12ab\left(-\frac{1}{2}a^3b^3\right)$ $\qquad \left(-\frac{15}{8}at^2\right)\left(\frac{6}{5}t^3x\right)$ $\qquad \left(\frac{12}{4}a^2n^2\right)\left(-\frac{7}{4}ax\right)$

85 $2{,}5ab^2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\cdot 1{,}5a$ $\qquad \left(-\frac{2}{9}xz\right)\left(-\frac{1}{4}z^3\right)(27x)$ $\qquad -8\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x^3a^4\right)$

►4. Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente

$$Potenza = base^{esponente} = \underbrace{base\cdot base\cdot base\cdot \ldots\ldots\cdot base}_{\text{Tante volte quanto indica l'esponente}}$$

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

DEFINIZIONE. La **potenza di un monomio** è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempi

Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1 = -\frac{1}{2}a^2 b$.

$m_1 = -\frac{1}{2}a^2 b$ elevo al quadrato $\left(-\frac{1}{2}a^2 b\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (a^2)^2 \cdot (b)^2 = \frac{1}{4}a^4 b^2$

$m_1 = -\frac{1}{2}a^2 b$ elevo al cubo $\left(-\frac{1}{2}a^2 b\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b)^3 = -\frac{1}{8}a^6 b^3$

Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2 = 5a^3 b^2 c^2$

$m_2 = 5a^3 b^2 c^2$ elevo al quadrato $(5a^3 b^2 c^2)^2 = (5)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^2)^2 \cdot (c^2)^2 = 25a^6 b^4 c^4$

$m_2 = 5a^3 b^2 c^2$ elevo al quadrato $(5a^3 b^2 c^2)^3 = (5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^2)^3 = 125a^9 b^6 c^6$

Procedura per eseguire la potenza di un monomio

- Applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio.

- Applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l’esponente della variabile per l’esponente delle potenza.

Esegui le potenze indicate

86 $(-3x^3 y^4 z)^2 = 9x^6 y^{\cdots} z^{\cdots}$ $\left(-\frac{3}{5}abx^3 y^5\right)^3 = \frac{\cdots}{\cdots}a^3 x^{\cdots} y^{\cdots}$

87 $(a^3 b^2)^8$ $(-a^4 b^2)^7$ $(-5ab^2 c)^3$

88 $(+2a\, x^3 y^2)^2$ $\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^3$ $\left(\frac{3}{4}x^4 y\right)^3$

89 $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$ $\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$ $\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$

90 $\left[(-rs^2 t)^2\right]^3$ $\left[\left(-\frac{1}{2}x^2 y^3\right)^2\right]^3$ $\left(-\frac{3}{2}a^2 b^3\right)^2$

►5. Addizione di due monomi

L’addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell’addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano addendi e il risultato si chiama somma.

1° caso: addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempio

Calcoliamo $3x^3 + (-6x^3)$ **.**

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3 + (-6x^3) = (3 + (-6))x^3 = -3x^3$

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

91 Determina la somma dei monomi simili $8a^2 b + \left(-\frac{2}{3}\right)a^2 b + \frac{1}{6}a^2 b$

La somma è un monomio ………… agli addendi; il suo coefficiente è dato da $8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \ldots\ldots$

Quindi la somma = ………………

Proprietà della addizione:

- commutativa: $m_1+m_2=m_2+m_1$
- associativa: $m_1+m_2+m_3=(m_1+m_2)+m_3=m_1+(m_2+m_3)$
- 0 è l'elemento neutro: $0+m=m+0=m$
- per ogni monomio m esiste il monomio opposto, cioè un monomio m* tale che m + m* = 0.

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama differenza.

Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempio

Assegnati $m_1=\frac{1}{2}a^2b$ $\quad m_2=-5a^2b$ determina $m_1 - m_2$

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b-(-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b+5a^2b=\frac{11}{2}a^2b$

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo "somma algebrica di monomi"

La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio

Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^4+x^4+\frac{4}{5}x^4-2x^4-\frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{3}x^4+x^4+\frac{4}{5}x^4-2x^4-\frac{1}{2}x^4=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+1+\frac{4}{5}-2-\frac{1}{2}\right)x^4=-\frac{13}{30}x^4$$

2° caso: addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2-5a^2b^3+a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.
Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2-5a^2b^3+a^3b^2=(7a^3b^2+a^3b^2)-5a^2b^3=8a^3b^2-5a^2b^3$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

92 Determina la somma $S=2a-3ab-a+17ab+41a$.

I monomi addendi non sono tra loro simili, modifico la scrittura dell'operazione applicando la proprietà associativa in modo da affiancare i monomi simili:

$$S=2a-3ab-a+17ab+41a=(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La somma ottenuta non è un …………

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato **riduzione dei termini simili**.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempi

- Calcola la seguente somma: $s_1=3a-7a+2a+a$

s_1 è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili: $s_1=-a$

- Calcola la seguente somma: $s_2=\frac{1}{2}a^3+b-\frac{3}{4}a^3-\frac{6}{5}b$

s_2 non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $s_2=-\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{5}b$

93	$5a^2b-3a^2b$	$a^2b^2-3a^2b^2$
94	$-2xy^2+xy^2$	$-3ax-5ax$
95	$5ab-2ab$	$-3xy^2+3xy^2$
96	$-\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)-3ax^2$	$-\frac{9}{2}xy-(-xy)$
97	$6xy^2+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{4}xy^2-6xy^2$	$\frac{1}{2}xy^2+\frac{3}{2}xy^2$
98	$5ab-2ab+(-ab)-(+2ab)+ab$	$7xy^3-2xy^3$
99	$6ab-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}ab+4a^2$	$\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{2}a^3b^2$
100	$-\frac{4}{3}a^2b^3-2a^2b^3+\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^3$	$-5x^2+3x^2$
101	$(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)+\frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$	
102	$5x^3y^2+\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-(x^3y^2)+\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$	

►6. Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2\neq 0$, eseguire la divisione $d_1:d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme Q basta la condizione $d_2\neq 0$ per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio quoziente.

Esempio

- $(36x^5y^2):(-18x^3y)$

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2)=q\cdot(-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q=-2x^2y$. Infatti $(-2x^2y)\cdot(-18x^3y)=(36x^5y^2)$. Il monomio q è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura per calcolare il quoziente di due monomi

Il quoziente di due monomi è così composto:

il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati

la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili

se la potenza di alcune delle lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.

Esempio

- $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right):\left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$

Procediamo seguendo i passi sopra descritti:

$$\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right):\left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)=\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1}=-\frac{4}{3}a^2x^2y$$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione la Condizioni di Esistenza (**C.E.**): $\textbf{\textit{C.E.}}=a\neq 0 \; e \; x\neq 0 \; e \; y\neq 0$

Esempio

- $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$

Procediamo seguendo i passi sopra descritti con la **C.E.** a ≠ 0 et b ≠ 0:

$$\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)=\left(\frac{9}{20}\right)\cdot(-8)a^{2-5}b^{4-2}=-\frac{18}{5}a^{-3}b^2 .$$

Osserva che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.

In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

103 Esegui le divisioni indicate e poni le C.E.:

$15b^8:\left(-\frac{40}{3}b^3\right)=$ $\qquad$ $\left(-\frac{13}{72}x^2y^5z^3\right):\left(-\frac{26}{27}xyz\right)=$

Determina il quoziente dei monomi

104 $q_1=(-12a^7b^5c^2):(-18ab^4c)$

$q_1=+\frac{2}{\dots}a^{\dots}bc$ $\qquad$ C.E. a ≠ 0 e b ≠ … e c ≠ …

105 $q_2=\left(\frac{1}{2}a^3\right):(-4a^5)$ $\qquad$ $q_2=-\frac{1}{8}a^{\dots}$ $\qquad$ C.E. …… … … ...

106 $q_3=(-34x^5y^2):(-2yz^3)$ $\qquad$ $q_3=+17x^{\dots}y^{\dots}z^{\dots}$ $\qquad$ C.E. …………….

107 $q_4=(-a^7):(8a^7)$

108 Assegnati i monomi: $m_1=\frac{3}{8}a^2b^2$ $\quad m_2=-\frac{8}{3}ab^3$ $\quad m_3=-3a$ $\quad m_4=-\frac{1}{2}b$ $\quad m_5=2b^3$

Calcola il risultato delle seguenti operazioni, ponendo le opportune C.E.:

a) $m_1\cdot m_2\cdot(m_4)^2$ $\qquad$ b) $-m_2\cdot m_1\cdot(m_3)^2\cdot m_5$

c) $(m_3\cdot m_4)^2-m_1$ $\qquad$ d) $m3\cdot m_5-m_2$

e) $m_2:m_3+m_5$ $\qquad$ f) $m_1:m_2$

109 Quando sottraiamo due monomi opposti otteniamo

[A] Il doppio del primo termine $\qquad$ [B] Il doppio del secondo termine

[C] il monomio nullo $\qquad$ [D] 0

110 Quando dividiamo due monomi opposti otteniamo:

[A] -1 $\qquad$ [B] 0 $\qquad$ [C]1 $\qquad$ [D]il quadrato del primo monomio

111 Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a.	La somma di due monomi opposti è il monomio nullo	V	F
b.	Il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti	V	F
c.	La somma di due monomi è un monomio	V	F
d.	Il prodotto di due monomi è un monomio	V	F
e.	L'opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo	V	F

►7. Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E=\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 : (a^5b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2$

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che compaiono sono monomi

Se volessimo calcolare il valore di E per a = 10 ; b = -2 dobbiamo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in una espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione poniamo innanzi tutto la C.E. a ≠ 0 e b ≠ 0 ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

$$E=\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 : (a^5b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2=\left(-\frac{1}{8}a^6b^3\right):(a^2b)+(-2ab)\cdot\frac{3}{2}b+5ab^2=$$

$=-\frac{1}{8}ab^2-3ab^2+5ab^2$ sommando i monomi simili otteniamo $\frac{15}{8}ab^2$

E è dunque un monomio e calcolare il suo valore è decisamente più semplice.

112 Calcola $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 : (-3ab^3)$ per $a=\frac{1}{2};\ b=-1;\ c=-2$

113 Calcola $-\frac{3}{5}x^2y^2\left(-\frac{10}{9}xz^2\right)(-15xy)-0,\overline{6}x^4yz(-0,\overline{7}xy^2z)$ per $x=-\frac{1}{3};\ y=-3;\ z=0,\overline{1}$

Esegui le operazioni tra monomi

114 $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^2+x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x\right)$

115 $\left(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x+x\right)-\left(2x-\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}x+x\right)$

116 $5a+\left\{-\frac{3}{4}a-\left[2a-\frac{1}{2}a+(3\mathrm{a}-a)+0{,}5a\right]-a\right\}$

117 $-1{,}2x^2\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left[-0{,}1x(-5x)^2-(-5\mathrm{x}^2)^2\right]$

118 $\left(-\frac{3}{4}x^4a^2b\right):\left(\frac{1}{2}x^2ab\right)+\frac{2}{3}x^2a$

119 $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2y^2\right):\left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$

120 $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b^2\right)^2-\left(+\frac{1}{3}b^2a\right)^2\right]:\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)\left(-\frac{2}{5}ab\right)$

121 $\left[\left(\frac{4}{5}x+\frac{7}{10}x\right)^2:\left(\frac{1}{3}x+x+\frac{3}{4}x\right)\right]^2:\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x\right)+\left[\left(-\frac{2}{3}abx\right)^2-\left(\frac{1}{3}abx\right)^2\right]:(a^2b^2x)$

122 $\left(\frac{1}{4}xy^2\right)\left(-\frac{16}{5}x^2y\right)-8x^2y^2(-2xy)-\frac{2}{5}x\left(-\frac{5}{3}x^2\right)(+3y^3x)+\left(\frac{12}{7}xy^2\right)\left(-\frac{7}{4}x^2y\right)$

R119. $\frac{9}{64}x^3y^3$ *R120.* $\left[\frac{a^2b^3(-5\mathrm{b}+5\mathrm{a}^2b^3+3\mathrm{x})}{45\mathrm{x}}\right]$ *R121.* $\left[\frac{2812\mathrm{x}}{1875}\right]$ *R122.* $\left[\frac{x^3y^3(10\mathrm{x}+61)}{5}\right]$

3. POLINOMI

►1. Definizioni fondamentali

Un **polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi**.

Esempio

Sono polinomi: $6a+2b$; $5a^2b+3b^2$; $6x^2-5y^2x-1$; $7ab-2a^2b^3+4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in **forma normale** o **ridotto;** se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.
Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato **termine noto.**

Esempio

Il polinomio: $3ab+b^2-2ba+4-6ab^2+5b^2$; ridotto in forma normale diventa $ab+6b^2-6ab^2+4$. Il termine noto è 4

123 Riduci in forma normale il seguente polinomio: $5a^3-4ab-1+2a^3+2ab-a-3a^3$.
Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro $\overline{5a^3}\underline{-4ab}-1+\overline{2a^3}+\underline{2ab}-a-\overline{3a^3}$,
in modo da ottenere………………. Il termine noto è …….

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio.
Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempi

- $xy-5x^3y^2$ è un binomio;
- $3ab^2+a-4a^3$ è un trinomio;
- $a-6ab^2+3ab-5b$ è un quadrinomio.

Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono **uguali,** più precisamente vale il **principio di identità dei polinomi:** *due polinomi* $p(x)$ *e* $q(x)$ *sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.*
Se due polinomi sono invece formati da termini opposti, allora si dicono polinomi **opposti.**
Definiamo, inoltre, un polinomio **nullo** quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.

Esempi

- I polinomi: $\frac{1}{3}xy+2y^3-x$; $2y^3-x+\frac{1}{3}xy$ sono uguali.
- I polinomi: $6ab-3a^2+2b^2$; $3a^2-2b^3-6ab$ sono opposti.
- Il polinomio: $7ab+4a^2-ab+b^3-4a^2-2b^3-6ab-b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Il **grado complessivo** (o semplicemente **grado**) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, **grado di un polinomio rispetto ad una data lettera** l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio.

Esempi

- Il polinomio $2ab+3-4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado.
- Il grado del polinomio $a^3+3b^2a-4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più alto con cui tale lettera compare è 3.

124 Individua il grado di

a) $x^2y^2-3y^3+5yx-6y^2x^3$ rispetto alla lettera y è … …, il grado complessivo è … ...

b) $5a^2-b+4ab$ rispetto alla lettera b è … …, il grado complessivo è … ...

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio

- Il polinomio: $a^3-b^3+ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

125 Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:

$$a)\ x^3y+2y^2x^2-4x^4;\quad b)\ 2x+3-xy;\quad c)\ 2x^3y^3-y^4x^2+5x^6$$

Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera,** quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio

- Il polinomio: $\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2y-2xy^2+\frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x, e secondo le potenze crescenti della lettera y.

Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice **completo** se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n, compreso il termine noto.

Esempio

- Il polinomio: $x^4-3x^3+5x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x. Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

Osservazione

Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.

Per esempio, il polinomio $x^4-x+1+4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come: $x^4+0x^3+4x^2-x+1$.

126 Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti

$$a)\ 2-\frac{1}{2}x^2+x;\quad b)\ \frac{2}{3}-x+3x^2+5x^3;\quad c)\ 3x^4-\frac{1}{2}x^3+2x^2-x+\frac{7}{8}$$

127 Relativamente al polinomio $b^2+a^4+a^3+a^2$

Il grado massimo è …… Il grado rispetto alla lettera a è …… Rispetto alla lettera b è ……

Il polinomio è ordinato rispetto alla a? SI NO Completo? SI NO Omogeneo? SI NO

128 Scrivere un polinomio di terzo grado nelle variabili a e b che sia omogeneo.

129 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.

130 Scrivere un polinomio di quinto grado nelle variabili r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.

131 Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.

132 Scrivere un polinomio di sesto grado nelle variabili x, y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

►2. Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.
In definitiva diciamo che la **somma di due o più polinomi è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.**

133 Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2+5-3y^2x$, $x^2-xy+2-y^2x+y^3$
Svolgimento: Indichiamo la somma $(2x^2+5-3y^2x)+(x^2-xy+2-y^2x+y^3)$ *, eliminando le parentesi otteniamo il polinomio* $2x^2+5-3y^2x+x^2-xy+2-y^2x+y^3$ *, sommando i monomi simili otteniamo* $\ldots x^2-4x^{\cdots}y^{\cdots}-\ldots xy+y^3+\ldots$

La differenza di due polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l’opposto del secondo.

Esempio

$$3a^2+2b-\frac{1}{2}ab-\left(2a^2+ab-\frac{1}{2}b\right)=3a^2+2b-\frac{1}{2}ab-2a^2-ab+\frac{1}{2}b=a^2+\frac{-1-2}{2}ab+\frac{4+1}{2}b=$$
$$=a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{5}{2}b$$

Esegui le seguenti somme di polinomi

134 $a+b-b$ $\quad$ $a+b-2b$ $\quad$ $a+b-(-2b)$

135 $a-(b-2b)$ $\quad$ $2a+b+(3a+b)$ $\quad$ $2a+2b+(2a+b)+2a$

136 $2a+b-(-3a-b)$ $\quad$ $2a-3b-(-3b-2a)$ $\quad$ $(a+1)-(a-3)$

137 $(2a^2-3b)+(4b+3a^2)+(a^2-2b)$ $\quad$ $(3a^3-3b^2)+(6a^3+b^2)+(a^3-b^2)$

138 $\left(\frac{1}{5}x^3-5x^2+\frac{1}{5}x-1\right)-\left(3x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{1}{4}x-1\right)$

139 $\left(\frac{1}{2}+2a^2+x\right)-\left(\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}ax\right)+\left[-\left(-\frac{3}{2}-2ax+x^2\right)+\frac{1}{3}a^2\right]-\left(\frac{3}{2}ax+2\right)$ $\quad$ $R.\left[-x^2+x+\frac{29}{15}a^2\right]$

140 $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{6}ab\right)-\left(\frac{9}{8}ab+\frac{1}{2}a^2-2b\right)+ab-\frac{3}{4}a$ $\quad$ $R.\left[-\frac{a^2}{2}+\frac{7}{24}ab+\frac{5}{2}b\right]$

►3. Prodotto di un polinomio per un monomio

Consideriamo il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy+5x^3y^2$; indichiamo il loro prodotto con $(3x^2y)\cdot(2xy+5x^3y^2)$. Per eseguire tale moltiplicazione applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione, otteniamo: $(3x^2y)\cdot(2xy+5x^3y^2)=6x^3y^2+15x^5y^3$.
Pertanto **il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.**
Nel caso in cui il monomio è nullo il risultato della moltiplicazione è il monomio nullo.

Esempio

- $(3x^3y)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{4}{3}xy^3\right)=(3x^3y)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+(3x^3y)\cdot\left(\frac{4}{3}xy^3\right)=\frac{3}{2}x^5y^3+4x^4y^4$

Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio:

141 $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)$ *Svolgimento:* $\frac{3}{4}x^2y\cdot\left(2xy+\frac{1}{3}x^3y^2\right)=\frac{3}{2}x^{\cdots}y^{\cdots}+\frac{1}{4}x^{\cdots}y^{\cdots}$.

142 (a + b)b $\quad$ (a - b)b $\quad$ (a + b)(-b)

143 (a – b + 51)b $\quad$ (-a – b - 51)(-b) $\quad$ $(a^2 - a)a$

144 $(a^2 - a)(-a)$ $\quad$ $(a^2 – a - 1)a^2$

145 $(a^2b– ab - 1)(ab)$ $\quad$ (ab– ab - 1)(ab)

146 $(a^2b– ab - 1)(a^2b^2)$ $\quad$ $(a^2b– ab - 1)(ab)^2$

147 $ab(a^2b - ab - 1)ab$ $\qquad -2a(a^2 - a - 1)(-a^2)$

148 $\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{2}\right)(2a^2)$ R. $\left[\frac{1}{2}a^6+\frac{1}{4}a^5+a^4\right]$

149 $(a^4+a^3+a^2)(b^4)$ R. $[a^4b^4+a^3b^4+a^2b^4]$

150 $-\frac{1}{4}(2abx+2a^3b+3ax)+a^2(a+x)-\left[\left(\frac{1}{3}ax\right)^2-\left(\frac{2}{3}bx\right)^2\right]$

151 $3a\left[2(a-2ab)+3a\left(\frac{1}{2}-3b\right)-\frac{1}{2}a(3-5b)\right]$ *R.* $\left[6a^2-\frac{63}{2}a^2b\right]$

►4. Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.
Si dice che un **polinomio è divisibile per un monomio**, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice **divisore** del polinomio.
Osservazioni

- Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero.
- Un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo.
- La divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio.
- Il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

Esempio

Eseguiamo la seguente divisione tra polinomio e monomio:
$(6x^5y+9x^3y^2):(3x^2y)=2x^{(5-2)}y^{(1-1)}+3x^{(3-2)}y^{(2-1)}=2x^3+3xy$

Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi:

152 $(2x^2y+8xy^2):(2xy)$ *Svolgimento:* $(2x^2y+8xy^2):(2xy)=x^{\cdots}y^{\cdots}+4x^{\cdots}y^{\cdots}=$……………..

153 $(6x^5y^4+3x^3y^6):(3x^2y^4)$ *Svolgimento:* $(6x^5y^4+3x^3y^6):(3x^2y^4)=$……………………..

154 $(a^2+a):a$ $\qquad (a^2-a):(-a)$

155 $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right):2$

156 $(2a-2):\frac{1}{2}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}\right):\frac{a}{2}$

157 $(a^2-a):a$ $\qquad (a^3+a^2-a):a$

158 $(8a^3+4a^2-2a):2a$ $\qquad (a^3b^2+a^2b-ab):b$

159 $(a^3b^2-a^2b^3-ab^4):(-ab^2)$ $\qquad (a^3b^2+a^2b-ab):ab$

160 $(16x^4-12x^3+24x^2):(4x^2)$ $\qquad (-x^3+3x^2-10x+5):(-5)$

161 $[(-3a^2b^3-2a^2b^2+6a^3b^2):(-3ab)]\cdot\left(\frac{1}{2}b^2\right)$ $\qquad \left(\frac{4}{3}a^2b^3-\frac{3}{4}a^3b^2\right):\left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right)$

162 $\left(2a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{4}\right):\left(\frac{a}{2}\right)$ $\qquad \left(\frac{1}{2}a-\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{8}\right):\left(\frac{1}{2}a\right)$

163 $(16a^{n+1}b^{n+2}-2a^{2n}b^{n+3}+5a^{n+2}b^{n+1}):(2a^nb^n)$ $\qquad (6a^{3n+1}-6a^{2n}):(-6a^n)$

►5. Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Consideriamo ora due polinomi $\left(a^2b+3a-4ab\right)$ e $\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)$, eseguiamo il prodotto, si ha

$$\left(a^2b+3a-4ab\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^2-a+3ab^2\right)=\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+3\underline{a^3b^3}+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2-2\underline{a^3b^3}+4a^2b-12a^2b^3$$

riducendo i termini simili otteniamo $\frac{1}{2}a^4b^3-a^3b+a^3b^3+\frac{3}{2}a^3b^2-3a^2+9a^2b^2+4a^2b-12a^2b^3$.

<u>Esempi</u>

- $\left(x-y^2-3xy\right)\cdot\left(-2x^2y-3y\right)$

Procediamo moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo
$\left(x-y^2-3xy\right)\left(-2x^2y-3y\right)=-2x^3y+3xy+2x^2y^3-3y^3+6x^3y^2-9xy^2$.
In questo caso non ci sono termini simili e quindi l'operazione è completata.

- $\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x+1\right)$

$\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2\right)\left(\frac{3}{4}x+1\right)=\frac{3}{8}x^4+\underline{\frac{1}{2}x^3}-\underline{\frac{3}{2}x^3}-2x^2$, riduciamo i termini simili, otteniamo
$\frac{3}{8}x^4-x^3-2x^2$.

Esegui i seguenti prodotti di polinomi

164 $\left(-4x+\frac{1}{2}x^3\right)\left(2x^2-3x+\frac{1}{2}\right)$ *Svolgimento:* $-8x^{\cdots}+12x^{\cdots}-\ldots x+x^{\cdots}-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{4}x^{\cdots}=$

165 $\left(x^3-x^2+x-1\right)(x.-1)$ $\quad\left(3x^3+2x^2+x+1\right)(1-x)$

166 $\left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)$ $\quad(a-1)(a-2)(a-3)$

167 $(a+1)(2a-1)(3a-1)$ $\quad(a+1)\left(a^2+a\right)\left(a^3-a^2\right)$

Esercizi sui prodotti di polinomi con esponenti letterali

168 $\left(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ R. $\left[a^{4n+4}-2a^{2n+3}+2a^{2n+2}-a^{2n+1}\right]$

169 $\left(a^n-a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^{n-1}\right)$ R. $\left[a^{2n+3}-a^{2n+2}-a^{2n-1}+a^{2n}\right]$

170 $\left(a^n+a^{n+1}+a^{n+2}\right)\left(a^{n+1}-a^n\right)$ R. $\left[-a^{2n}+a^{2n+3}\right]$

171 $\left(a^{n+2}+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}+a^{n+2}\right)$ R. $\left[a^{2n+4}+2a^{2n+3}+a^{2n+2}\right]$

172 $\left(1+a^{n+1}\right)\left(a^{n+1}-2\right)$ R. $\left[a^{2n+2}-a^{n+1}-2\right]$

Esercizi di ripetizione sui polinomi

173 $(-a-1-2)-(-3-a+a)$ R. $[-a]$

174 $\left(2a^2-3b\right)-\left[\left(4b+3a^2\right)-\left(a^2-2b\right)\right]$ R. $[-9b]$

175 $\left(2a^2-5b\right)-\left[\left(2b+4a^2\right)-\left(2a^2-2b\right)\right]-9b$ R. $[-18b]$

176 $\left(\frac{1}{2}a-3+a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$ R. $\left[-\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}a^3\right]$

177 $\left(5x+3xy+\frac{1}{2}y^2\right)\left(3x^2y\right)$ R. $\left[15x^3y+9x^3y^2+\frac{3}{2}x^2y^3\right]$

178 $\left(\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}xy\right)(6xy)$ R. $\left[4x^2y^3+3x^4y-\frac{9}{2}x^2y^2\right]$

179 $\left(a^3b^2-a^4b+a^2b^3\right):\left(a^2b\right)$ R. $\left[ab-a^2+b^2\right]$

180 $\left(a^2-a^4+a^3\right):\left(a^2\right)$ R. $\left[1-a^2+a\right]$

181 $\left(\frac{1}{2}a^2b-2ab^2+\frac{3}{4}a^3b\right):\left(\frac{1}{2}ab\right)$ R. $\left[a-4b+\frac{3}{2}a^2\right]$

182 $2(x-1)(3x+1)-(6x^2+3x+1)+2x(x-1)$ R. $[2x^2-9x-3]$

183 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)a^3-\left(\frac{1}{3}ab-1\right)\left[2a^2(a-b)-a(a^2-2ab)\right]$ R. $\left[a^4-\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{3}a^4b+a^3\right]$

184 $(3x^2+6xy-4y^2)\left(\frac{1}{2}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$ R. $\left[\frac{3}{2}x^3y+x^2y^2-6xy^3+\frac{8}{3}y^4\right]$

185 $\frac{1}{2}x\left[(x-y^2)\left(x^2+\frac{1}{2}y\right)-5x\left(-\frac{1}{10}xy\right)(4y)\right]-\frac{1}{2}x\left(x^3y+\frac{1}{2}xy^2\right)$

R. $\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{2}x^3y^2-\frac{1}{4}xy^3-\frac{1}{2}x^4y-\frac{1}{4}x^2y^2\right]$

186 $(2a-3b)\left(\frac{5}{4}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{6}b^2\right)-\frac{1}{6}a\left(12a^2-\frac{18}{5}b^2\right)+\frac{1}{3}(-b)^3$ R. $\left[\frac{1}{2}a^3-\frac{11}{4}a^2b-\frac{37}{30}ab^2+\frac{1}{6}b^3\right]$

187 $\left(\frac{2}{3}a-2b\right)\left(\frac{3}{2}a+2b\right)\left(\frac{9}{4}a^2+4b^2\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{9}{4}a^2\right)$

R. $\left[\frac{9}{4}a^4-5a^2b^2-\frac{15}{4}a^3b-\frac{20}{3}ab^3-16b^4-\frac{27}{16}a^2\right]$

188 $(a^{n+1}-a^{n+2}+a^{n+3}):(a^{1+n})$ R. $[1-a+a^2]$

189 $(1+a^{n+1})(1-a^{n-1})$

190 $(a^{n+1}-a^n)(a^{n+1}+a^n)(a^{2n+2}+a^{2n})$ R. $[a^{4n+4}-a^{4n}]$

191 $\left(\frac{1}{2}x^n-\frac{3}{2}x^{2n}\right)\left(\frac{1}{3}x^n-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}x^n-1\right)(x^n+x)$ R. $\left[\frac{7}{12}x^{2n}+\frac{3}{4}x^n-\frac{1}{2}x^{3n}-\frac{1}{3}x^{n+1}+x\right]$

Rispondi alle seguenti domande

192 Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

193 Se si raddoppiano i lati di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

194 Se si raddoppiano gli spigoli a, b, e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

195 Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

196 Determinare l'area di un rettangolo avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2b$.

197 Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base x^2y e altezza $\frac{1}{5}xy^2$.

4. PRODOTTI NOTEVOLI

Il prodotto fra due polinomi si calcola moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine dell'altro e sommando poi i monomi simili. Talvolta i polinomi da moltiplicare presentano delle caratteristiche per le quali dopo aver eseguito la moltiplicazione ed aver ridotto i termini simili, si ottiene un'espressione algebrica in cui lo schema di calcolo rimane invariato. Tali prodotti vengono chiamati **prodotti notevoli**. In questi casi è utile, dopo avere individuato uno specifico prodotto notevole e averne dimostrato la validità, scrivere direttamente il risultato evitando i passaggi intermedi.
Con l'espressione **prodotti notevoli si indicano alcune identità che si ottengono in seguito alla moltiplicazione di polinomi le quali hanno caratteristiche particolari facili da ricordare**.

►1 Quadrato di un binomio

Consideriamo il binomio A+B in cui A e B rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede **moltiplicando il binomio per se stesso**, eseguendo cioè la moltiplicazione $(A+B)(A+B)$ che sotto forma di potenza si scrive $(A+B)^2$.

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

(1) $\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2}$

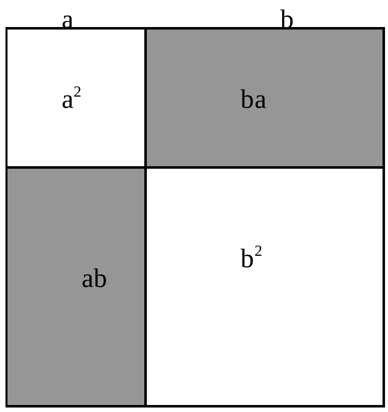
Espressa nel linguaggio comune: **il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.**
Analizzando il prodotto ottenuto si può notare che è costituito da tre termini ed in particolare due termini sono costituiti dal prodotto di ciascun monomio per se stesso, un termine è costituito dal prodotto dei due monomi moltiplicato a sua volta per 2.
Nella identità precedente, A e B rappresentano due monomi qualsiasi, quindi la scrittura $A+B$ deve intendersi come somma algebrica di due monomi che, rispetto al segno, possono essere concordi o discordi.
Ne consegue che:

- ✓ A^2 e B^2 sono sempre positivi perché prodotto di fattori uguali e quindi concordi.
- ✓ 2AB è positivo se A e B sono concordi, negativo se sono discordi.

198	$(3x + y)^2$	$= [(3x) + (y)]^2$	$= (3x)(3x) + 2(3x)(y) + (y)(y)$	$= 9x^2 + 6xy + …$
199	$(-3x + y)^2$	$= [(-3x) + (y)]^2$	$= (-3x)(-3x) + 2(-3x)(y) + (y)(y)$	= … … …
200	$(-3x - y)^2$	$= [(-3x) + (-y)]^2$	$= (-3x)(-3x) +$ ………	$= 9x^2 + 6xy + y^2$
201	$(3x - y)^2$	$= [(3x) + (- y)]^2$	= …… ……… ……	= … … …

202 $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)(3y)+(3y)^2=$……………..

203 $\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)^2=\left(x^2\right)^{\cdots}+2\cdot(\ldots\ldots)(-\ldots\ldots)+\left(-\frac{1}{2}y\right)^{\cdots}=$……………..



È possibile dare anche un'interpretazione geometrica della formula $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ sostituendo A e B rispettivamente con le misure a e b di due segmenti.
Prendiamo due segmenti di lunghezza *a* e *b*, portiamo a coincidere il secondo estremo del segmento lungo *a* con il primo estremo del segmento di lunghezza *b*: in questo modo otteniamo un segmento di lunghezza $a+b$. Costruiamo il quadrato di lato $a+b$, il quale avrà area $(a+b)^2$, e dividiamolo come nella figura a fianco.
Puoi notare che il quadrato di lato $a+b$ è composto da due quadrati di area rispettivamente a^2 e b^2 e da due rettangoli di area *ab*. Di conseguenza l'area del quadrato è uguale a:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ab=a^2+b^2+2ab$$

204 Disegna un quadrato il cui lato è composto da due segmenti lunghi rispettivamente 3cm e 5cm. Esegui la scomposizione del quadrato in modo analogo a come fatto per la figura 1 e verifica la seguente uguaglianza: $(3+5)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 5+5^2$.

Sviluppa i seguenti quadrati di binomio

205 $(x+1)^2$ $(x+2)^2$ $(x-3)^2$ $(2x-1)^2$

206 $(x+y)^2$ $(x-y)^2$ $(2x+y)^2$ $(x+2y)^2$

207 $(-a+b)^2$ $(-a-1)^2$ $(-a+3)^2$ $(-a+2b)^2$

208 $(2a+3b)^2$ $(2a-3b)^2$ $(3a+2b)^2$ $(-2+3b)^2$

209 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2$ $\left(-2x^2-\frac{7}{4}y\right)^2$ $\left(5x^3-\frac{4}{3}y^2\right)^2$ $\left(-1+\frac{3}{2}a^2x\right)^2$

210 $\left(3a-\frac{1}{3}a^2\right)^2$ $\left(-2-\frac{1}{2}x\right)^2$ $(x+1)^2$ $(a^2+a^n)^2$

211 $\left(x^{2n}-\frac{1}{2}x^n\right)^2$ $(x^{n+1}+x^n)^2$ $\left(-2^2-\frac{1}{2}x^n\right)^2$ $\left(-2x^{2n}-\frac{1}{4}y^m\right)^2$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono quadrati di binomi

212 $a^2+4ab+4b^2$ SI NO $a^2-2ab-b^2$ SI NO

213 $25a^2+4b^2-20ab^2$ SI NO $\frac{49}{4}a^4-21a^2b^2+9b^2$ SI NO

214 $-25a^4-\frac{1}{16}b^4+\frac{5}{2}a^2b^2$ SI NO $\frac{1}{4}a^6+\frac{1}{9}b^4+\frac{1}{6}a^3b^2$ SI NO

►2 Quadrato di un polinomio

Si consideri il trinomio $A+B+C$, il suo quadrato sarà dato da:

$$(A+B+C)^2=(A+B+C)\cdot(A+B+C)=A^2+AB+AC+BA+B^2+BC+CA+C^2=$$
$$=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si può scrivere

(2) $\boxed{(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC}$

In generale, **il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi**.

Nel caso di un polinomio composto da quattro monomi si ha:

$$(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$$

Completa i seguenti quadrati

215 $(x+3y-1)^2=x^2+\ldots\ldots+1+6xy-2x-6y$

216 $\left(x^2-\frac{1}{2}y+1\right)^2=x^4+\frac{1}{4}y^2+\ldots\ldots-x^2y+\ldots\ldots-y$

217 $\left(2x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\ldots\ldots+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}-2x^{\cdots}+2x^{\cdots}-\frac{\ldots}{\ldots}\ldots$

Calcola i seguenti quadrati di polinomi

218 $(a+b-c)^2$ $(a-b+c)^2$

219 $(x^2+x+1)^2$ $(x-x^2+1)^2$

220 $(3x^2+2z-y^2)^2$ $(-a+b-c)^2$

221 $(6a-3y^3-2z^2)^2$ $(1-x-x^2)^2$

222 $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x\right)^2$ $\left(3x^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{4}\right)^2$

223 $\left(-2ba+4-6ab^2+5b^2\right)^2$ $\left(2ab+3-4a^2b^2-2b^3\right)^2$

224 $\left(5a^3-\frac{1}{2}ab-1-a\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}x+2y^2-3\right)^2$

225 $\left(\frac{2}{3}y^2-3x^4+\frac{7}{4}z\right)^2$ $\left(2a+\frac{1}{2}ab^2-3b\right)^2$

226 $\left(2x^3y^2-y^2x+5x^2+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^2x-2xy+\frac{3}{8}y\right)^2$

►3 Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza

Si consideri il seguente prodotto:

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+AB-B^2=A^2-B^2$

Pertanto, quando eseguiamo il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti i prodotti incrociati si annullano e rimangono i due prodotti del termine uguale per se stesso e dei due termini opposti, il primo prodotto risulterà sempre positivo, il secondo prodotto risulterà sempre negativo. Senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(3) $\boxed{(A+B)(A-B)=A^2-B^2}$

In generale, **il prodotto tra due binomi che hanno due termini uguali e due termini opposti si ottiene semplicemente moltiplicando tra di loro i due termini uguali e i due termini opposti.**.

Esempi

- $(3a^2+5ab)\cdot(3a^2-5ab)$

Moltiplichiamo $3a^2$ per se stesso e $(+5ab)(-5ab)$, otteniamo $9a^2-25a^2b^2$

- $\left(-\frac{1}{4}x^2+b\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}x^2+b\right)$

Osserviamo che il monomio che cambia di segno è $\frac{1}{4}x^2$, nella forma generale (3) occorre porre $A=b$; $B=\frac{1}{4}x^2$. Il risultato è quindi $A^2-B^2=b^2-\frac{1}{16}x^4$.

- Senza utilizzare la calcolatrice, calcola mentalmente il prodotto $28\cdot 32$.

Svolgimento $28\cdot 32=(30-2)(30+2)=900-4=896$

Senza utilizzare la calcolatrice, calcolare mentalmente i seguenti prodotti:

227 $18\cdot 22$ $15\cdot 25$ $43\cdot 37$ $195\cdot 205$

Esegui i seguenti prodotti applicando la regola $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

228 $(x-1)(x+1)$ $(a+1)(a-1)$ $(b-2)(b+2)$

229 $(a+2b)(a-2b)$ $(2a+b)(2a-b)$ $(2a+3b)(2a-3b)$

230 $\left(l+\frac{1}{2}m\right)\left(l-\frac{1}{2}m\right)$ $\left(\frac{1}{2}u+v\right)\left(\frac{1}{2}u-v\right)$

231 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)$ $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{3}{7}y\right)\left(-\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}y\right)$

232 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $(3a-5y)(-3a-5y)$

233 $\left(x^2+\frac{1}{2}z\right)\left(x^2-\frac{1}{2}z\right)$ $\left(\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)\left(-\frac{2}{3}x^2+3y^2\right)$

234 $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}y^3\right)$ $\left(-2a^3-\frac{7}{3}y\right)\left(-2a^3+\frac{7}{3}y\right)$

235 $\left(5x^2-\frac{6}{5}y^3\right)\left(5x^2+\frac{6}{5}y^3\right)$ $\left(a^5+\frac{1}{2}y^4\right)\left(a^5-\frac{1}{2}y^4\right)$

236 $\left(-\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)\left(\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3\right)$ $\left(2x^5+\frac{3}{2}y^5\right)\left(2x^5-\frac{3}{2}y^5\right)$

►4 Cubo di un Binomio

Si consideri il binomio $A+B$, il suo cubo sarà dato da:

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)$$

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+2AB+B^2)(A+B)=A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3=$$
$$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Pertanto, senza eseguire i passaggi intermedi si ha

(4) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

In generale, **il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio**.

Essendo $(A-B)^3=[A+(-B)]^3$, il cubo della differenza di due monomi si ottiene facilmente dal cubo della somma, quindi $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

237 $(2a+b^2)^3=(2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot b^2+3(2a)\cdot(b^2)^2+(b^2)^3=$……………………………

238 $(x-2y)^3=x^{\cdots}-6x^{\cdots}y+12xy^{\cdots}-\ldots y^{\cdots}$

239 $(x+y)^3$ $(x-y)^3$ $(-x+y)^3$

240 $(a+1)^3$ $(a-1)^3$ $(a+2)^3$

241 $(x+2y)^3$ $(y-2x)^3$ $(2x+y)^3$

242 $(xy-1)^3$ $(x^2-2y)^3$ $(x^2y-3)^3$

243 $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^3$ $\left(a-\frac{2}{3}b\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$

244 $(x^2-y^2)^3$ $\left(-3xy^2+\frac{3}{2}zx^2\right)^3$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}xy^2z^3\right)^3$

245 $\left(2x^2z+\frac{2}{3}y^2z^3x\right)^3$ $(2ab^2c^2-3a^3b)^3$ $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c^2-\frac{1}{3}a^2bc^2\right)^3$

Riconosci quali dei seguenti polinomi sono cubi di binomi

246 $-a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ SI NO

247 $a^9-6a^4b-12a^2b^2-8b^3$ SI NO

248 $8a^9-b^3-6b^2a^3+12a^6b$ SI NO

249 $\frac{1}{27}a^6-8b^3+4a^2b^2-\frac{2}{3}a^4b$ SI NO

►5 Potenza n-esima di un binomio

Finora abbiamo calcolato le potenze del binomio $a+b$ fino all’ordine tre, in questo paragrafo ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo le potenze ottenute:

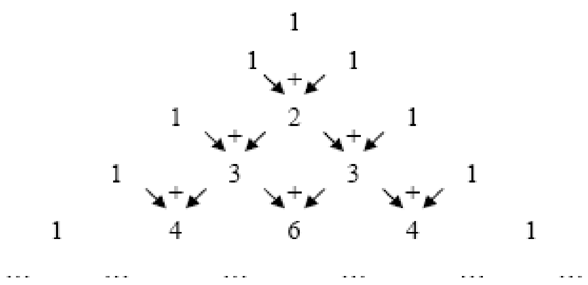
$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell’esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto ***triangolo di Tartaglia***.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
… … … … … … …

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l’ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente. Nella figura che segue evidenziamo come costruire il triangolo:



Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

- $(a+b)^0=1$
- $(a+b)^1=a+b$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Sviluppa le seguenti potenze di binomio

250 $(2a-b^2)^4=(2a)^4+4\cdot(2a)^3\cdot(-b^2)+6(2a)^2\cdot(-b^2)^2+\ldots(2a)\cdot(-b^2)^{\cdots}+(-b^2)^{\cdots}$

251 $(a+1)^5$ $\quad (x-1)^6$ $\quad (1-y)^7$ $\quad (a+2)^5$

252 $(a-2)^6$ $\quad (2a-1)^2$ $\quad (3x^2a-a^2)^5$ $\quad (2x^2-1)^6$

253 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^4$ $\quad \left(\frac{1}{2}a-1\right)^4$ $\quad \left(2-\frac{1}{2}a\right)^5$ $\quad \left(\frac{1}{3}-2x\right)^5$

►6 Prodotti notevoli applicati ai polinomi

Tutti i procedimenti di calcolo presentati in questo paragrafo si applicano non soltanto a monomi ma anche a polinomi.

Esempi

- Per calcolare $(a+2b-3c)^2$ possiamo anche applicare la regola (1) del quadrato del binomio dove $A=a+2b$ e $B=-3c$, si ottiene $(a+2b)^2+2(a+2b)(-3c)+(-3c)^2$, ecc.
- Per calcolare $(a+b+2c)\cdot(a+b-2c)$ possiamo applicare la regola (3) ponendo $A=a+b$ e $B=2c$, quindi il risultato A^2-B^2 diventa $(a+b)^2-(2c)^2$, sviluppando i quadrati si ottiene $a^2+2ab+b^2-4c^2$.
- Per calcolare $(a^3+2ab-b^2)\cdot(a^3-2ab+b^2)$ possiamo riscrivere il prodotto come $\left[a^3+(2ab-b^2)\right]\cdot\left[a^3-(2ab-b^2)\right]$, quindi moltiplicando soltanto il monomio uguale per se stesso e i binomi opposti $(a^3)^2-(2ab-b^2)^2=a^6-(4a^2b^2-4ab^3+b^4)=a^6-4a^2b^2+4ab^3-b^4$

254 $[a+2(b-c)][a-2(b-c)]$ R. $[a^2-4b^2+8bc-4c^2]$

255 $\left[(a-2b)^2-a^3\right]\left[-a^3-(a-2b)\right]$ R. $[-a^4+8a^3b-24a^2b^2+32ab^3-16b^4+a^6]$

256 $\left[(x+2y)^2-(x^2-2y)^2\right]\left[(x+2y)^2+(x^2-2y)^2\right]$ R. $[8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4+\ldots]$

257 $\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}-3b+\frac{1}{3}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}-3b-\frac{1}{3}ab\right)$ R. $\left[\frac{1}{4}a^2-\frac{31}{9}ab-\frac{4}{9}+9b^2-\frac{1}{9}a^2b^2\right]$

258 $\left(a-\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{5}-5ab\right)$

259 $(x-y)^2+(x+y)(y-x)$ R. $[2y^2-2xy]$

260 $(a-3b)^2+(2a+3b)(2a-3b)-(a+2b)(b-2a)$ R. $[7a^2-3ab-2b^2]$

261 $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\left(2x+\frac{1}{2}y^2\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}y\right)\left(-x+\frac{1}{2}y\right)+(x-y)^3$

R. $\left[-4x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+xy^2-\frac{1}{4}y^4+x^3-3x^2y-y^3\right]$

262 $(a+2b-3c)(a+2b+3c)(a^2-b)(-a^2-b)+(2a-b)^3$

263 $\left[3x^2-(x+2y)(x-2y)\right]^2-2x\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y\right)^2$ R. $\left[4x^4+16x^2y^2+16y^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2y-\frac{9}{2}xy^2\right]$

264 $\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{3}yx\right)^2+\left(\frac{2}{3}x^2y-\frac{4}{5}y^2x\right)^2$

R. $\left[\frac{1}{4}x^6+\frac{7}{3}x^4y+\frac{49}{9}x^2y^2+\frac{4}{9}x^4y^2-\frac{16}{15}x^2y^3z+\frac{16}{25}y^4z^2\right]$

265 $\left(x^2+yx+\frac{2}{3}\right)^2-\left(3b^2+\frac{1}{2}a^4+2a^3+\frac{1}{3}a^2\right)^2$

266 $\left(3x^2-4xy+\frac{2}{5}-y^2x+\frac{1}{2}y^3\right)^2+\left(2x^2y^2+\frac{3}{2}y^2\right)\left(2x^2y^2-\frac{3}{2}y^2\right)$

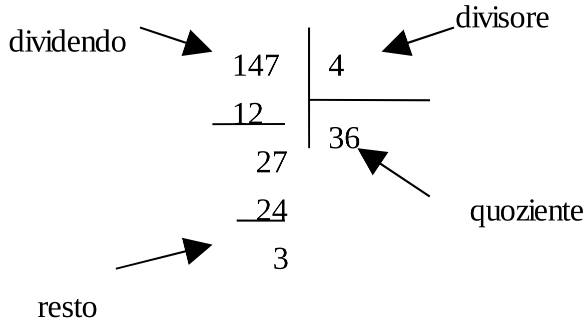
267 $\left(\frac{2}{5}zx^3-3x^2y\right)\left(\frac{2}{5}zx^3+3x^2y\right)+\left(2x^2y^2z^3+\frac{1}{2}z^2x^2y\right)^3$

268 $(1-x^n)^2-(2x^n-1)^2-(2x^{n+1})^2+(x^{2n}-1)(x^{2n}+1)$ R. $[-1+2x^n-3x^{2n}-4x^{2n+2}+x^{4n}]$

269 Trova una regola generale per calcolare il cubo di un trinomio $(A+B+C)^3$

5. DIVISIONE TRA DUE POLINOMI

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio 147:4. Si tratta di trovare un quoziente q e un resto r < 4, in modo che $147=q\times 4+r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:



Verifichiamo che $147=q\times 4+3$, dunque $q=36$ e $r=3$ soddisfano la nostra richiesta.
In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

►1. Polinomi in una sola variabile

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio x, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, **A(x) dividendo** e **B(x) divisore**, vogliamo determinare altri due polinomi, **Q(x) quoziente** e **R(x) resto**, con grado di R(x) minore del grado di B(x), per i quali:

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x).$$

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamo l'algoritmo con un esempio.

Esempio

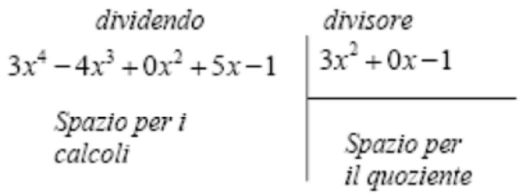
- ■ Vogliamo eseguire la divisione tra i polinomi $A(x)=3x^4+5x-4x^3-1$ e $B(x)=3x^2-1$.

Prima di eseguire l'algoritmo **dobbiamo sempre controllare**:
- che il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore.
Vero: $A(x)$ è di grado 4, $B(x)$ è di grado 2.
- che i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile.
Poiché ciò non è vero per $A(x)$ lo riscriviamo ordinato: $A(x)=3x^4-4x^3+5x-1$.
- che dividendo e divisore siano in forma completa.
Nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti:

$$A(x)=3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 \qquad B(x)=3x^2+0x-1$$

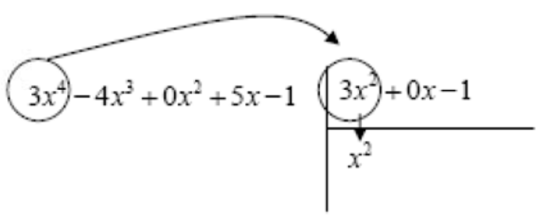
Passo 1

Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.



Passo 2

Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore , otteniamo che è il primo termine del quoziente e va riportato nello spazio dedicato al quoziente



Passo 3

Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:

- incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
- cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2 \end{array}$$

Passo 4

Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & \end{array}$$

Passo 5

Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto $-4x^3+x^2+5x-1$ e il divisore $3x^2+0x-1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2-\frac{4}{3}x \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & \end{array}$$

Passo 6

Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto cambiandolo di segno sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2-\frac{4}{3}x \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & \\ -4x^3+0x^2-\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-1} x^2+\frac{11}{3}x-1 & \end{array}$$

Passo 7

Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x)=x^2+\frac{11}{3}x-1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è x^2, per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-4x^3+0x^2+5x-1 & 3x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} -3x^4-0x^3+x^2 & x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \\ \cline{1-1} -4x^3+x^2+5x-1 & \\ -4x^3+0x^2-\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-1} x^2+\frac{11}{3}x-1 & \\ -x^2+0x+\frac{1}{3} & \\ \cline{1-1} +\frac{11}{3}x-\frac{2}{3} & \end{array}$$

Non possiamo più ripetere l’algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x):B(x)$ ha quoziente $Q(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ e resto $R(x)=+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}$.

Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra:

$$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$$

$$(3x^2-1)\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3}x=3x^4-4x^3-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}=$$
$$=3x^4-4x^3+\frac{15}{3}x-\frac{3}{3}=x^4-4x^3+5x-1=A(x)$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? E’ sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il

TEOREMA DELLA DIVISIONE EUCLIDEA. Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con gradi di $R(x)$ minore o uguale del grado di $B(x)$, tali che $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

Osservazioni

- Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x)=0$ e $R(x)=A(x)$.
- Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

DEFINIZIONE. Si dice che un polinomio A (dividendo) è divisibile per un polinomi B o (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A=Q\cdot B$.

Esempio

- Eseguiamo la divisione tra $A(x)=x^3-2x^2+x-2$ *e* $B(x)=x^2+1$

I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di *A* è maggiore del grado di *B* e quest’ultimo deve essere completo. Inseriamoli nella schema per eseguire l’algoritmo. Risulta:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2+x-2 & x^2+0x+1 \\
-x^3-0x^2-x & \\ \cline{2-2}
 & x-2 \\ \hline
-2x^2+0x-2 & \\
-2x^2+0x-2 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Quindi $(x^3-2x^2+x-2):(x^2+1)=(x-2)$ e il resto R(x) è il polinomio nullo.

Infatti $(x^2+1)\cdot(x-2)=(x^3-2x^2+x-2)$.

Conclusione

Sia $A(x)$ un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado m con $n\geq m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n-m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g<m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B.

Se $n<m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

In quali dei seguenti casi il quoziente è un polinomio?

270 $(xy-y):y$ SI NO

271 $(x^2y-3y):x$ SI NO

272 $(2xy+x^2):x$ SI NO

273 Completa la divisione

$$\begin{array}{l|l} 7x^4+0x^3-5x^2+x-1 & 2x^2+0x-1 \\ \cline{2-2} \dots & \frac{7}{2}x^2\dots \\ \hline -\frac{3}{2}x^2+x-1 & \\ \dots & \\ \hline x-\frac{7}{4} & \end{array}$$

Esegui le divisioni

274 $(3x^2-5x+4):(2x-2)$ $\left[Q(x)=\frac{3}{2}x-1;\ R(x)=2\right]$

275 $(4x^3-2x^2+2x-4):(3x-1)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{16}{27};\ R(x)=-\frac{92}{27}\right]$

276 $(5a^3-a^2-4):(a-2)$ $\left[Q(x)=5a^2+9a+18;\ R(x)=32\right]$

277 $(6x^5-5y^4+y^2-1):(2y^2-3)$ $\left[Q(x)=3y^3-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{2}y-\frac{13}{4};\ R(x)=\frac{27}{2}y-\frac{43}{4}\right]$

278 $(-7a^4+3a^2-4+a):(a^3-2)$ $\left[Q(x)=-7a;\ R(x)=a^2-13a-4\right]$

279 $(x^7-4):(x^3-2x^2+3x-7)$ $\left[Q(x)=x^4+2x^3+x^2+3x+17;\ R(x)=32x^2-30x+115\right]$

280 $\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{3}{2}\right):(x^2+3x)$ $\left[Q(x)=x-\frac{7}{2};\ R(x)=\frac{13}{2}x+\frac{3}{2}\right]$

281 $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2-5x+\frac{3}{5}\right):\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ $\left[Q(x)=x^3-\frac{20}{3}x^2-\frac{81}{2}x-253;\ R(x)=\frac{3798}{5}\right]$

282 $(6-7a+3a^2-4a^3+a^5):(1-2a^3)$ $\left[Q(x)=2-\frac{1}{2}a^2;\ R(x)=\frac{7}{2}a^2-7a+4\right]$

►2. Polinomi in più variabili

Per la divisione tra polinomi in più variabili riportiamo soltanto qualche esempio.
Siano $A(a,b)=3a^2b+4ab^2+3a^3-2b^3$ e $B(a,b)=a-3b$ rispettivamente dividendo e divisore di una divisione tra polinomi; essi sono due polinomi omogenei nelle due variabili a e b rispettivamente di grado 3 e grado 1. Per eseguire la divisione procediamo come nel caso di polinomi in una sola variabile.

283 Dividiamo il polinomio $A(a,b)=3a^2b+4ab^2+3a^3-2b^3$ per il polinomio $B(a,b)=a-3b$ rispetto alla variabile *a*. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile a? No.
  A non lo è. Quindi ordiniamo A: $A(a,b)=3a^3+3a^2b+4ab^2-2b^3$
- Il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì
- A e B sono completi rispetto alla variabile a? Sì

Costruiamo lo schema per eseguire l’algoritmo e procediamo:

$$\begin{array}{l|l} 3a^3+3a^2b+4ab^2-2b^3 & a-3b \\ \cline{2-2} & 3a^2-\dots \\ \hline & \end{array}$$

Il quoziente è Q = ……………….. ; il resto R = $118b^3$

Verifica …………………….………………………..

Se avessimo eseguito la divisione rispetto alla variabile b, avremmo ottenuto stesso quoziente e stesso resto? Proviamo.

Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile b? No.

Ordiniamo A, risulta $A(a,b)=-2b^3+4ab^2+3a^2b+3a^3+3a^2b$; ordiniamo B, risulta .

- $B(a,b)=-3b+a$ Il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì
- A e B sono completi rispetto alla variabile b? Sì

Costruisci lo schema dell'algoritmo e concludi.

284 Dividi il polinomio $A(x,y)=x^3+3x^2y+2xy^2$ per il polinomio $B(x,y)=x+y$ rispetto alla variabile x.
Il quoziente è Q(x,y) = … … … … …, il resto è R(x,y) = 0.
Ordina il polinomio A(x,y) in modo decrescente rispetto alla variabile y ed esegui nuovamente la divisione. Il quoziente è sempre lo stesso? Il resto è sempre zero?

►3. Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi, nel caso in cui il divisore sia di grado 1 si può applicare una regola nota come regola di Ruffini e che si basa sui seguenti teoremi.

TEOREMA. Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $x-k$ è uguale al valore che $A(x)$ assume quando al posto della variabile x si sostituisce il valore k, $R=A(k)$.

Dimostrazione
Dalla divisione di $A(x)$ per $x-k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x)=(x-k)\cdot Q(x)+R$$

in cui si è preferito scrivere *R* anziché *R(x),* poiché è una costante.
Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile *x*, sostituiamo al suo posto il valore *k* e otteniamo:

$$A(k)=\underbrace{(k-k)}_{0}\cdot Q(k)+R=R$$

Ciò vuol dire che il valore assunto da $A(x)$ quando $x=k$ è proprio uguale al resto della divisione.

Dimostriamo ora il *Teorema di Ruffini*.

TEOREMA DI RUFFINI. Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $x-k$ è che risulti $A(k)=0$.

Dimostrazione
Prima implicazione: $A(x)$ divisibile per $x-k$ $\Rightarrow$ $A(k)=0$.
Poiché $A(x)$ è divisibile per $x-k$, per definizione di divisibilità deve essere $R=0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k)=R=0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(k)=0$.
Seconda implicazione: $A(k)=0$ $\Rightarrow$ $A(x)$ divisibile per $x-k$.
Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x-k$, per il teorema del resto risulta $R=A(k)$ e per ipotesi $A(k)=0$, ne segue che $R=0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione pari a zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $x-k$.

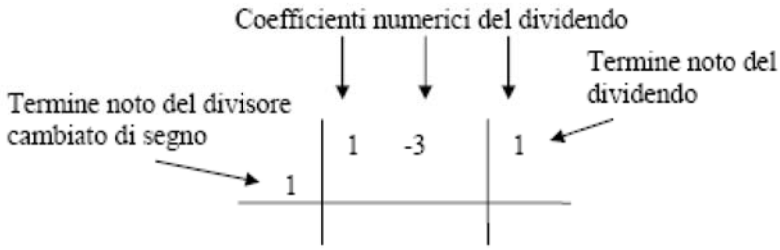
Procedura per dividere un polinomio con la regola di Ruffini
- calcolo del resto
- applicazione del procedimento di divisione
- verifica

Esempio

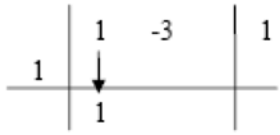
- $(a^2-3a+1):(a-1)$

Dividiamo con la regola di Ruffini il polinomio $A(a)=a^2-3a+1$ per il binomio $B(a)=a-1$; cerchiamo quoziente $Q(a)$ e resto $R(a)$.
Passo 1 *Calcolo del polinomio resto*
Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è 1) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo $A(a)$: $(1)^2 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$
Il resto della divisione è -1.

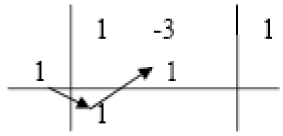
Passo2 *Applicazione del procedimento di divisione*
Disegnare il seguente schema di Ruffini: scrivere i coefficienti numerici del polinomio dividendo, secondo le potenze decrescenti della variabile. Se manca un termine occorre mettere 0. L'ultimo termine numerico è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno, nell'esempio è 1.



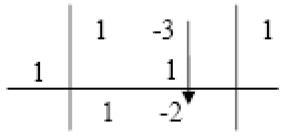
Il primo termine si riporta inalterato nella parte sottostante:



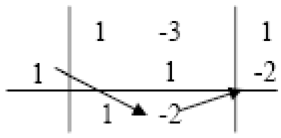
Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per il primo coefficiente appena trascritto e si riporta il risultato sotto il secondo coefficiente



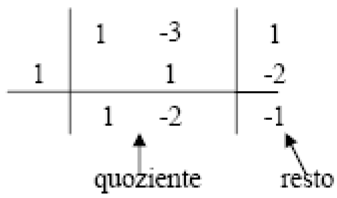
Sommare i due termini appena incolonnati -3+1=-2



Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per la somma appena ottenuta $1\cdot(-2)=-2$



Addizionare gli ultimi due numeri incolonnati 1-2=-1



Infine si ricostruisce il polinomio quoziente, tenendo presente che i coefficienti numerici sono quelli trovati da questa divisione, cioè 1 e -2. Il quoziente è resto sono allora

$$Q(x)=a-2 \qquad R=-1$$

Passo 3 *Verifica*
Come nella divisione con i numeri si moltiplica il polinomio risultato per il polinomio divisore e si somma il polinomio resto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(a-2)(a-1)+(-1)=a^2-a-2a+2-1= \mathbf{a^2-3a+1}$$

Esempio

- $(4x^3 - 5x + 6) : (x + 1)$

Applicazione del procedimento di divisione

Termine noto del divisore cambiato di segno

	4	0	-5	6
-1		-4	+4	+1
	4	-4	-1	7

Coefficienti del polinomio quoziente

Resto della divisione

$$Q(x)=4x^2-4x-1 \qquad\qquad R=7$$

Verifica

$Q(x)\cdot B(x)+R=A(x)$

$(4x^2-4x-1)\cdot(x+1)+7=4x^3+4x^2-4x-x-1+7=4x^3-5x+6$

Risolvere le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini

285 $(x^2 - 3x + 1) : (x - 3) =$

Calcolo del resto $(+3)^2-3(+3)+1=\ldots$

$Q(x)=1x+0=x \qquad R=\ldots$

Verifica $(x-3)\cdot x+\ldots=x^2-3x+1$

	1	-3	1
3		...	...
	1	0	1

286 $(3x^3-4x^2+5x-1):(x-2)$ $\left[Q(x)=3x^2+2x+9;\ R(x)=17\right]$

287 $(x^5-x^3+x^2-1):(x-1)$ $\left[Q(x)=x^4+x^3+x+1;\ R(x)=0\right]$

288 $(x^4-10x^2+9):(x-3)$ $\left[Q(x)=x^3+3x^2-x-3;\ R(x)=0\right]$

289 $(x^4+5x^2+5x^3-5x-6):(x+2)$ $\left[Q(x)=x^3+3x^2-x-3;\ R(x)=0\right]$

290 $(4x^3-2x^2+2x-4):(x+1)$ $\left[Q(x)=4x^2-6x+8;\ R(x)=-12\right]$

291 $\left(\frac{4}{3}y^4-2y^2+\frac{3}{2}y-2\right):\left(y+\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}y^3-\frac{2}{3}y^2-\frac{5}{3}y+\frac{7}{3};\ R(x)=-\frac{19}{6}\right]$

292 $\left(\frac{1}{3}x^5-\frac{3}{2}x-2\right):(x+2)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{23}{6};\ R(x)=-\frac{29}{3}\right]$

293 $\left(2a-\frac{4}{3}a^4-2a^2-\frac{1}{3}\right):\left(a-\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q(x)=-\frac{4}{3}a^3-\frac{2}{3}a^2-\frac{7}{3}a+\frac{5}{6};\ R(x)=\frac{1}{12}\right]$

294 $\left(\frac{4}{3}y^4-\frac{3}{2}y^3+\frac{3}{2}y-2\right):(y+3)$ $\left[Q(x)=\frac{4}{3}y^3-\frac{11}{2}y^2+\frac{33}{2}y-48;\ R(x)=142\right]$

Vediamo il caso in cui il binomio che fa da divisore ha coefficiente numerico della variabile diverso da 1.

Esempio

- Dividere con la regola di Ruffini $(2x^4-x^3-4x^2+2x+7):(2x-1)$

In questo tipo di esercizi si deve rendere il divisore del tipo $x+n$, quindi nel nostro caso si deve dividere sia il dividendo sia il divisore per 2; sappiamo, infatti, dalla proprietà invariantiva della divisione che dividendo per uno stesso numero dividendo e divisore il quoziente della divisione non cambia, mentre il resto risulterà diviso per 2. Quindi applichiamo l'algoritmo precedente e **ricordiamoci al termine della divisione di moltiplicare il resto per 2**.

La divisione allora diventa $\left(x^4-\frac{1}{2}x^3-2x^2+x+\frac{7}{2}\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Calcolo del resto

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è $+\frac{1}{2}$) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo. Il risultato che si ottiene è il resto della nuova divisione

$\left(\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$ resto della divisione

Applicazione del procedimento di divisione

	1	$-\frac{1}{2}$	-2	+1	$\frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	1	0	-2	0	$\frac{7}{2}$

Adesso si pone la lettera per ogni termine del polinomio risultato partendo dal grado del polinomio dividendo diminuito di 1. Il risultato è quindi il polinomio x^3-2x , il resto è $\frac{7}{2}\cdot 2=7$.

Verifica

Per la proprietà della divisione si moltiplica il quoziente per il polinomio divisore e si somma il resto ottenuto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(x^3-2x)(2x-1)+7=2x^4-x^3-4x^2+2x+7$$

In generale, se si vuole dividere il polinomio $A(x)$ per il binomio $(nx-\alpha)$, utilizzando la proprietà invariantiva della divisione, basta dividere dividendo e divisore per *n*. Si ottengono $Q(x)$ e resto. Per ottenere il resto della divisione di partenza occorre moltiplicare per il coefficiente *n*.

Infatti si ha:

$$A(x)=(nx-\alpha)Q(x)+R$$

e, dividendo ambo i membri per *n*, si ha:

$$\frac{A(x)}{n}=\left(x-\frac{\alpha}{n}\right)Q(x)+\frac{R}{n}$$

295 $(x^3-2x^2+2x-4):(2x-2)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{1}x+\frac{1}{2};\ R=-3\right]$

296 $(3x^4-2x^3+x-1):(2x-3)$ $\left[Q(x)=\frac{3}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{8}x+\frac{53}{16};\ R=\frac{143}{16}\right]$

297 $\left(\frac{3}{2}a^4-2a^2+a-\frac{1}{2}\right):(3a-1)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{6}a^2-\frac{11}{18}a+\frac{7}{54};\ R=-\frac{10}{27}\right]$

298 $(3a^4b^4+a^2b^2+2ab+2):(ab-1)$ $\left[Q(x)=a^3b^3+3a^2b^2+4ab+6;\ R=8\right]$

299 $(3a^4b^2-2a^2b):(a^2b-3)$ $\left[Q(x)=3a^2b+7;\ R=21\right]$

300 Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx+2 è divisibile per x^2-1 ? $k=-1$

301 Per quale valore di k il polinomio x^3-2x^2+kx è divisibile per x^2-1 ? [nessuno]

302 Per quale valore di k il polinomio x^3-3x^2+x-k è divisibile per $x+2$? $k=-22$

303 Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile *a* che, diviso per a^2-1 dà come quoziente e a^2+1 come resto -1. R. $\left[a^4-2\right]$

304 Trovare un polinomio di secondo grado nella variabile *x* che risulti divisibile per (x-1) e per (x-2) e tale che il resto della divisione per (x-3) sia uguale a -4.

6. M.C.D. E m.c.m. TRA MONOMI

►1. Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comune divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.
Un monomio A si dice **multiplo** di un monomio B se esiste un monomio C per il quale $A = B \cdot C$; in questo caso diremo anche che B è **divisore** del monomio A.

DEFINIZIONE. Il massimo comune divisore tra due o più monomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro M.C.D., se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio

Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni

$1 \quad 2 \quad 4 \quad a \quad a^2 \quad b \quad ab \quad a^2b \quad 2a$

$2a^2 \quad 2b \quad 2ab \quad 2a^2b \quad 4a \quad 4a^2 \quad 4b \quad 4ab \quad 4a^2b$

Il monomio di grado massimo è a^2b , il M.C.D. tra i coefficienti è 4. Pertanto il M.C.D. dei monomi è $4a^2b$.

Procedura per calcolare il M.C.D. tra monomi
Il M.C.D. di un gruppo di monomi è il monomio che ha:
per coefficiente numerico il M.C.D. dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;
la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.

Esempio

- *Calcolare* $M.C.D.(14a^3b^4c^2;\ 4ab^2;\ 8a^2b^3c)$

Per prima cosa calcoliamo il M.C.D. tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2 .
In definitiva, $M.C.D.(14a^3b^4c^2;\ 4ab^2;\ 8a^2b^3c)=2ab^2$.

Esempio

- *Calcolare il massimo comune divisore tra* $5x^3y^2z^3;\ -\frac{1}{8}xy^2z^2;\ 7x^3yz^2$

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del M.C.D.
Le lettere in comune sono $x\,y\,z$, prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha $x\,y\,z^2$.
Quindi, $M.C.D.(5x^3y^2z^3;\ -\frac{1}{8}xy^2z^2;\ 7x^3yz^2)=x\,y\,z^2$

Osservazione
La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del M.C.D., nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del M.C.D. Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE. Due monomi si dicono **monomi primi tra loro** se il loro M.C.D. è 1.

►2. Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo

DEFINIZIONE. Il **minimo comune multiplo di due o più monomi** è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro m.c.m., se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio

Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$5a^3b$	alcuni multipli	$10a^3b$	$10a^3b^2$	$10a^4b$	$15a^3b$	…
$10a^2b^2$	alcuni multipli	$10a^2b^3$	$10a^3b^2$	$10a^4b^2$	$20a^2b^2$	…

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà applicando la definizione è poco pratico calcolare il m.c.m., è utile invece la seguente

Procedura per il calcolo del m.c.m. tra due o più monomi

Il m.c.m. di un gruppo di monomi è il monomio che ha:

per coefficiente numerico il m.c.m. dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;

la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.

Esempio

- *Calcola il minimo comune multiplo tra* $5a^3bc\,;\ 12ab^2c\,;\ 10a^3bc^2$.

Il m.c.m. tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado più alto delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, $m.c.m(5a^3bc\,;\ 12ab^2c\,;\ 10a^3bc^2) = 60a^3b^2c^2$.

Esempio

- *Calcola il minimo comune multiplo tra* $6x^2y\,;\ -\frac{1}{2}xy^2z\,;\ \frac{2}{3}x^3yz$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi quindi il m.c.m. avrà come coefficiente 1.
La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono, prese una sola volta, x, y, z ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z .

In definitiva $m.c.m.\left(6x^2y\,;\ -\frac{1}{2}xy^2z\,;\ \frac{2}{3}x^3yz\right) = x^3y^2z$.

Osservazione

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z , calcoliamo M.C.D. e il m.c.m.

$$M.C.D.(x^2y\,;\ xy^2z) = xy \qquad m.c.m.(x^2y\,;\ xy^2z) = x^2y^2z$$

Moltiplichiamo ora M.C.D. e m.c.m., abbiamo:

Moltiplichiamo ora i monomi assegnati, abbiamo:

$$(x^2y)\cdot(xy^2z) = x^3y^3z$$

Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il M.C.D. e il m.c.m.
Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale:

PROPRIETÀ. Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.

305 *Vero o falso?*

a)	$12a^3b^2c$ è un multiplo di abc	V	F
b)	$2xy$ è un divisore di x^2	V	F
c)	$2a$ è divisore di $4ab$	V	F
d)	$-5b^2$ è divisore di $15ab$	V	F
e)	$8ab$ è multiplo di a^2b^2	V	F
f)	$12a^5b^4$ è multiplo di $60a^5b^7$	V	F
g)	5 è divisore di $15a$	V	F

306 *Vero o falso?*

a)	il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati	V	F
b)	il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato	V	F
c)	il mcm è il prodotto dei monomi tra di loro	V	F

Calcola il m.c.m e il M.C.D dei seguenti gruppi di monomi

307	$14x^3y^2$	xy	$4x^3y^4$	$[28x^3y^4;\ xy]$
308	xyz^5	$x^3y^2z^2$		$[x^3y^2z^5;\ xyz^2]$
309	$4ab^2$	a^3b^2	$5ab^5$	$[20a^3b^5;\ ab^2]$
310	$2a^2bc^3$	ab^4c^2	$24a^3bc$	$[24a^3b^4c^3;\ abc]$
311	$6a^2x$	$2ax^3$	$4x^2c^3$	$[12a^2c^3x^3;\ 2x]$
312	$30ab^2c^4$	$5a^2c^3$	$12abc$	$[60a^2b^2c^4;\ ac]$
313	$x^2y^4z^2$	xz^3	$24y^2z$	$[24x^2y^4z^3;\ z]$
314	$4a^2y$	y^3c	$15ac^5$	$[60a^2c^5y^3;\ 1]$
315	$13xyc^2$	$x^2y^3c^2$	$6c^4$	$[78c^4x^2y^3;\ c^2]$
316	$a^nb^mz^{2m+1}$	$a^{3n}b^{m+3}$	$a^{4n}b^{m+4}$	$[a^{4n}b^{m+4}z^{2m+1};\ a^nb^m]$
317	$-2xy^3z$	$-6x^3yz$	$8x^3z$	$[24x^3y^3z;\ 2xz]$
318	$\frac{1}{4}ab^2c$	$-3a^2b^2c$	$-\frac{1}{2}ab^2c^2$	$[a^2b^2c^2;\ ab^2c]$
319	$\frac{2}{3}x^2y^2$	$\frac{1}{6}xy^2$	$\frac{2}{5}xyz^2$	$[x^2y^2z^2;\ xy]$

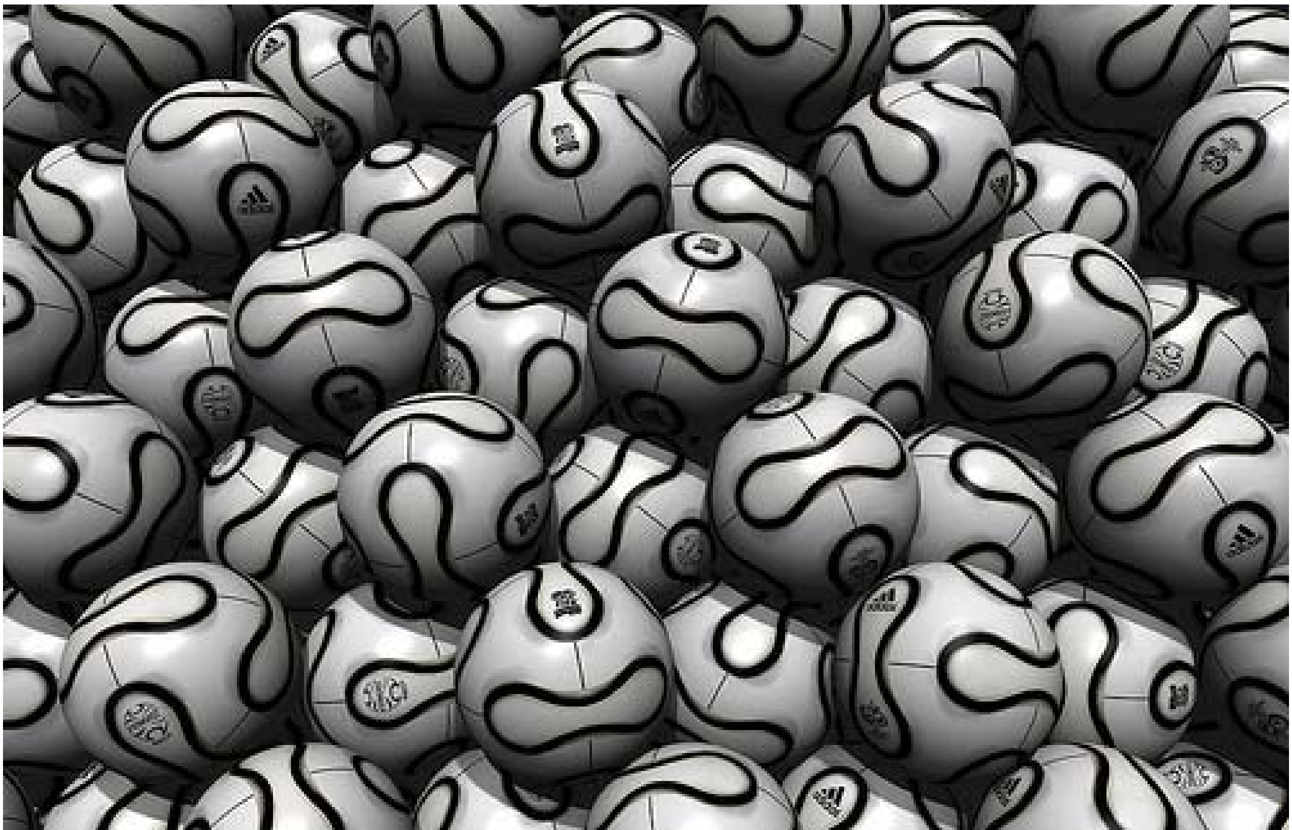
320 Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3

a) Calcola il loro M.C.D.
b) Calcola il loro m.c.m.
c) Verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto tra il loro m.c.m. e il loro M.C.D.
d) Verifica che il loro M.C.D. è uguale al quoziente tra il loro prodotto e il loro m.c.m.

MATEMATICA C^3

ALGEBRA 1

4. EQUAZIONI NUMERICHE INTERE



FIFA FCC Packing
foto by: fdecomite
take fron: http://www.flickr.com/photos/fdecomite/2624192405/
license: creative commons attribution 2.0

1. IDENTITÀ ED EQUAZIONI, PRINCIPI DI EQUIVALENZA

►1 Identità ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

a) "cinque *è uguale* alla differenza tra sette e due"
b) "la somma di quattro e due *è uguale* a otto"
c) "il doppio di un numero naturale *è uguale* alla differenza tra nove e il numero stesso"
d) "la somma di due numeri interi *è uguale* a dieci"

Notiamo che tutte sono costruite con il predicato "essere uguale a"; riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) 5=7-2; b) 4+2=8; c) 2x=9-x; d) x+y=10

e notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili.
Le formule del primo tipo si dicono **chiuse** e di esse si può subito stabilire il valore di verità; così in N la formula 5 = 7 - 2 è vera mentre 4 + 2 = 8 è falsa.

DEFINIZIONE. Le **formule chiuse** costruite con il predicato "essere uguale" si chiamano **uguaglianze**; stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempio

La formula chiusa 1 – 6 = -5 è un'uguaglianza vera se la consideriamo nell'insieme Z degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono **aperte;** le variabili che compaiono sono chiamate **incognite**. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.
Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

Esempio

Nella formula 2x = 9 – x sostituiamo alla variabile x il valore zero; otteniamo $2\cdot 0=9-0 \Rightarrow 0=9$ FALSA ; sostituiamo ora alla variabile x il valore tre; otteniamo $2\cdot 3=9-3 \Rightarrow 6=6$ VERA

Esempio

Nella formula x + y = 10 sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come x = 2 e y = 5; otteniamo $2+5=10 \quad \Rightarrow \quad 7=10$ FALSA . Se sostituiamo x = 4 e y = 6 ci rendiamo subito conto che l'uguaglianza ottenuta è VERA, ma scopriamo anche che molte altre coppie di numeri interi rendono vera l'uguaglianza.

DEFINIZIONI
Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano **equazioni**; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente **primo membro e secondo membro**.
L'insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera costituisce l'**insieme delle soluzioni** (I.S.) o più semplicemente le **soluzione** dell'equazione.

Affronteremo per ora equazioni in **una sola incognita** che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a **grado 1** e i cui **coefficienti** sono **numeri razionali**.
Cercheremo la sua soluzione nell'insieme *Q* dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempi

- $x^2=1$ con $x\in N$

Risulta vera solo se a *x* sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l'unico numero naturale il cui quadrato è 1. L'insieme soluzione è {1}.

- b) $x^2=1$ con $x\in Z$

Risulta vera se a *x* sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1; infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L'insieme soluzione è {-1, 1}.

- $x^2+1=0$ con $x\in Q$

Essendo la formula a sinistra dell'uguale la somma di un quadrato con il numero 1, per ottenere 0 dovrebbe essere $x^2 = -1$ il che risulta impossibile nell'insieme dei numeri reali. L'insieme soluzione è quindi $\emptyset$.

- $2x+3=(3+x)+x$ con $x\in Q$

Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è Q.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

- **determinata**: quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio di Q;
- **impossibile**: quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme improprio di Q e precisamente è l'insieme vuoto Φ;
- **indeterminata o identità**: quando l'insieme soluzione coincide con Q.

Esempi

Analizziamo le equazioni: $a)\ 3\cdot x=0;\quad b)\ 0\cdot x=5;\quad c)\ 0\cdot x=0$
Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.
a) Per trovare l'insieme soluzione della prima cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. Per la proprietà della moltiplicazione l'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è {0}. L'equazione è determinata.
b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto. L'equazione è impossibile.
c) Per trovare l'insieme soluzione della terza cerchiamo in Q il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è Q. L'equazione è indeterminata.

►2. Ricerca dell'insieme soluzione

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando le semplici proprietà delle operazioni.

Esempio

Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x-1=17$ con $x\in N$.
Si opera sul valore incognito x per ottenere 17

$$\textbf{entra}\ x\ \textit{si moltiplica per tre}\rightarrow 3\cdot x\ \textit{si sottrae}\ 1\rightarrow 3\cdot x-1\ \textit{si ottiene}\ 17\ .$$

Qual è il valore in ingresso?
Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:
$\textit{da}\ 17\ \textit{aggiungi}\ 1\rightarrow 18\ \textit{dividi per tre}\rightarrow\ 18:3\rightarrow x$
La soluzione dell'equazione è x = 6 e I.S. (insieme delle soluzioni) è { 6 }.

1 Risolvi in Z la seguente equazione: $-x+3=-1$.
Suggerimento. Lo schema operativo è: *entra x, cambia il segno in -x, aggiunge 3, si ottiene -1.*
Ora ricostruisci il cammino inverso: da -1 … … … … 3 ottieni -… … cambia segno … … ottieni come soluzione x = … …

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\cdot(-5+x)=12x+\frac{1}{2}x^2$ con $x\in Q$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita uno o più valori scelti a caso e verificando se il valore del primo membro risulta uguale al valore assunto dal secondo membro. È evidente che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

Per risolvere un'equazione cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni si procede applicando i principi d'equivalenza.

DEFINIZIONE. Due equazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme soluzione.

PRIMO PRINCIPIO**.** Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.

SECONDO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.

La forma più semplice di un’equazione di primo grado in un’incognita è:

x = *numero*

L'insieme delle soluzioni di una equazione di questo tipo è {numero}.
Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = -3$ è l'insieme {-3}.
I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata. Vediamo nel paragrafo che segue come si fa.

►3. Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d’equivalenza prima enunciati per condurre un’equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

DEFINIZIONE. Risolvere un’equazione significa determinare il suo **I**nsieme **S**oluzione

Cominciamo con alcuni esempi.

Applicazione del 1° principio di equivalenza

Esempio

■ $x-5=3$

sommo 5 a entrambi i membri: $x-5+5=3+5$ $x=8$ I.S. = {8}

Esempio

■ $3x=2+2x$

sottraggo 2x a entrambi i membri: $3x-2x=2+2x-2x$ $x=2$ I.S. {2}

Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza

2 $x+2=7$ $2+x=3$ $16+x=26$

3 $x-1=1$ $3+x=-5$ $12+x=-22$

3 $3x=2x-1$ $8x=7x+4$ $2x=x-1$

5 $5x=4x+2$ $3x=2x-3$ $3x=2x-2$

6 $7+x=0$ $7=-x$ $-7=x$

7 $1+x=0$ $1-x=0$ $0=2-x$

8 $-5x+2=-6x+6$ $-2+5x=8+4x$ $3x-1=2x-3$

9 $7x+1=6x+2$ $-1-5x=3-6x$ $7x-2x-2=4x-1$

Applicazione del 2° principio di equivalenza

Esempio

■ $3x=12$

divido entrambi i membri per 3, si ha $\frac{3}{3}x=\frac{12}{3}$ $x=4$

■ $\frac{1}{2}x=2$

moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha $2\cdot\frac{1}{2}x=2\cdot 2$ $x=4$

Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza

10 $2x=8$ $2x=3$ $6x=24$

11 $\frac{1}{3}x=-1$ $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$ $\frac{3}{2}x=12$

12 $3x=\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}x=4$ $\frac{3}{4}x=\frac{12}{15}$

13 $3x=6$ $\qquad \frac{1}{3}x=\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{2}{5}x=\frac{10}{25}$

Applicando entrambi i principi

Esempio

- $-2x+1=3x-5$

sottraggo 1 a entrambi i membri

$-2x+1-1=3x-5-1$

$-2x=3x-6$

sottraggo 3x a entrambi i membri

$-2x-3x=3x-3x-6$

$-5x=-6$

divido entrambi i membri per -5

$\frac{-5}{-5}x=\frac{-6}{-5}$

$x=\frac{6}{5}$

Risolvi le seguenti equazioni

14 $2x+1=7$ $\qquad 3-2x=3$ $\qquad 6x-12=24$

15 $3x+3=4$ $\qquad 5-x=1$ $\qquad 7x-2=5$

16 $2x+8=8-x$ $\qquad 2x-3=3-2x$ $\qquad 6x+24=3x+12$

17 $2+8x=6-2x$ $\qquad 6x-6=5-x$ $\qquad -3x+12=3x+18$

18 $3-2x=8+2x$ $\qquad \frac{2}{3}x-3=\frac{1}{3}x+1$ $\qquad \frac{6}{5}x=\frac{24}{5}-x$

19 $3x-2x+1=2+3x-1$ $\qquad \frac{2}{5}x-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{10}$ $\qquad \frac{5}{6}x+\frac{3}{2}=\frac{25}{3}-\frac{10}{2}x$

Esempio

Prendiamo l’equazione $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ nella sola incognita x di primo grado a coefficienti numerici interi. Cerchiamo di trasformarla nella forma canonica “x = numero” applicando i principi di equivalenza.

- I° passo: svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x+1+6+3x=12x-1$
- II° passo: sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x+7=12x-1$
- III° passo: sottraiamo ad ambo i membri il monomio 12x, applicando il primo principio: $4x-12x+7=12x-1-12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x+7=-1$.
- IV° passo: sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x+7-7=-1-7 \rightarrow -8x=-8$
- V° passo: dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x=\frac{-8}{-8} \rightarrow x=1$

L’equazione assegnata $(x+1)+3\cdot(2+x)=12x-1$ risulta equivalente all’ultima trovata x=1, pertanto il suo insieme soluzione è I.S. = {1}.

20 Risolvi l'equazione $10x+4=-2\cdot(x+5)-x$ seguendo la traccia:

1° passo: svolgi i calcoli al primo e al secondo membro … … … … … … … … … … …

2° passo: somma i monomi simili in ciascun membro dell’equazione: … … … … … … …

3° passo: applica il primo principio d’equivalenza per lasciare in un membro solo monomi con l’incognita e nell’altro membro solo numeri

… … … … … … … … … … … … … … …

4° passo: somma i termini del primo membro e somma i termini del secondo membro:

… … … … … … … … … … … … … … … …

5° passo: applica il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita:

… … … … … … … … … … … in forma canonica: … … … … … … … …

6° passo: scrivi l'Insieme Soluzione : I.S. = … … …

21 Risolvi, seguendo la traccia, l'equazione $x-(3x+5)=(4x+8)-4\cdot(x+1)$

1° svolgo i calcoli: … … … … … … … … … … … … … … … … …

2° sommo i monomi simili: … … … … … … … … … … … … … …

3° porto al primo membro i monomi con la x e al secondo membro quelli senza x

… … … … … = … … … … ...

4° sommo i monomi simili al primo membro e al secondo membro … … … = … … …

5° divido ambo i membri per il coefficiente dell'incognita … … = … ….

6° l'insieme soluzione è {… ...}

Osservazione

La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune **regole pratiche** che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che scendono direttamente dal primo principio d'equivalenza:

Regole

- Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.
- Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.
- Se il coefficiente dell'incognita è -1, ossia l'equazione si presenta nella forma $-x=n$, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma x=-n e quindi I.S.={-n}. Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.

Proviamo a procedere applicando questa regola.

Esempio

- $5x+2\cdot(3-x)+1=-(4x-1)+2\cdot(6-x)$.

1° passo: svolgiamo i calcoli $5x+6-2x+1=-4x+1+12-2x$

2° passo: eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri:

$5x+6\cancel{-2x}\cancel{+1}=-4x\cancel{+1}+12\cancel{-2x}$ otteniamo: $5x+6=-4x+12$

3° passo: spostiamo il monomio -4x del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero +6 da sinistra a destra; otteniamo $5x+4x=-6+12$

4° passo: sommando i termini simili nei due membri otteniamo $9x=+6$ da cui dividendo per 9 ambo i membri si ottiene $x=\frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

► 4. Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede:

Esempio

- $\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x=\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1$.

Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

I° passo: calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(2,3) = 6

II° passo: moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x\right)=6\left(\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1\right)$

III° passo: eseguiamo i calcoli: $4x+24-3+12x=2x+4-15x+6$.

I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti.

22 Risolvi l'equazione $\frac{3\cdot(x-11)}{4}=\frac{3\cdot(x+1)}{5}-\frac{1}{10}$.

- I° passo: calcola m.c.m.(4,5,10) = ………
- II° passo: moltiplica ambo i membri per …... e ottieni: … … … … … … … … … … ...
- III° passo: …

Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1

Esempio

- $(2x+1)\cdot(x-2)=2\cdot(x+1)^2-5x$

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita, eseguiti i calcoli comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

I° passo: svolgiamo i calcoli e otteniamo:
$2x^2-4x+x-2=2x^2+4x+2-5x \quad \rightarrow \quad 2x^2-3x-2=2x^2-x+2$

II° passo: applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x+x=+2+2$.
Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e I.S.

III° passo … … … … … … … … … … … … … … I.S. = { }.

Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio

- $\frac{4}{5}-\frac{x}{2}=\frac{2-5x}{10}$

I° passo: Calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(5, 2, 10) = 10.

II° passo: Moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\frac{4}{5}-\frac{x}{2}\right)=10\left(\frac{2-5x}{10}\right)$.

III° passo: Eseguiamo i calcoli: $8-5x=2-5x$.

IV° passo: Applichiamo la regola pratica: $-5x+5x=2-8$ i monomi in x si annullano!

V° passo: Sommando i monomi simili si ottiene: $0\cdot x=-6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi $\text{I.S.}=\emptyset$, l'equazione risulta impossibile

Esempio

- $\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}=-\frac{x}{2}$

I° passo: Calcoliamo il m.c.m. tra i denominatori: in questo caso m.c.m.(6, 3, 2) = 6

II° passo: Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}\right)=6\left(-\frac{x}{2}\right)$

III° passo: Eseguiamo i calcoli : $x-4x=-3x$

IV° passo: Applicando il primo principio si ottiene $0\cdot x=0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi I.S. = Q, l'equazione è indeterminata (identità).

Riassumendo:
La forma canonica di un'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici è $A\cdot x=B$ con A e B numeri razionali.
Possono presentarsi i casi:

- se $A\neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi $I.S.=\left\{\frac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.
- se $A=0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:
  - $B=0$ allora $I.S.=Q$. L'equazione è indeterminata.
  - $B\neq 0$ allora $I.S.=\emptyset$. L'equazione è impossibile

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:

$A\cdot x=B$
- $A\neq 0$ $\rightarrow$ equazione determinata e $I.S.=\left\{\frac{B}{A}\right\}$
- $A=0$
  - $B=0$ $\rightarrow$ equazione indeterminata e $I.S.=Q$
  - $B\neq 0$ $\rightarrow$ equazione impossibile e $I.S.=\emptyset$

Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicate

23 $x+7=8$, N $4+x=2$, Z $x-3=4$, N $x=0$,N

24 $x+1=0$, Z $5x=0$, Z $\frac{x}{4}=0$, Q $-x=0$, Z

25 $7+x=0$, Z $-2x=0$, Z $-x-1=0$, Z $\frac{-x}{4}=0$, Q

26 $x-\frac{2}{3}=0$, Q $\frac{x}{-3}=0$, Z $2(x-1)=0$, Z $-3x=1$, Q

27 $3x=-1$, Q $\frac{x}{3}=1$, Q $\frac{x}{3}=2$, Q $\frac{x}{3}=-2$, Q

28 $0x=0$, Q $0x=5$, Q $0x=-5$, Q $\frac{x}{1}=0$, Q

29 $\frac{x}{1}=1$, Q $-x=10$, Z $\frac{x}{-1}=-1$, Z $3x=3$, N

Risolvi le seguenti equazioni

30 $3x=\frac{1}{3}$ $-3x=\frac{-1}{3}$ $x+2=0$

31 $4x-4=0$ $4x-0=1$ $2x+3=x+3$

32 $4x-4=1$ $4x-1=1$ $4x-1=0$

33 $3x=12-x$ $4x-8=3x$ $-x-2=-2x-3$

34 $-3(x-2)=3$ $x+2=2x+3$ $-x+2=2x+3$

35 $3(x-2)=0$ $3(x-2)=1$ $3(x-2)=3$

36 $0(x-2)=1$ $0(x-2)=0$ $12+x=-9x$

37 $40x+3=30x-100$ $4x+8x=12x-8$ $-2-3x=-2x-4$

38 $2x+2=2x+3$ $\frac{x+2}{2}=\frac{x+1}{2}$ $\frac{2x+1}{2}=x+1$

39 $\pi x=0$ $\quad 0{,}12\,x=0{,}1$ $\quad 2\pi x=\pi$

40 $892x-892=892x-892$ $\quad 892x-892=893x-892$ $\quad 348x-347=340x-347$

41 $340x+740=8942+340x$ $\quad 2x+3=2x+4$ $\quad 2x+3=2x+3$

42 $2(x+3)=2x+5$ $\quad 2(x+4)=2x+8$ $\quad 3x+6=6x+6$

43 $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}$

44 $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3x-\frac{1}{2}$ $\quad -2x+3=-2x+4$ $\quad 1000x-100=2000x-200$

45 $\frac{x}{200}+\frac{1}{100}=\frac{1}{200}$ $\quad -2x-3=-2x-3$ $\quad 100x-1000=-1000x+100$

Riconosci tra le seguenti equazioni quelle determinate, quelle indeterminate e quelle impossibili.

46 $x+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{3}-1$ $\quad \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x$

47 $\frac{3}{2}=2x-\left[\frac{x-1}{3}-\left(\frac{2x+1}{2}-5x\right)-\frac{2-x}{3}\right]$ $\quad \frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}=x+4$

48 Per una sola delle seguenti equazioni, definite in Z, l'insieme soluzione è vuoto. Per quale?

[A] $x=x+1$ [B] $x+1=0$ [C] $x-1=+1$ [D] $x+1=1$

49 Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado in una sola incognita (x). Quale?

[A] $x+y=5$ [B] $x^2+1=45$ [C] $x-\frac{7}{89}=+1$ [D] $x+x^2=1$

50 Tra le seguenti una sola equazione non è equivalente alle altre. Quale?

[A] $\frac{1}{2}x-1=3x$ [B] $6x=x-2$ [C] $x-2x=3x$ [D] $3x=\frac{1}{2}(x-2)$

51 Da $8x=2$ si ottiene: [A] $x=-6$ [B] $x=4$ [C] $x=\frac{1}{4}$ [D] $x=-\frac{1}{4}$

52 Da $-9x=0$ si ottiene: [A] $x=9$ [B] $x=-\frac{1}{9}$ [C] $x=0$ [D] $x=\frac{1}{9}$

53 L'insieme soluzione dell'equazione $2\cdot(x+1)=5\cdot(x-1)-11$ è:

[A] $I.S.=\{-6\}$ [B] $I.S.=\{6\}$ [C] $I.S.=\left\{\frac{11}{3}\right\}$ [D] $I.S.=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Per ogni equazione, individua quali tra gli elementi dell'insieme indicato a fianco sono soluzioni:

54 $\frac{x+5}{2}+\frac{1}{5}=0$ $\quad Q=\{1,-5,7,-\frac{27}{5}\}$

55 $x-\frac{3}{4}x=4$ $\quad Q=\{1,-1,0,16\}$

56 $x(x+1)+4=5-2x+x^2$ $\quad Q=\left\{-9,3,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right\}$

Risolvi le seguenti equazioni

57 $x-5(1-x)=5+5x$ **R.** $[10]$

58 $2(x-5)-(1-x)=3x$

59 $3(2+x)=5(1+x)-3(2-x)$ R. $\left[\frac{7}{5}\right]$

60 $4(x-2)-3(x+2)=2(x-1)$

61 $\frac{x+1000}{3}+\frac{x+1000}{4}=1$ R. $\left[\frac{-6988}{7}\right]$

62 $\frac{x-4}{5}=\frac{2x+1}{3}$ R. $\left[-\frac{17}{7}\right]$

63 $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{5}=\frac{1}{10}$

64 $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$ R. [2]

65 $537x+537\frac{x}{4}-\frac{537x}{7}=0$ R. $[0]$

66 $\frac{2x+3}{5}=x-1$ R. $\left[\frac{8}{3}\right]$

67 $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}-1=\frac{x}{3}$ impossibile

68 $\frac{4-x}{5}+\frac{3-4x}{2}=3$ R. $\left[-\frac{7}{22}\right]$

69 $\frac{x+3}{2}=3x-2$

70 $\frac{x+0{,}25}{5}=1{,}75-0{,}\overline{3}x$ R. $\left[\frac{51}{16}\right]$

71 $3(x-2)-4(5-x)=3x\left(1-\frac{1}{3}\right)$

72 $4(2x-1)+5=1-2(-3x-6)$ R. [6]

73 $\frac{3}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(1-x)=x+2$ **R.[1]**

74 $\frac{1}{2}(x+5)-x=\frac{1}{2}(3-x)$ impossibile

75 $x^2-2(x-3)=3(x^2-x)=3(x^2-x)+x-1$

76 $(x+3)^2=(x-2)(x+2)+\frac{1}{3}x$ R. $\left[-\frac{39}{17}\right]$

77 $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2}=\frac{(x-1)^2}{4}$ R. [-2]

78 $2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x=3x-2$ impossibile

79 $\frac{3}{2}x+\frac{x}{4}=5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-x$ R. $\left[\frac{30}{7}\right]$

80 $(2x-3)(5+x)+\frac{1}{4}=2(x-1)^2-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{65}{44}\right]$

81 $(x-2)(x+5)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}$ R. $\left[\frac{37}{12}\right]$

82 $4(x+1)-3x(1-x)=(x+1)(x-1)+4+2x^2$ R. [-1]

83 $(x+1)^2=(x-1)^2$

84 $\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x^2-1}{2}=1$ R. [0]

85 $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{1}{3}(x^2-1)$ R. [-1]

86 $\frac{1-x}{3}\cdot(x+1)=1-x^2+\frac{2}{3}(x^2-1)$ R. [1]

87 $(x+1)^2=x^2-1$ R. [-1]

88 $(x+1)^3=(x+2)^3-3x(x+3)$ impossibile

89 $\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x-1\right)+\frac{5}{3}x\left(1+\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x(x+3)$ R. [0]

90 $\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{3}\right)-(1-x)+2\left(\frac{1}{3}x-1\right)=\frac{-3}{2}x+1$

91 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x+\frac{1}{2}$

92 $3+2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}x+\frac{x+3}{2}$ R. [4]

93 $\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(x+\frac{2-x}{3}\right)$ R. $\left[-\frac{5}{2}\right]$

94 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(x+1)(3x-1)-5x-\frac{1}{2}$ R. $\left[-\frac{9}{8}\right]$

95 $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{x+1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{x-1}{5}+\frac{7}{15}x$

96 $\frac{1}{2}(x-2)-\left(\frac{x+1}{2}-\frac{1+x}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{2-x}{6}+\frac{1+x}{3}$ impossibile

97 $-\left(\frac{1}{2}x+3\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{4}(4x+1)=\frac{1}{2}(x-1)$ R. [2]

98 $\frac{(x+1)(x-1)}{9}-\frac{3x-3}{6}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{2-2x}{6}$ R. [1]

99 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-x(x+1)(x-1)=\frac{-5}{2}x(x+1)$ R. $\left[\frac{3}{20}\right]$

100 $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2=\frac{2}{3}x$ R. [5]

2. PROBLEMI DI PRIMO GRADO IN UNA INCOGNITA

►1. Un po' di storia e qualche aneddoto

Sin dall'antichità l'uomo si è trovato di fronte a difficoltà pratiche, legate alla vita quotidiana e ha perciò messo a punto strategie per superarle.
Sembra che nell'antico Egitto le periodiche piene del Nilo abbiano spinto l'uomo a sviluppare la capacità di tracciare rette parallele, rette perpendicolari, di misurare il perimetro e l'area di particolari figure geometriche o viceversa di calcolare le misure dei lati di poligoni di dato perimetro o data area per poter ridefinire i confini degli appezzamenti di terreno.
Il *papiro di Rhind*, (dal nome dell'inglese A. H. Rhind che lo comprò a Luxor nel 1858), testo egizio scritto in ieratico, risalente al 1700 a.C., si autodefinisce "istruzioni per conoscere tutte le cose oscure" contiene più di 85 problemi con relativi metodi di soluzione riguardanti il calcolo della capacità di recipienti e di magazzini, la ricerca dell'area di appezzamenti di terreno e altre questioni aritmetiche.
Nel problema 24 del papiro, ad esempio, viene calcolato il mucchio quando esso ed il suo settimo sono uguali a 19.

Mucchio è l'incognita del problema, indicata con il termine *aha* il cui segno è  .

Noi traduciamo la richiesta nell'equazione $x+\frac{1}{7}x=19$

Nel 1202 Leonardo Pisano, conosciuto col nome paterno di "filius Bonacci" o Fibonacci, pubblicò il *Liber Abaci* in cui, a partire dall'ottavo capitolo, presenta vari metodi algebrici per la risoluzione di problemi di matematica applicata, legati alla realtà dell'epoca, in particolare all'ambiente commerciale. I nuovi \`algoritmi\` presentati da Fibonacci, intendevano facilitare la risoluzione dei problemi di calcolo evitando l'utilizzo dell'abaco.

> Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra matematici dell'epoca; il problema proposto era il seguente:
> "Quante coppie di conigli si ottengono in un anno (salvo i casi di morte) supponendo che ogni coppia dia alla luce un'altra coppia ogni mese e che le coppie più giovani siano in grado di riprodursi già al secondo mese di vita?".

Fibonacci vinse la gara dando al quesito una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. La soluzione fu trovata tramite l'individuazione di una particolare successione di numeri, nota come successione di Fibonacci.
Secondo la leggenda, il grande matematico Carl Fiedrich Gauss già all'età di tre anni avrebbe corretto un errore di suo padre nel calcolo delle sue finanze. All'età di 10 anni fu autorizzato a seguire le lezioni di aritmetica di un certo Buttner. Un giorno, agli studenti particolarmente turbolenti, Buttner diede come compito di punizione il calcolo della somma dei primi 100 numeri, da 1 a 100. Poco dopo, sorprendendo tutti, il giovanissimo Carl diede la risposta esatta, "5050" . Si era accorto che mettendo in riga tutti i numeri da 1 a 100 e nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, ogni colonna dava come somma 101; fece dunque il prodotto 100x101 e divise per 2, ottenendo facilmente il risultato: Buttner rimase sgomento ... Non abbiamo notizie certe, ma sembra che le cose siano andate così.

►2. Risoluzione dei problemi

La risoluzione dei problemi …… serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose. (R. Descartes)

I problemi che possono presentarsi nel corso degli studi o nell'attività lavorativa sono di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale, possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel testo del problema.
Analizzeremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di primo grado in una sola incognita. Prima di buttarci alla risoluzione del problema, procediamo a:

- una lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita e la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, ragionando sull'obiettivo del problema (condizioni sull'incognita);

- la traduzione in “forma matematica” delle relazioni che intercorrono tra i dati e l’obiettivo, cioè l’individuazione dell’equazione risolvente;
- proseguiamo ora con la risoluzione dell’equazione trovata;
- infine effettuiamo un confronto tra la soluzione trovata e le condizioni poste su di essa.

Problema 1

Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?

La situazione può essere materialmente descritta con una figura. Togliamo da ogni piatto della bilancia mezzo mattone, la bilancia è ancora in equilibrio come mostra la figura 2, da ciò possiamo dedurre che mezzo mattone pesa un chilo. Il mattone intero pesa dunque due chili.
Risolviamo ora il problema seguendo la procedura sopra suggerita:

Figura 1

Figura 2

dati
peso di un mattone = peso di mezzo mattone + 1kg

obiettivo
peso del mattone

Procedura risolutiva:
Come incognita del problema possiamo scegliere il peso del mattone: la indichiamo con p.
Il valore di p dovrà essere un numero positivo.
L’equazione risolvente è la traduzione con formalismo matematico dell’unica relazione contenuta nel testo del problema: $p=\frac{1}{2}p+1$.

Risolviamo l’equazione: $p-\frac{1}{2}p=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}p=1 \quad \rightarrow \quad p=2(Kg)$

La soluzione ottenuta è accettabile; il problema è determinato.

Problema 2

Aggiungendo ad un numero naturale i suoi tre quarti, si ottiene il suo doppio aumentato di 10. Qual è il numero?

L’ambiente del problema è numerico: si cerca un numero naturale. Indichiamo con *n* l’incognita cerchiamo quindi $n\in\mathbb{N}$. La lettura attenta del testo mette in luce le operazioni che dobbiamo eseguire sull’incognita e che traduciamo nei dati:

dati
$n+\frac{3}{4}n=2n+10$

obiettivo
$n\in\mathbb{N}$

Procedura risolutiva
L’equazione risolvente è già indicata nei dati $n+\frac{3}{4}n=2n+10$.

Per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 4, otteniamo:
$4n+3n-8n=40 \quad \rightarrow \quad -n=40 \quad \rightarrow \quad n=-40$

La soluzione nonè accettabile per le condizioni poste; il problema non ha soluzione.

Problema 3

Il I° gennaio 1990 Chiara aveva il doppio dell’età di Aldo; il 1° gennaio 2000 Chiara aveva vent’anni più di Aldo. Quale sarà l’età di Chiara il I° gennaio 2010?

Leggendo attentamente il problema notiamo che le incognite sono due: l’età di Chiara e l’età di Aldo.
Indichiamo perciò con ***a*** l’età di Chiara al 1990 e con ***p*** quella di Aldo.
Nel 2000 la loro età sarà aumentata di 10 anni. Naturalmente la soluzione del problema sarà nell’insieme dei numeri naturali. Scriviamo dati e obiettivo usando il formalismo matematico:

dati
nel 1990: $a=2p$
nel 2000: $a+10=(p+10)+20$

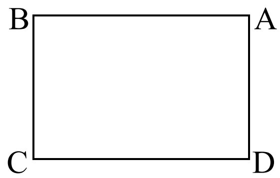
obiettivo
? età Chiara nel 2010

Procedura risolutiva
Osserviamo che una volta determinata l'età di Chiara nel 1990, basterà aggiungere a questa 20 per ottenere la soluzione, pertanto l'età di Chiara nel 2010 è a+20.
Trasformiamo la seconda relazione riportata nei dati sostituendo l'informazione relativa al 1990, si ottiene $2\text{p}+10=p+10+20 \quad \rightarrow \quad 2\text{p}-p=20 \quad \rightarrow \quad p=20$
L'età di Aldo nel 1990 era 20, quindi a=40.
Infine, l'età di Chiara nel 2010 è 40+20=60.
La soluzione accettabile; il problema è determinato.

Problema 4

Calcolare l'area di un rettangolo in cui l'altezza supera di 8m $\frac{1}{3}$ *della base e il perimetro è* $\frac{20}{7}$ *della base stessa.*

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Facendo riferimento alla figura abbiamo:



dati	obiettivo
$AD=\frac{1}{3}AB+8$	? Area (ABCD)
$2\text{p}=\frac{20}{7}AB$	

Procedura risolutiva:

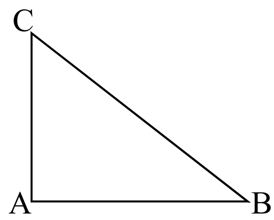
$\text{Area (ABCD)}=\text{misura base}\cdot\text{misura altezza}=\overline{AB}\cdot\overline{AD}$
Dobbiamo dunque determinare queste due misure. I dati del problema indicano che la misura dell'altezza dipende da quella della base; una volta trovata questa misura basta farne un terzo e aggiungere 8 per avere quella dell'altezza; questo ragionamento ci fa scegliere come incognita $\overline{AB}=x$ con x numero reale positivo.
Traduciamo con formalismo matematico la prima e la seconda relazione contenuta nei dati:
$\overline{AD}=\frac{1}{3}x+8;\quad 2\text{p}=\frac{20}{7}x$; sappiamo che il perimetro di un rettangolo è il doppio della somma della base con l'altezza. Riscriviamo con linguaggio matematico anche questa relazione:
$2\cdot\left(x+\frac{1}{3}x+8\right)=\frac{20}{7}x$ che risulta l'equazione risolvente.
Svolgiamo i calcoli e otteniamo $4\text{x}=21\cdot 16 \quad \rightarrow \quad x=84 \quad \rightarrow \quad \overline{AB}=84 \quad e \text{ quindi } \overline{AD}=36$.
Avendo ottenuto le misure della base e dell'altezza possiamo ora calcolare l'area:
$Area(ABCD)=36\cdot 84=3024(\text{rispetto al } m^2)$.

Problema 5

In un triangolo rettangolo il perimetro è 120cm. e un cateto è $\frac{3}{5}$ *dell'ipotenusa. Determinare l'area del triangolo.*

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un triangolo rettangolo. Rappresentiamo il triangolo:

dati	obiettivo
$C\hat{A}B = \text{angolo retto}$	
$2p = 120$	?Area (ABC)
$AC = \frac{3}{5} CB$	



Procedura risolutiva:

Area (ABC) = $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

Per calcolare l'area, occorre determinare la misura dei cateti del triangolo rettangolo; i dati del problema ci danno una relazione tra la misura di un cateto e la misura dell'ipotenusa; conosciamo anche il perimetro del triangolo.

Scegliamo come incognita la misura in cm di CB, cioè $\overline{CB} = x$ con $x \in \mathbb{R}^+$.

Formalizziamo i dati: $\overline{CB} = x$; $\overline{AC} = \frac{3}{5}x$; $\overline{AB} + x + \frac{3}{5}x = 120$ (*)

Per poter scrivere una equazione che ci permetta di determinare il valore dell'incognita ci manca la misura di AB. Sembra che il problema sia privo di una informazione. Tuttavia, il triangolo dato è rettangolo quindi tra i suoi lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora: $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Pertanto possiamo determinare la misura di AB: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}x^2} = \frac{4}{5}x$

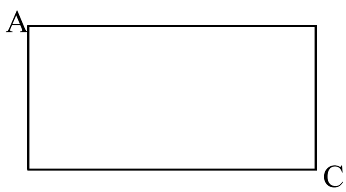
Con questo dato riscriviamo la (*) che risulta essere l'equazione risolvente del problema

$\frac{4}{5}x + x + \frac{3}{5}x = 120 \quad \rightarrow \quad 12x = 120\cdot 5 \quad \rightarrow \quad x = 50 \quad \rightarrow \quad \overline{CB} = 50$

Quindi $\overline{AC} = 30\text{cm}$ *e* $\overline{AB} = 40\text{cm}$, l'area: $Area(ABC) = \frac{30\cdot 40}{2} = 600\text{cm}^2$.

101 In un rettangolo ABCD si sa che $\overline{AB} = 91\text{m}$ *e* $\overline{BC} = 27\text{m}$; dal punto E del lato AB, traccia la perpendicolare a DC e indica con F il punto d'intersezione con lo stesso lato. Determina la misura di AE, sapendo che $\text{Area}(\text{AEFD}) = \frac{3}{4}\text{Area}(\text{EFCB})$.

Il problema è di tipo geometrico e riguarda un rettangolo. Completa la figura, i dati e l'obiettivo:



Dati $\overline{AB} = \dots\ \dots$ $\quad \overline{BC} = 27 \quad EF \in \dots\ \dots EF \perp \dots\ \dots$

Obiettivo … … …

(*) Area ……… = ………… Area ………

Poni $\overline{AE} = x$ Stabilisci le condizioni sull'incognita 0 < x < ……….

Determina in funzione di x l'area delle due parti in cui resta diviso da EF il rettangolo assegnato:

Area (AEFD) = ……… Area(EFCB) = …………

Scrivi la (*) in funzione di x ……………………………… Risolvi l'equazione ……………………..

Confronta con le condizioni ………………………

102 Luca e Andrea posseggono rispettivamente 200 euro e 180 euro; Luca spende 10 euro al giorno e Andrea 8 euro. Dopo quanti giorni avranno la stessa somma? [10]

103 Determina due numeri, sapendo che la loro somma vale 70 e il secondo supera di 16 il doppio del primo. [18, 52]

104 Calcola due numeri, sapendo che il secondo *supera* di 17 il *triplo* del primo e che la loro somma è 101. [21, 80]

105 Determinare due numeri dispari consecutivi sapendo che il minore supera di 10 i $\frac{3}{7}$ del maggiore. [19, 21]

106 Sommando 15 al doppio di un numero si ottengono i $\frac{7}{2}$ del numero stesso. Qual è il numero? [10]

107 Determinare due numeri consecutivi sapendo che i $\frac{4}{9}$ del maggiore superano di 8 i $\frac{2}{13}$ del minore.

108 Se ad un numero sommiamo il suo doppio, il suo triplo, il suo quintuplo e sottraiamo 21 otteniamo 100. Qual è il numero? [11]

109 Trova il prodotto tra due numeri, sapendo che: se al primo numero sottraiamo 50 otteniamo 50 meno il primo numero; se al doppio del secondo aggiungiamo il suo consecutivo, otteniamo 151; [2500]

110 Se a 1/25 sottraiamo un numero, otteniamo la quinta parte del numero stesso. Qual è questo numero? [1/30]

111 Carlo ha 152 caramelle e vuole dividerle con le sue due sorelline. Quante caramelle resteranno a Carlo se le ha distribuite in modo che ogni sorellina ne abbia la metà delle sue? [76]

112 Se a $\frac{5}{2}$ sottraiamo un numero, otteniamo il numero stesso aumentato di $\frac{2}{3}$. Di quale numero si tratta? [11/12]

113 Se ad un numero sottraiamo 34 e sommiamo 75, otteniamo 200. Qual è il numero? [159]

114 Se alla terza parte di un numero sommiamo 45 e poi sottraiamo 15 otteniamo 45. Qual è il numero? [45]

115 Se ad un numero sommiamo il doppio del suo consecutivo otteniamo 77. Qual è il numero? [25]

116 Se alla terza parte di un numero sommiamo la sua metà otteniamo il numero aumentato di 2. Qual è il numero? [-12]

117 Il doppio di un numero equivale alla metà del suo consecutivo più 1. Qual è il numero? [1]

118 Un numero è uguale al suo consecutivo meno 1. Trova il numero. [ind.]

119 La somma tra un numero e il suo consecutivo è uguale al numero aumentato di 2. Trova il numero.[1]

120 La somma tra un numero ed il suo consecutivo aumentato di 1 è uguale a 18. Qual è il numero? [8]

121 La somma tra un numero e lo stesso numero aumentato di 3 è uguale a 17. Qual è il numero?

122 La terza parte di un numero aumentata di 3 è uguale a 27. Trova il numero. [72]

123 La somma tra due numeri X e Y vale 80. Del numero X sappiamo che questo stesso numero aumentato della sua metà è uguale a 108. [72, 8]

124 Sappiamo che la somma fra tre numeri (X,Y,Z) è uguale a 180. Il numero X è uguale a se stesso diminuito di 50 e poi moltiplicato per 6. Il numero Y aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 40 e poi moltiplicato per 6, trova X,Y,Z. [60,60,60]

125 La somma tra la terza parte di un numero e la sua quarta parte è uguale alla metà del numero aumentata di 1. Trova il numero. [12]

126 Determina due numeri interi consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati è uguale a 49. [24; 25]

127 Trova tre numeri dispari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 87.

128 Trova cinque numeri pari consecutivi tali che la loro somma sia uguale a 1000.

129 Trova due numeri dispari consecutivi tali che la differenza dei loro cubi sia uguale a 218. [5; 7]

130 Trova un numero tale che se calcoliamo la differenza tra il quadrato del numero stesso e il quadrato del precedente otteniamo 111. [56]

131 Qual è il numero che sommato alla sua metà è uguale a 27?

132 Moltiplicando un numero per 9 e sommando il risultato per la quarta parte del numero si ottiene 74. Qual è il numero? [8]

133 La somma di due numeri pari consecutivi è 46, trova i due numeri.

134 La somma della metà di un numero con la sua quarta parte è uguale al numero stesso diminuito della sua quarta parte. Qual è il numero? [indeterminato]

135 Di Y sappiamo che il suo triplo è uguale al suo quadruplo diminuito di due, trova Y. [2]

136 Il numero Z aumentato di 60 è uguale a se stesso diminuito di 30 e moltiplicato per 4.

137 Ad un certo punto del campionato la Fiorentina ha il doppio dei punti della Juventus e l'Inter ha due terzi dei punti della Fiorentina. Sapendo che in totale i punti delle tre squadre sono 78, determinare i punti delle singole squadre. [36, 24, 18]

138 Per organizzare una gita collettiva, vengono affittati due pulmini dello stesso modello, per i quali ciascun partecipante deve pagare 12 euro. Sui pulmini restano, in tutto, quattro posti liberi. Se fossero stati occupati anche questi posti, ogni partecipante avrebbe risparmiato 1,50 euro. Quanti posti vi sono su ogni pulmino? (“La Settimana enigmistica”). [16]

139 Un rubinetto, se aperto, riempie una vasca in 5 ore; un altro rubinetto riempie la stessa vasca in 7 ore. Se vengono aperti contemporaneamente, quanto tempo ci vorrà per riempire un sesto della vasca?

140 Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: ``la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è l'oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla meditazione; vi sono inoltre tre donne." Quanti allievi aveva Pitagora? (Preso dal libro "Matematica dilettevole e curiosa")

141 Trovare un numero di due cifre sapendo che la cifra delle decine è inferiore di 3 rispetto alla cifra delle unità e sapendo che invertendo l'ordine delle cifre e si sottrae il numero stesso, si ottiene 27. ("Algebra ricreativa")

142 Al cinema ``Matematico" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. E' stato un affare?

143 A mezzogiorno le lancette dei minuti e delle ore sono sovrapposte. Quando saranno di nuovo sovrapposte?

144 Con due qualità di caffè da 3 euro/kg e 5 euro/kg si vuole ottenere un quintale di miscela da 3,25 euro/kg. Quanti kg della prima e quanti della seconda qualità occorre prendere?

145 Ubaldo, per recarsi in palestra, passa sui mezzi di trasporto 20 minuti, tuttavia il tempo totale per completare il tragitto è maggiore a causa dei tempi di attesa. Sappiamo che Ubaldo utilizza 3 mezzi, impiega i $\frac{3}{10}$ del tempo totale per l'autobus, i $\frac{3}{5}$ del tempo totale per la metropolitana e 10 minuti per il treno. Quanti minuti è costretto ad aspettare i mezzi di trasporto? [*Poni x il tempo di attesa*, R. 80']

146 In una partita a dama dopo i primi 10 minuti sulla scacchiera restano ancora 18 pedine. Dopo altri 10 minuti un giocatore perde 4 pedine nere e l'altro 6 pedine bianche ed entrambi rimangono con lo stesso numero di pedine. Calcolate quante pedine aveva ogni giocatore dopo i primi 10 minuti di gioco.

147 Due numeri naturali sono tali che la loro somma è 16 e il primo, aumentato di 1, è il doppio del secondo diminuito di 3. Trovare i due numeri. [*Impossibile*]

148 Un dvd recorder ha due modalità di registrazione: SP e LP. Con la seconda modalità è possibile registrare il doppio rispetto alla modalità SP. Con un dvd dato per 2 ore in SP, come è possibile registrare un film della durata di 3 ore e un quarto? Se voglio registrare il più possibile in SP (di qualità migliore rispetto all'altra) quando devo necessariamente passare all'altra modalità LP?

149 Tizio si reca al casinò e gioca tutti i soldi che ha; dopo la prima giocata, perde la metà dei suoi soldi. Gli vengono prestati 2 euro e gioca ancora una volta tutti i suoi soldi; questa volta vince e i suoi averi vengono quadruplicati. Torna a casa con 100 euro. Con quanti soldi era arrivato al casinò? [46€]

150 I sette nani mangiano in tutto 127 bignè; sapendo che il secondo ne ha mangiati il doppio del primo, il terzo il doppio del secondo e così via. quanti bignè ha mangiato ciascuno di loro? [1, 2, 4, 8, 16...]

151 Babbo Natale vuole mettere in fila le sue renne in modo tale che ogni fila abbia lo stesso numero di renne. Se le mette in fila per quattro le file sono due di meno rispetto al caso in cui le mette in fila per tre. Quante sono le renne? [24]

152 Cinque fratelli si devono spartire un'eredità di 180000 euro in modo tale che ciascuno ottenga 8000 euro in più del fratello immediatamente minore. Quanto otterrà il fratello più piccolo? [20.000]

153 Giovanni ha tre anni in più di Maria. Sette anni fa la somma delle loro età era 19. Quale età hanno attualmente? [15, 18]

154 Francesca ha il triplo dell'età di Anna. Fra sette anni Francesca avrà il doppio dell'età di Anna. Quali sono le loro età attualmente. [7, 21]

155 In una fattoria ci sono tra polli e conigli 40 animali con 126 zampe. Quanti sono i conigli? [17 polli, 23 conigli]

156 Due anni fa ho comprato un appartamento. Ho pagato alla consegna 1/3 del suo prezzo. Dopo un anno ¾ della rimanenza, oggi ho saldato il debito sborsando 40.500 €. Quale è stato il prezzo dell'appartamento? [243.000 €]

157 Un ciclista pedala in una direzione a 30 km/h, un marciatore parte a piedi dallo stesso punto e alla stessa ora e va nella direzione contraria a 6 km/h. Dopo quanto tempo saranno lontani 150 km? [250']

158 Una banca mi offre il 2% di interesse su quanto depositato all'inizio dell'anno. Alla fine dell'anno vado a ritirare i soldi depositati più l'interesse: se ritiro € 20.400 quanto avevo depositato all'inizio? Quanto dovrebbe essere la percentuale di interesse per ricevere € 21.000 depositando i soldi calcolati al punto precedente? [€ 20.000; 5%]

159 Un treno parte da una stazione e viaggia alla velocità costante di 120km/h. Dopo 80 minuti parte un secondo treno dalla stessa stazione e nella stessa direzione alla velocità di 150km/h. Dopo quanti km il secondo raggiungerà il primo? [800 km]

160 In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è 3/7 dell'altro angolo acuto. Quanto misurano gli angoli del triangolo? [63°, 27°, 90°]

161 In un triangolo un angolo è i 3 / 4 del secondo angolo, il terzo angolo supera di 10° la somma degli altri due. Quanto misurano gli angoli? [36°,43; 48°,57; 95°]

162 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 122m, la base di 24m. Quanto misura ciascuno dei due lati obliqui congruenti? [49m]

163 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 188cm, la somma dei due lati obliqui supera di 25cm i 2/3 della base. Calcola la lunghezza dei lati. [97,8cm; 45,1cm; 45,1cm]

164 In un triangolo ABC di perimetro 186cm il lato AB è 5/7 di BC e BC è 3/7 di AC. Quanto misurano i lati del triangolo? [32,82cm; 45,95cm; 107,22cm]

165 Un trapezio rettangolo ha la base minore che è 2/5 della base maggiore, l'altezza è 5/4 della base minore. Sapendo che il perimetro è 294,91m, calcola l'area del trapezio. [4235cm^2]

166 Un trapezio isoscele ha la base minore pari a 7/13 della base maggiore, il lato obliquo è pari ai 5/6 della differenza tra le due basi. Sapendo che il perimetro misura 124cm, calcola l'area del trapezio. [683,38cm^2]

167 Il rettangolo ABCD ha il perimetro di 78cm, inoltre sussiste la seguente relazione tra i lati: $\bar{AD}=\frac{8}{5}\bar{AB}+12\text{cm}$. Calcola l'area del rettangolo. [297,16cm^2]

168 Un rettangolo ha il perimetro che misura 240cm, la base è tripla dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [2700 cm^2]

169 In un rettangolo l'altezza supera di 3cm i 3/4 della base, inoltre i 3/2 della base hanno la stessa misura dei 2/3 dell'altezza. Calcola le misura della base e dell'altezza. [2; 9/2]

170 In un triangolo isoscele la base è gli 8/5 del lato ed il perimetro misura cm 108. Trovare l'area del triangolo e la misura dell'altezza relativa ad uno dei due lati obliqui. [432cm^2; 28,8cm]

171 In un rombo la differenza tra le diagonali è di cm.3. Sapendo che la diagonale maggiore è 4/3 della minore, calcolare il perimetro del rombo. [30cm]

172 Determinare le misure delle dimensioni di un rettangolo, sapendo che la minore è uguale ad 1/3 della maggiore e che la differenza tra il doppio della minore e la metà della maggiore è di cm.10. Calcolare inoltre il lato del quadrato avente la stessa area del rettangolo dato.

$$[60\text{cm}\,, 20\text{cm}\,, 20\sqrt{3}\,cm]$$

173 In un trapezio rettangolo il lato obliquo e la base minore hanno la stessa lunghezza. La base maggiore supera di 7 cm i 4/3 della base minore. Calcolare l'area del trapezio sapendo che la somma delle basi è 42 cm. [189cm^2]

174 L'area di un trapezio isoscele è 168cm^2, l'altezza è 8 cm, la base minore è 5/9 della maggiore. Calcolare le misure delle basi, del perimetro del trapezio e delle sue diagonali. [27cm; 15cm; 62cm; 22,47cm]

175 Le due dimensioni di un rettangolo differiscono di cm 4. Trovare la loro misura sapendo che aumentandole entrambe di cm 3 l'area del rettangolo aumenta di cm^2 69. [12cm; 8cm]

176 In un quadrato ABCD il lato misura 12 cm. Detto M il punto medio del lato AB, determinare sul lato opposto CD un punto N tale che l'area del trapezio AMND sia metà di quella del trapezio MBCN. [DN=2cm]

177 Nel rombo ABCD la somma delle diagonali è 20 cm. ed il loro rapporto è 2/3. Determinare sulla diagonale maggiore AC un punto P tale che l'area del triangolo APD sia metà di quella del triangolo ABD.

$$\left[\overline{AP}=\frac{\overline{AC}}{2}=6\text{cm}\right]$$

3. Le equazioni con il software Derive

Il comando implementato in Derive per la risoluzione di equazioni è SOLVE. Esso deve essere accompagnato dall'equazione da risolvere e dalla variabile rispetto alla quale questa deve essere risolta, cioè se si vuole risolvere l'equazione: x + 3 = 2x – 5

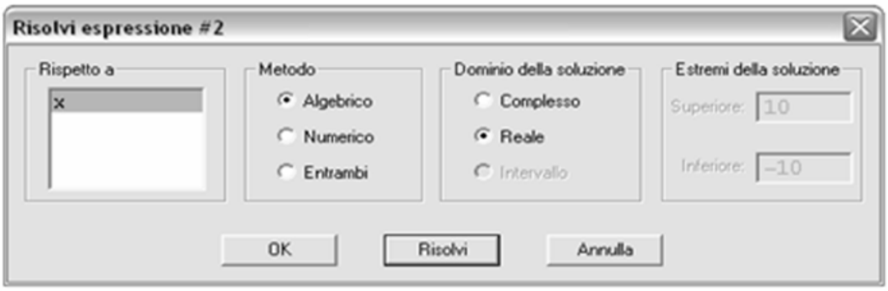
bisogna inserire il comando: `#1:   SOLVE(x + 3 = 2·x – 5, x)`

Fatto ciò basta cliccare sull'icona = per visualizzare la soluzione dell'equazione.

```
#1:   SOLVE(x + 3 = 2·x – 5, x)

#2:                                        x = 8
```

Questo comando permette di vedere come, cambiando l'insieme d'appartenenza dell'incognita, l'equazione può ammettere o no soluzioni. Infatti, l'equazione $x^2+1=0$ non ammette soluzioni nell'insieme dei numeri reali

```
              2
#2:   SOLVE(x  + 1 = 0, x)
```




```
              2
#2:   SOLVE(x  + 1 = 0, x, Real)

#3:                                        false
```

Inoltre è possibile notare come il comando SOLVE tratta i casi in cui l'equazione si presenta possibile, impossibile o indeterminata. Infatti, se si chiede di risolvere un'equazione indeterminata, si ottiene in uscita il valore di verità *true*, che sta ad indicare il fatto che l'uguaglianza è vera per qualsiasi valore dell'incognita.

```
#1:   SOLVE(4·x = 3·x + x, x)

#2:                                        true
```

Se si chiede di risolvere un'equazione impossibile, la risposta del software sarà *false* e sta ad indicare che l'uguaglianza non si realizza per nessun valore dell'incognita.

```
#1:   SOLVE(4·x + 4 + x – 3 = 5·x – 3, x)

#2:                                        false
```

In entrambi i casi è possibile rendersi conto del risultato semplificando le espressioni mediante il comando BASE del menu SEMPLIFICA.

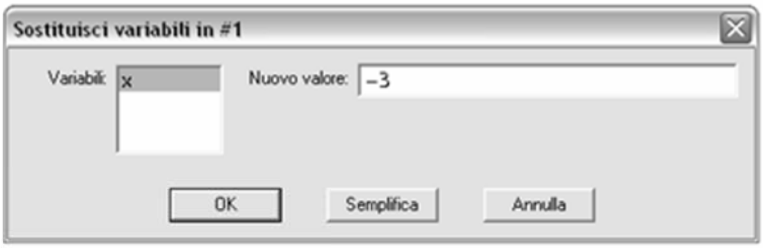
```
#1:   4·x = 3·x + x

#2:                                        4·x = 4·x

                                   equazione indeterminata

#3:   4·x + 4 + x – 3 = 5·x – 3

#4:                                        5·x + 1 = 5·x – 3

                                   equazione impossibile
```

E' inoltre possibile risolvere le equazioni e verificare che quelli ottenuti sono proprio i valori dell'incognita che realizzano l'uguaglianza, sfruttando il comando SOSTITUISCI VARIABILI del menu SEMPLIFICA.

#1: $5 - 2\cdot(x - 4) = 4 - 5\cdot x$

#2: SOLVE($5 - 2\cdot(x - 4) = 4 - 5\cdot x$, x, Real)

#3: $x = -3$



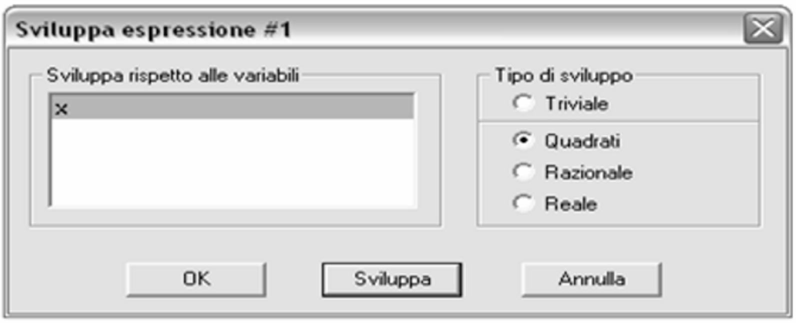
#1: $5 - 2\cdot(x - 4) = 4 - 5\cdot x$

#2: SOLVE($5 - 2\cdot(x - 4) = 4 - 5\cdot x$, x, Real)

#3: $x = -3$

#4: $19 = 19$

#1: $(x - 1)^2 = 2\cdot x + 2$



#1: $(x - 1)^2 = 2\cdot x + 2$

#2: $x^2 - 2\cdot x = 2\cdot x + 1$

Scheda da lavoro

Esempi

Risolvi e verifica le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$(x-2)(x-3)-6=(x+2)^2+5$$

$$(x-3)(x-4)-\frac{1}{3}(1-3x)(2-x)=\frac{1}{3}x-5\left(\frac{2x-9}{6}\right).$$

Indicazioni operative

1. Inserisci la prima espressione nel campo in basso
2. Clicca su INVIO
3. Dal menu Semplifica scegli il comando Sviluppa e seleziona la casella Quadrati
4. Clicca su Sviluppa
5. Dal menu Risolvi scegli il comando Espressione, seleziona la variabile x e clicca su Risolvi
6. Clicca sulla riga #1 e, dal menu Semplifica, scegli Sostituzione variabili
7. Inserisci il valore
8. Clicca su Semplifica
9. Otterrai in questo modo la seguente schermata nella quale comparirà l'uguaglianza.

#1: $(x-2)\cdot(x+3)-6=(x+2)^2+5$

#2: $x=4\cdot x+21$

#3: SOLVE(x = 4·x + 21, x, Real)

#4: $x=-7$

#5: $30=30$

Esegui gli stessi passaggi per risolvere la seconda equazione e alla fine otterrai la schermata seguente.

#1: $(x-3)\cdot(x-4)-\frac{1}{3}\cdot(1-3\cdot x)\cdot(2-x)=\frac{1}{3}\cdot x-5\cdot\frac{2\cdot x-9}{6}$

#2: $x=\frac{2\cdot x}{7}+\frac{23}{28}$

#3: $\text{SOLVE}\left(x=\frac{2\cdot x}{7}+\frac{23}{28},\ x,\ \text{Real}\right)$

#4: $x=\frac{23}{20}$

#5: $\left(\frac{23}{20}-3\right)\cdot\left(\frac{23}{20}-4\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(1-3\cdot\frac{23}{20}\right)\cdot\left(2-\frac{23}{20}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{20}-5\cdot\frac{2\cdot\frac{23}{20}-9}{6}$

#6: $\frac{179}{30}=\frac{179}{30}$

Risolvi con il software Derive le seguenti equazioni numeriche

178 $\frac{2w-1}{3}+\frac{w-5}{4}=\frac{w+1}{3}-4$ $\left[R.\ -\frac{25}{7}\right]$

$\frac{2w-1}{3}+\frac{w-5}{4}=\frac{w+1}{3}-4$ $\left[R.\ -\frac{25}{7}\right]$

179 $\frac{2x-3y+1}{2}+\frac{x-2y-2}{3}=\frac{x+y+3}{4}$ $\left[R.\ x=\frac{29y+11}{13};\ y=\frac{13x-11}{29}\right]$

180 $(2x-5)^2+2(x-3)=(4x-2)(x+3)-28x+25$ $[R.\ true]$

MATEMATICA C3
ALGEBRA 1
5. SCOMPOSIZIONI E FRAZIONI

Wicker Composition
photo bby: Cobalt123
taken from: http://www.flickr.com/photos/cobalt/394252539/

1 SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

►1. Cosa significa scomporre in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa scrivere il polinomio come il prodotto di polinomi e monomi che moltiplicati tra loro danno come risultato il polinomio stesso.
La scomposizione in fattori è stata già vista con i numeri naturali quando si è studiato come scrivere un numero come prodotto dei suoi fattori primi.

36	2
18	3
6	3
2	2
1	

Quindi si può dire che 36 = $2^2 3^2$ ed è quindi scomposto come prodotto dei suoi fattori primi.

Il polinomio $3a^3b^2-3ab^4$ si può scomporre in fattori in questo modo $3ab^2(a-b)(a+b)$, infatti eseguendo i prodotti si ottiene $3ab^2(a-b)(a+b)=3ab^2(a^2+ab-ba-b^2)=3ab^2(a^2-b^2)=3a^3b^2-3ab^4$.
La scomposizione termina quando non è possibile scomporre ulteriormente i fattori individuati.
Come per i numeri la scomposizione in fattori dei polinomi identifica il polinomio in maniera univoca (a meno di multipli).

DEFINIZIONE. Un polinomio si dice **riducibile** (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà **irriducibile**.

La caratteristica di un polinomio di essere irriducibile dipende dall'insieme numerico al quale appartengono i coefficienti del polinomio; uno stesso polinomio può essere irriducibile nell'insieme dei numeri razionali ma riducibile in quello dei numeri reali o ancora in quello dei complessi.
Dalla definizione consegue che un polinomio di primo grado è irriducibile.

DEFINIZIONE. La scomposizione in fattori di un polinomio è la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili.

1 Associa le espressioni a sinistra con i polinomi a destra:

$(a+2b)^2$	$2a^2-4ab+3ab-6b^2$
$3ab^2(a^2-b)$	$a^2+4ab+4b^2$
$(2a+3b)(a-2b)$	$9a^2-b^2$
$(3a-b)(3a+b)$	$3a^3b^2-3ab^3$

►2. Raccoglimento totale a fattore comune

Questo è il primo metodo che si deve cercare di utilizzare per scomporre un polinomio. Il metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.
Prendiamo in considerazione il seguente prodotto: $a(x+y+z)=ax+ay+az$. Il nostro obiettivo è ora quello di procedere da destra verso sinistra, cioè avendo il polinomio $ax+ay+az$ come possiamo fare per individuare il prodotto che lo ha generato? In questo caso semplice possiamo osservare che i tre monomi contengo tutti la lettera *a*, che quindi si può mettere in comune, o come anche si dice "in evidenza". Perciò scriviamo $ax+ay+az=a(x+y+z)$.

Esempio

- $3a^2b(2a^3-5b^2-7c)$

$= 3a^2b(2a^3)+3a^2b(-5b^2)+3a^2b(-7c)= 6a^5b-15a^2b^3-21a^2bc$

L'ultima uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il raccoglimento totale a fattore comune.

Partendo da $6a^5b-15a^2b^3-21a^2bc$ possiamo notare che i coefficienti numerici 6, 15 e 21 hanno il 3 come fattore in comune. Notiamo anche che la lettera a è in comune, come la lettera b. Raccogliendo tutti i fattori comuni si avrà il prodotto di partenza $3a^2b(2a^3-5b^2-7c)$.

Procedura per mettere in evidenza il fattore comune

1.Trovare il M.C.D. di tutti i termini che formano il polinomio: tutti i fattori in comune con l'esponente minimo con cui compaiono.

2. Scrivere il polinomio come prodotto del M.C.D. per il polinomio ottenuto, dividendo ciascun monomio del polinomio di partenza per il M.C.D.

3. Verificare la scomposizione eseguendo la moltiplicazione per vedere se il prodotto dà come risultato il polinomio da scomporre.

Esempi

- $10x^5y^3z-15x^3y^5z-20x^2y^3z^2$

Trovo tutti i fattori comuni con l'esponente minore per formare il M.C.D

$M.C.D.=5x^2y^3z$

Divido ciascun termine del polinomio per $5x^2y^3z$:

$10x^5y^3z : 5x^2y^3z=2x^3$

$-15x^3y^5z : 5x^2y^3z=-3xy^2$

$-20x^2y^3z^2 : 5x^2y^3z=-4z$

Il polinomio si può allora scrivere come

$5x^2y^3z\cdot(2x^3-3xy^2-4z)$

Il fattore da raccogliere a fattore comune può essere scelto con il segno "+" o con il segno "-".

Nell'esempio precedente è valida anche la seguente scomposizione:

$10x^5y^3z-15x^3y^5z-20x^2y^3z^2=-5x^2y^3z\cdot(-2x^3+3xy^2+4z)$

- $5a^2x^2-10ax^5$

Tra i coefficienti numerici il fattore comune è 5.

Tra la parte letterale sono in comune le lettere a e x, la a con esponente 1, la x con esponente 2.

$M.C.D.=5ax^2$

Passiamo quindi a scrivere $5a^2x^2-10ax^5=5ax^2(\ldots\ldots\ldots)$

Nella parentesi vanno i monomi che si ottengono dalle divisioni

$5a^2x^2:5ax^2=a$

$-10ax^5:5ax^2=-2x^3$

In definitiva

$5a^2x^2-10ax^5=5ax^2(a-2x^3)$

Scomponi in fattori raccogliendo a fattore comune

2	$ax+3a^2x-abx$		R. $ax(3a-b+1)$
3	$15b^2+12bc+21abx+6ab^2$		R. $3b(7ax+2ab+5b+4c)$
4	$91m^5n^3+117m^3n^4$	$-5a^2+10ab^2-15b$	
5	ab^2-a+a^2	$2b^6+4b^4-b^9$	
6	$2a^2b^2x-4a^2b$	$15x^2y-10xy+25x^2y^2$	
7	$-3a^2b^2+6ab^2-15b$	ab^2-a+a^2	
8	$2b^6+4b^4-b^9$	$-5a^4-10a^2-30a$	
9	$-a^2b^2-a^3b^5+b^3$	$-2x^6+4x^5-6x^3y^9$	
10	$-a^4-a^3-a^5$	$-12a^8b^9-6a^3b^3-15a^4b^3$	
11	$2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2b^2c^2$		R. $2b^2(a+c-a^2-c^2)$
12	$-2x^2z^3+4z^5-6x^3z^3$	$-\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x^3$	
13	$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{6}a^3b^2$	
14	$a^n+a^{n+1}+a^{n+2}$		R. $a^n(1+a+a^2)$
15	$a^n+a^{n-1}+a^{n-2}$	$a^n+a^{2n}+a^{3n}$	

Esempi

- $6a(x-1)+7b(x-1)$

Il fattore comune è $(x-1)$, quindi il polinomio si può scrivere come

$(x-1)\cdot[\ldots\ldots\ldots]$

nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni

$6a(x-1):(x-1)=6a$
$7b(x-1):(x-1)=7b$
In definitiva
$6a(x-1)+7b(x-1)=(x-1)(6a+7b)$

- $10(x+1)^2-5a(x+1)$

Il fattore comune è $5(x+1)$, quindi possiamo cominciare a scrivere
$5(x+1)\cdot[\ldots\ldots\ldots]$, nella parentesi quadra mettiamo i termini che si ottengono dalla divisione
$10(x+1)^2:5(x+1)=2(x+1)$
$-5a(x+1):5(x+1)=a$
In definitiva
$10(x+1)^2-5a(x+1)=5(x+1)[2(x+1)-a]$

16 $a(x+y)-b(x+y)$ $\quad$ $(x+y)^3-(x+y)^2$
17 $x^2(a+b)^3+x^3(a+b)+x^5(a+b)^2$ $\quad$ R. $x^2(a+b)(ax^3+bx^3+x+a^2+2ab+b^2)$
18 $5y^3(x-y)^3-3y^2(x-y)$ $\quad$ $5a(x+3y)-3(x+3y)$
19 $2x(x-1)-3a^2(x-1)$ $\quad$ $2(x-3y)-y(3y-x)$
20 $3x^2(a+b)-2x^3(a+b)+5x^5(a+b)$ $\quad$ R. $x^2(a+b)(5x^3-2x+3)$

►3. Raccoglimento parziale a fattore comune

Quando un polinomio non ha alcun fattore comune a tutti i suoi termini, possiamo provare a mettere in evidenza tra gruppi di monomi e successivamente individuare il polinomio in comune.
Osserviamo il prodotto $(a+b)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz$.
Supponiamo ora di avere il polinomio $ax+ay+az+bx+by+bz$ come possiamo fare a tornare indietro per scriverlo come prodotto di polinomi?

Esempio

- $ax+ay+az+bx+by+bz$

Non c'è nessun fattore comune a tutto il polinomio.
Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini. Evidenziamo tra i primi tre termini e b tra gli ultimi tre, avremo:
$a(x+y+z)+b(x+y+z)$
Ora risulta semplice vedere che il trinomio $(x+y+z)$ è in comune e quindi lo possiamo mettere in evidenza
$ax+ay+az+bx+by+bz=a(x+y+z)+b(x+y+z)=(x+y+z)(a+b)$.

Procedura per eseguire il raccoglimento parziale
1. Dopo aver verificato che non è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune totale raggruppo i monomi in modo che in ogni gruppo sia possibile mettere in comune qualche fattore;
2. Verifico se la nuova scrittura del polinomio ha un polinomio (binomio, trinomio...) comune a tutti i termini.
3. Se è presente il fattore comune a tutti i termini lo metto in evidenza;
4. Se il fattore comune non è presente la scomposizione è fallita, allora posso provare a raggruppare diversamente i monomi o abbandonare questo metodo.

Esempi

- $ax+ay+bx+ab$

I quattro monomi non hanno fattori in comune. Provo a mettere in evidenza la *a* nel primo e secondo termine e la *b* nel terzo e quarto termine
$ax+ay+bx+ab=a(x+y)+b(x+a)$
In questo caso non c'è nessun fattore comune: il metodo è fallito. In effetti il polinomio non si può scomporre in fattori.

- $bx-2ab+2ax-4a^2$

Non vi sono fattori da mettere a fattore comune totale, proviamo con il raccoglimento parziale:

$\underline{bx}\,\underline{-2ab}\,\underline{\underline{+2ax}}\,\underline{\underline{-4a^2}}=b(\underline{x-2a})+2a(\underline{x-2a})=(x-2a)(b+2a)$

- $bx^3+2x^2-bx-2+abx+2a$

Raggruppiamo nel seguente modo $\underline{bx^3}\,\underline{\underline{+2x^2}}\,\underline{-bx}\,\underline{\underline{-2}}\,\underline{+abx}\,\underline{\underline{+2a}}$
tra quelli con sottolineatura semplice metto a fattore comune *bx*, tra quelli con doppia sottolineatura metto a fattore comune *2*.

$\underline{bx^3}\,\underline{\underline{+2x^2}}\,\underline{-bx}\,\underline{\underline{-2}}\,\underline{+abx}\,\underline{\underline{+2a}}=bx(\underline{x^2-1+a})+2(\underline{x^2-1+a})=(x^2-1+a)(bx+2)$

Scomponi in fattori mediante raccoglimento parziale a fattore comune, se questo è possibile.

21	$ax+bx-ay-by$		R. $(a+b)(x-y)$
22	$2x-2y+ax-ay$	$3ax-6a+x-2$	
23	ax^3+ax^2+ax+a	$2ax-4a-x+2$	
24	$3ax-9a-x-3$	$3x^3-3x^2+3x-3$	
25	$-x^3+x^2+x-1$	x^3-x^2+x-1	
26	x^3+x^2-x-1	$x^3-1-x+x^2$	
27	$x^3-x-1+x^2$	x^3+x^2+x+1	
28	$ax^3y+ax^2y+axy+ay$		R. $ay(x+1)(x^2+1)$
29	$\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-1$	$b^2x+b^2y+2bx+2by$	
30	$b^2x-b^2y+2bx-2by$	$b^2x-b^2y-2bx-2by$	
31	$b^2x+b^2y-2bx-2by$	$b^2x-2bx-2by+b^2y$	
32	$ay+2x^3-2ax^3-y$	$xy+x+ay+a+by+b$	
33	$3x+6+ax+2a+bx+2b$	$2x-2+bx-b+ax-a$	
34	$2x-2+bx-b-ax+a$	$2x+2+bx-b-ax+a$	
35	$3ax+6a+a^2x+2a^2+abx+2ab$	$2x-b+ax-a-2+bx$	
36	$bx^2-bx+b+x^2-x+1$		R. $(b+1)(x^2-x+1)$
37	$3(x+y)^2+5x+5y$	$(a-2)(a-3)+ab-2b$	
38	a^3+2a^2+a+2	$a^2x+ax-a-1$	
39	$3xy^3-6xy-ay^2+2a$	$a^2x^3+a^2x^2+a^2x-2x^2-2x-2$	
40	$2^{11}x^2+2^{12}x+2^{15}x+2^{16}$		R. $2^{11}(x+2)(x+16)$

<u>Esempio</u>

- $5ab^2-10abc-25abx+50acx$

Il fattore comune è *5a*, quindi

$5ab^2-10abc-25abx+50acx=5a(b^2-2bc-5bx+10cx)$

Vediamo se è possibile scomporre il polinomio in parentesi con un raccoglimento parziale

$5a(\underline{b^2}\,\underline{-2bc}\,\underline{\underline{-5bx}}\,\underline{\underline{+10cx}})=5a[b(\underline{b-2c})-5x(\underline{b-2c})]=5a(b-2c)(b-5x)$.

Scomponi in fattori raccogliendo prima a fattore comune totale e poi parziale.

41	$2ab^2+2b^2c-2a^2b^2-2ab^2c$	
42	$6x^2+6xy-3x(x+y)-9x^2(x+y)^2$	R. $2x(x+y)(x-a)$
43	$2x^3+2x^{2y}-2ax^2-2axy$	
44	$x^4+x^3-x^2-x$	
45	$\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{3}ax^2+\frac{2}{3}ax-\frac{1}{3}a$	R. $\frac{1}{3}a(x^2+1)(2x-1)$
46	$15x(x+y)^2+5x^2+5xy$	
47	$\frac{7}{3}x^2-\frac{7}{3}xy+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2y-\frac{5}{9}(x^2-xy)$	R. $\frac{1}{9}x(x-y)(16+x)$
48	$2bx^2+4bx-2x^2-4ax$	
49	$2a^{2mx}-2ma^2-2a^2x+2a^2$	
50	$2b(x+1)^2-2bax-2ba+4bx+4b$	R. $2b(x+1)(x-a+3)$

2. RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Uno dei metodi più usati per la scomposizione di polinomi è legato al saper riconoscere i prodotti notevoli.

►1 Quadrato di un binomio

Se abbiamo un trinomio costituito da due termini che sono quadrati di due monomi ed il terzo termine è uguale al doppio prodotto degli stessi due monomi, allora il trinomio può essere scritto sotto forma di quadrato di un binomio, secondo la regola che segue.

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 \quad \rightarrow \quad A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

Analogamente nel caso in cui il monomio che costituisce il doppio prodotto sia negativo:

$$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2 \quad \rightarrow \quad A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$

Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, valgono anche le seguenti uguaglianze.

$$(A+B)^2=(-A-B)^2 \quad \rightarrow \quad A^2+2AB+B^2=(A+B)^2=(-A-B)^2$$
$$(A-B)^2=(-A+B)^2 \quad \rightarrow \quad A^2-2AB+B^2=(A-B)^2=(-A+B)^2$$

Esempi

- $4a^2+12ab^2+9b^4$

Notiamo che il primo ed il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $2a$ e di $3b^2$, ed il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, pertanto possiamo scrivere:

$4a^2+12ab^2+9b^4=(2a)^2+2\cdot(2a)\cdot(3b^2)+(3b^2)^2=(2a+3b^2)^2$.

- x^2-6x+9

Il primo ed il terzo termine sono quadrati, il secondo termine compare con il segno “meno”. Dunque:

$x^2-6x+9=x^2-2\cdot3\cdot x+3^2=(x-3)^2$ *ma anche* $=(-x+3)^2$.

Può accadere che tutti e tre i termini siano tutti quadrati:

- x^4+4x^2+4

è formato da tre quadrati, ma il secondo termine, quello di grado intermedio, è anche il doppio prodotto dei due monomi di cui il primo ed il terzo termine sono i rispettivi quadrati. Si ha dunque:

$x^4+4x^2+4=(x^2)^2+2\cdot(2)\cdot(x^2)+(2)^2=(x^2+2)^2$.

Procedura per individuare il quadrato di un binomio
1. **individuare le basi dei due quadrati;**
2. **verificare se il terzo termine è il doppio prodotto delle due basi;**
3. **scrivere tra parentesi le basi dei due quadrati e il quadrato fuori dalla parentesi**
4. **mettere il segno “più” o “meno” in accordo al segno del termine che non è un quadrato.**

51	a^2-2a+1	x^2+4x+4	y^2-6y+9
52	$4x^2+1+4x$	$9a^2-6a+1$	$16t^2+8t+1$
53	$4x^2-12x+9$	$9x^2+4+12x$	$25t^2+4-20t$
54	$\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$	$\frac{4}{9}a^4-4a^2+9$	$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$
55	$100+a^2b^4+20ab^2$	$16a^2+\frac{1}{4}b^2-4ab$	$144x^2-6xa^2+\frac{1}{16}a^4$

Può capitare che i quadrati compaiano con il coefficiente negativo, ma si può rimediare mettendo in evidenza il segno “meno”.

Esempi

- $-9a^2+12ab-4b^2$

Mettiamo -1 a fattore comune

$-9a^2+12ab-4b^2=-(9a^2-12ab+4b^2)=-(3a-2b)^2$

- $-x^4-x^2-\frac{1}{4}=-\left(x^4+x^2+\frac{1}{4}\right)=-\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2$
- $-x^2+6xy^2-9y^4=-(x^2-6xy^2+9y^4)=-(x-3y^2)^2$

Possiamo avere un trinomio che non è il quadrato di un binomio ma lo "diventa" dopo aver messo in evidenza qualche fattore comune.

Esempi

- $2a^3+20a^2+50a$

Mettiamo a fattore comune 2a

$2a^3+20a^2+50a = 2a(a^2+10a+25) = 2a(a+5)^2$

- $2a^2+4a+2 = 2(a^2+2a+1) = 2(a+1)^2$
- $-12a^3+12a^2-3a = -3a(4a^2-4a+1) = -3a(2a-1)^2$
- $\frac{3}{8}a^2+3ab+6b^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}a^2+2ab+4b^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2$

o anche

$\frac{3}{8}a^2+3ab+6b^2 = \frac{3}{8}(a^2+8ab+16b^2) = \frac{3}{8}(a+4b)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio:

56 $4x^2+4xy+y^2$ $\quad$ $a^4+36a^2+12a^3$

57 $x^2-6xy+9y^2$ $\quad$ $-x^2-6xy-9y^2$

58 $25+10x+x^2$ $\quad$ $25+10x+x^2$

59 $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}$ $\quad$ $\frac{9}{25}a^4-6a^2+25$

60 $4x^2+2x^4+1$ $\quad$ $4x^2-4x^4-1$

61 $-a^3-2a^2-a$ $\quad$ $3a^7b-6a^5b^2+3a^3b^3$

62 $-9x^2-\frac{1}{4}+3x$ $\quad$ $2x^{13}-8x^8y+8x^3y^2$

63 $x^8+8x^4y^2+16y^4$ $\quad$ $-x^2+6xy+9y^2$

64 $4a^2b^4-12ab^3+9b^6$ $\quad$ a^2+a+1

65 $36a^6b^3+27a^5b^4+12a^7b^2$ $\quad$ $25x^{14}+9y^6+30x^7y^3$

66 $-a^7-25a^5+10a^6$ $\quad$ $25a^2+49b^2+35ab$

67 $4x^2+4xy-y^2$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

68 $x^2-6xy+9y$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

69 $25+100x+x^2$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

70 $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$ non è possibile perché … … … … … … … … ...

►2 Quadrato di un polinomio

Se siamo in presenza di sei termini, tre dei quali sono quadrati, verifichiamo se il polinomio è il quadrato di un trinomio:

$$(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC \quad \rightarrow$$
$$A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2=(-A-B-C)^2$$

Notiamo che i doppi prodotti possono essere tutt'e tre positivi, oppure uno positivo e due negativi: indicano se i rispettivi monomi sono concordi o discordi.

Esempi

- $16a^4+b^2+1+8a^2b+8a^2+2b$

I primi tre termini sono quadrati, rispettivamente di $4a^2$ b 1, si può verificare poi che gli altri tre termini sono i doppi prodotti:

$16a^4+b^2+1+8a^2b+8a^2+2b=(4a^2+b+1)^2$

- $x^4+y^2+z^2-2x^2y-2x^2z+2yz=(x^2-y-z)^2=(-x^2+y+z)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un trinomio

71 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ $\qquad$ $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$

72 $x^2+y^2+4+4x+2xy+4y$ $\qquad$ $4a^4-6ab-4a^2b+12a^3+b^2+9a^2$

73 $9x^6+2y^2z+y^4-6x^3z-6x^3y^2+z^2$ $\qquad$ $a^2+2ab+b^2-2a+1-2b$

74 $\frac{1}{4}a^2+b^4+c^6+ab^2+ac^3+2b^2c^3$ $\qquad$ $-x^2-2xy-9-y^2+6x+6y$

75 $a^2+b^2+c^2-2ac-bc+2ab$ $\qquad$ $x^2+\frac{1}{4}y^2+4-xy+4x-2y$

In alcuni casi anche un polinomio di cinque termini può essere il quadrato di un trinomio. Vediamo un esempio particolare:

Esempio

- $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

Per far venire fuori il quadrato del trinomio si può scindere il termine $3x^2$ come somma $3x^2=x^2+2x^2$, in questo modo si ha:

$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=x^4-2x^3+x^2+2x^2-2x+1=(x^2-x+1)^2$

76 $4a^4+8a^2+1+8a^3+4a$ suggerimento: scomponi $8a^2=4a^2+4a^2$

77 $9x^4+6x^3-11x^2-4x+4$ suggerimento: scomponi in maniera opportuna $-11x^2$

78 $2a^{10}x+4a^8x+2a^6x+4a^5x+4a^3x+2x$

Nel caso di un quadrato di un polinomio la regola è sostanzialmente la stessa:

$$(A+B+C+D)^2=A^2+B^2+C^2+D^2+2AB+2AC+2AD+2BC+2BD+2CD$$

79 $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$

80 $x^6+x^4+x^2+1+2x^5+2x^4+2x^3+2x^3+2x^2+2x$

►3 Cubo di un binomio

I cubi di binomi sono di solito facilmente riconoscibili. Un quadrinomio è lo sviluppo del cubo di un binomio se due suoi termini sono i cubi di due monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti tra uno dei due monomi ed il quadrato dell'altro, secondo le seguenti formule.

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad \rightarrow \quad A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$$
$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad \rightarrow \quad A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A-B)^3$$

Per il cubo non si pone il problema, come per il quadrato, del segno della base, perché un numero, elevato ad esponente dispari, se è positivo rimane positivo, se è negativo rimane negativo.

Esempi

- $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

Notiamo che il primo ed il quarto termine sono cubi, rispettivamente di *2a* e di *b* , il secondo termine è il triplo prodotto tra il quadrato di *2a* e *b*, mentre il terzo termine è il triplo prodotto tra *2a* e il quadrato di *b* . Abbiamo dunque:
$8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3 = (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(b)+3\cdot(2a)\cdot(b)^2 = (2a+b)^3$.

- $-27x^3+27x^2-9x+1$

Le basi del cubo sono il primo e il quarto termine, rispettivamente cubi di *-3x* e di *1*. Dunque:
$-27x^3+27x^2-9x+1 = (-3x)^3+3\cdot(-3x)^2\cdot 1+3\cdot(-3x)\cdot 1^2+1 = (-3x+1)^3$

- $x^6-x^4+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{27} = \left(x^2-\frac{1}{3}\right)^3$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio

81 $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ $\quad$ $b^3+12a^2b-6ab^2-8a^3$

82 $-12a^2+8a^3-b^3+6ab$ $\quad$ $-12a^2b+6ab+8a^3-b^3$

83 $-x^3+6x^2-12x+8$ $\quad$ $-x^9-3x^6+3x^3+8$

84 $x^3y^6+1+3x^2y^2+3xy^2$ $\quad$ $x^3+3x-3x^2-1$

85 $-5x^5y^3-5x^2-15x^4y^2-15x^3y$ $\quad$ $-a^6+27a^3+9a^5-27a^4$

86 $64a^3-48a^2+12a-1$ $\quad$ $a^6+9a^4+27a^2+27$

87 $x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$ $\quad$ $0{,}001x^6+0{,}015x^4+0{,}075x^2+0{,}125$

88 $a^{10}-8a-6a^7+12a^4$

89 $27a^3-b^3+9a^2b-9ab^2$ $\quad$ non è cubo del binomio perché … … … … … … … …

90 $8x^3+b^3+6x^2b+6xb^2$ $\quad$ non è cubo del binomio perché … … … … … … … …

►4 Differenza di due quadrati

$$(A+B)\cdot(A-B) = A^2-B^2 \quad \rightarrow \quad A^2-B^2 = (A+B)\cdot(A-B)$$

Un binomio che sia la differenza dei quadrati di due monomi può essere scomposto come prodotto tra la somma dei due monomi (basi dei quadrati) e la loro differenza.

Esempi

- $\frac{4}{9}a^4-25b^2 = \left(\frac{2}{3}a^2\right)^2-(5b)^2 = \left(\frac{2}{3}a^2+5b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2-5b\right)$
- $-x^6+16y^2 = -(x^3)^2+(4y)^2 = (x^3+4y)\cdot(-x^3+4y)$

Scomponi i seguenti polinomi come differenza di quadrati

91 a^2-25b^2 $\quad$ $16-x^2y^2$ $\quad$ $4a^4-9b^2$

92 x^2-16y^2 $\quad$ $144x^2-9y^2$ $\quad$ $16x^4-81z^2$

93 $a^2b^4-c^2$ $\quad$ $4x^6-9y^4$ $\quad$ $-36x^8+25b^2$

94	$-1+a^2$	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^4$	$\frac{a^2}{4}-\frac{y^2}{9}$
95	$2a^2-50$	a^3-16ab^6	$-4x^2y^2+y^2$
96	$-4a^2+b^2$	$25x^2y^2-\frac{1}{4}z^6$	$-a^2b^4+49$
97	$16y^4-z^4$	a^8-b^8	a^4-16
98	$16a^2-9b^2$	$-4x^8+y^{12}$	$\frac{1}{4}x^2-0{,}01\,y^4$

La formula precedente vale anche se *A* e *B* sono polinomi.

Esempi

- $a^2-(x+1)^2=[a+(x+1)]\cdot[a-(x+1)]=(a+x+1)(a-x-1)$
- $(2a-b^2)^2-(4x)^2=(2a-b^2+4x)\cdot(2a-b^2-4x)$
- $(a+3b)^2-(2x-5)^2=(a+3b+2x-5)\cdot(a+3b-2x+5)$

Per questo tipo di scomposizioni, la cosa più difficile è riuscire a riconoscere un quadrinomio o un polinomio di sei termini come differenza di quadrati. Riportiamo i casi principali:

- $(A+B)^2-C^2=A^2+2AB+B^2-C^2$
- $A^2-(B+C)^2=A^2-B^2-2BC-C^2$
- $(A+B)^2-(C+D)^2=A^2+2AB+B^2-C^2-2CD-D^2$

Esempi

- $4a^2-4b^2-c^2+4bc$

Gli ultimi tre termini possono essere raggruppati per formare il quadrati di un binomio.

$=4a^2-(4b^2+c^2-4bc)$

$=(2a)^2-(2b-c)^2$

$=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c)$

$4a^2-4b^2-c^2+4bc=4a^2-(4b^2+c^2-4bc)=(2a)^2-(2b-c)^2=(2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c)$

- $4x^4-4x^2-y^2+1$

$=(2x^2-1)^2-(y)^2=(2x^2-1+y)\cdot(2x^2-1-y)$

- $a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2$

$=(a^2+1+2a)-(b^2+9c^2-6bc)=(a+1)^2-(b-3c)^2=(a+1+b-3c)\cdot(a+1-b+3c)$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati:

99	$(b+3)^2-x^2$		R. $(b+3-x)(b+3+x)$
100	$a^8-(b-1)^2$		R. $(a^4-b+1)(a^4+b-1)$
101	$(x-y)^2-(y+z)^2$	$-(2a-1)^2+(3b+3)^2$	
102	x^2-b^2-9-6b	b^2-x^4+1+2b	
103	$a^4+4a^2+4-y^2$	x^2-y^2-1+2y	
104	$-(a+1)^2+9$	$16x^2y^6-(xy^3+1)^2$	
105	$a^2+1+2a-9$	$x^2y^4-z^2+9+6xy^2$	

►5 Esercizi di riepilogo sui prodotti notevoli

Scomporre i polinomi seguenti ricordando le regole sui prodotti notevoli

106 x^2-2x+1 $\quad$ $x^2+y^2+z^4-2xy+2xz^2-2yz^2$

107 $a^6+b^9+3a^4b^3+3a^2b^6$ $\quad$ $a^3-6a^2+12a-8$

108 $a^2+b^2-1-2ab$ $\quad$ $a^4+2b-1-b^2$

109 $-8a^2b+24ab^2-18b^3$ $\quad$ $6a^5-24ab^4$

110 $a^4+b^4-2a^2b^2$ $\quad$ $x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3$

111 $x^3y^2-x^2y^3+\frac{1}{4}xy^4$ R. $xy^2\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$

112 $-27x^6+9x^5-x^4+\frac{x^3}{27}$ R. $x^3\left(\frac{1}{3}-3x\right)^3$

113 $4x^2-9y^2-6yz^2-z^4$ R. $(2x+3y+z^2)(2x-3y-z^2)$

114 $\frac{1}{8}a^4b^2-\frac{3}{4}a^3b^3+\frac{3}{2}a^2b^4-ab^5$ R. $\frac{1}{8}ab^2(a-2b)^3$

115 $a^2+4ab+4b^2-x^2+2xy-y^2$ R. $(a+2b+x-y)(a+2b-x+y)$

116 $a^4b-2a^3b^2+4a^3bc+a^2b^3-4a^2b^2c+4a^2bc^2$ R. $a^2b(a-b+2c)^2$

117 $3a^4-3a^3x+a^2x^2-\frac{1}{9}ax^3$ R. $3a\left(a-\frac{1}{3}x\right)^3$

118 a^3x+4a^2x+4ax R. $ax(a+2)^2$

119 $a^3b^5-\frac{2}{3}a^2b^6+\frac{1}{9}ab^7$ R. $ab^3\left(ab-\frac{1}{3}b^2\right)^2$

120 $a^2-ab-9a+3b+18$ R. $(a-3)(a-b-6)$

121 $8ab^2-2a^3$ R. $-2a(a+2b)(a-2b)$

122 $a^4-6a^3+3a^2+18a+9-1$ R. $(a^2-3a-4)(a^2-3a-2)$

123 $a^3+3a^2b+a^2+3ab^2+2ab+b^3+b^2$ R. $(a+b)^2(a+b+1)$

124 $\frac{x^7}{3}+x^5+x^3+\frac{x}{3}$ R. $\frac{1}{3}x(x^2+1)^3$

125 $\frac{a^2}{4}+2ab-16b^4+4b^2$ R. $\left(\frac{1}{2}a+2b-4b^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2b+4b^2\right)$

3. ALTRE TECNICHE DI SCOMPOSIZIONE

►1. Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2) = x^2+3x+2x+6 = x^2+5x+6$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio x^2+5x+6 come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)x+a\cdot b$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2+(a+b)x+a\cdot b = (x+a)\cdot(x+b).$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri *a* e *b* tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

Esempi

- $x^2+7x+12$

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi.
Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri solo come:

$$12\cdot 1 \qquad 6\cdot 2 \qquad 3\cdot 4$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma +7 e prodotto +12 è pertanto +3 e +4. Dunque il trinomio si scompone come:
$x^2+7x+12 = (x+4)\cdot(x+3)$.

- $x^2 \overset{somma}{-\ 8}x \overset{prodotto}{+\ 15}$

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma negativa e prodotto positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma sia -8 e il cui prodotto sia 15. Le coppie di numeri che danno 15 come prodotto sono -15; -1 e -5; -3. Allora i due numeri cercati sono –5 e –3. Il trinomio si scompone come:
$x^2-8x+15=(x-5)\cdot(x-3)$.

- $x^2+\overset{somma}{4}\ x-\overset{prodotto}{5}$

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà -5 come prodotto, precisamente +5 e –1. Il polinomio si scompone:
$x^2+4x-5 = (x+5)\cdot(x-1)$.

- $x^2-\overset{S}{3}x-\overset{P}{10}$

I due numeri sono discordi, in modulo il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno -10 come prodotto sono -10; +1, ma anche -5; +2. Quelli che danno -3 come somma sono –5 e + 2.
$x^2-3x-10 = (x-5)\cdot(x+2)$.

Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari

126	$x^2-5x-36$	$x^2-17x+16$	$x^2-13x+12$
127	x^2+6x+8	$x^2+7x+12$	x^2-2x-3
128	$x^2+9x+18$	x^2-5x+6	x^2-8x-9
129	$x^2-7x+12$	x^2-6x+8	$x^2-51x+50$
130	x^2-3x-4	$x^2+5x-14$	x^4+8x^2+12
131	$x^2+4x-12$	x^2-3x+2	x^4-5x^2+4
132	$x^2+3x-10$	$x^2+13x+12$	$x^2+2x-35$

In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore. Vediamo qualche esempio.

Esempi

- $x^4+5x^2+6=(x^2+3)\cdot(x^2+2)$
- $x^6+x^3-12=(x^3+4)\cdot(x^3-3)$
- $a^4-10a^2+9=(a^2-9)\cdot(a^2-1)=(a+3)\cdot(a-3)\cdot(a+1)\cdot(a-1)$

Nell'ultimo esempio, dopo aver applicato il metodo del trinomio particolare, siamo stati ricondotti a due differenze di quadrati, ed abbiamo quindi completato la scomposizione.

Esempi

- $-x^4-x^2+20=-(x^4+x^2-20)=-(x^2+5)\cdot(x^2-4)=-(x^2+5)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$.
- $2x^5-12x^3-14x=2x\cdot(x^4-6x^2-7)=2x\cdot(x^2-7)\cdot(x^2+1)$
- $-2a^7+34a^5-32a^3=-2a^3(a^4-17a^2+16)=-2a^3(a^2-1)(a^2-16)=-2a^3(a-1)(a+1)(a-4)(a+4)$

Quando è possibile, scomponi in fattori, ricordando le regole sul trinomio particolare:

133 x^6-5x^3+4 $\quad x^2+5x-36$

134 x^2+8x+7 $\quad x^2+4x-45$

135 $x^2-10x+24$ $\quad x^4+11x^2+24$

136 x^4+9x^2-10 $\quad x^6-x^3-30$

137 $2x^3+14x^2+20x$ $\quad -3x^6+15x^4-12x^2$

138 $x^{20}+4x^{12}-32x^4$ $\quad x^4-x^2-20$

139 $-x^6+7x^3-10$ $\quad x^4-37x^2+36$

E' possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili, purché però siano opportunamente disposte.

Esempio

- $x^2+5xy+6y^2$

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo:

$x^2+\overset{somma}{5y}\,x+\overset{prodotto}{6y^2}$

Bisogna cercare due monomi *A* e *B* tali che $A+B=5y$ e $A\cdot B=6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono +3 e +2, i monomi cercati sono +3y e +2y, infatti $+3y+3y=+5y$ e $+3y\cdot(+2y)=+6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue:

$x^2+5xy+6y^2=(x+3y)(x+2y)$.

140 $x^2+4xy-32y^2$ $\quad a^2-ax-20x^2$

141 $a^2-12xa-64x^2$ $\quad m^2+20mn+36n^2$

142 $x^4-8x^2a+12a^2$ $\quad x^6+9x^3y^2-36y^4$

143 $x^2y^2-2xy-35$ $\quad a^4b^2-a^2b-72$

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio:

Esempio

- $2x^2-x-1$

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto; con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia -1 e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2\cdot(-1)=-2$. I numeri sono -2 e +1, spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo

$2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1$

Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale

$2x^2-x-1=2x^2\underbrace{-2x+x}_{-x}-1=2x\cdot\underline{(x-1)}+1\cdot\underline{(x-1)}=(x-1)\cdot(2x+1)$.

Procedura generale
Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi ax^2+bx+c con $a\neq 1$, cerchiamo due numeri m ed n tali che $m+n=b$ e $m\cdot n=a\cdot c$; se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente b e riscrivere il polinomio nella forma $p=ax^2+(m+n)\cdot x+c$ su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.

Scomponete i seguenti polinomi con la regola descritta seguendo la traccia:

144 $2x^2-3x-5=2x^2+x\cdot(\ldots\ldots\ldots)-5 \quad =\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

145 $3y^2+y-10=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

146 $5t^2-11t+2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

147 $-3t^2+4t-1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

148 $3a^2-4a+1$ $\quad 11k-6k^2+7$

149 $4b^2-4b-3$ $\quad 6x^2-13x-15$

150 $x^2+10ax+16a^2$ $\quad 2x^4+x^2-3$

►2. Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio *P(x)*, se riusciamo a trovare un numero *k* per il quale *P(k)=0* allora *P(x)* è divisibile per il binomio x-k, allora possiamo scomporre $P(x)=(x-k)\cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra *P(x)* e *(x-k)*.
Il problema di scomporre un polinomio P(x) si riconduce quindi a quello della ricerca del numero k che sostituito alla x renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche **radice del polinomio**.
Il numero k non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.
Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

Esempio

- $p(x)=x^3+x^2-10x+8$

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.
Per *x=1* si ha $p(1)=(1)^3+(1)^2-10\cdot(1)+8=1+1-10+8=0$, pertanto il polinomio è divisibile per x-1.
Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere P(x) per x-1.
Predisponiamo una griglia come quella a fianco, al primo rigo mettiamo i coefficienti di P(x), al secondo rigo mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini.
I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultimo rigo sono i coefficienti del polinomio quoziente: $q(x)=x^2+2x-8$.

	1	1	-10	8
1		1	2	-8
	1	2	-8	

Possiamo allora scrivere:
$x^3+x^2-10x+8=(x-1)\cdot(x^2+2x-8)$.
Per fattorizzare il polinomio di secondo grado x^2+2x-8 possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia +2 e il cui prodotto sia -8. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto -8 e precisamente tra le seguenti coppie (+8, -1), (-8, +1), (+4, -2), (-4, +2).
La coppia che dà per somma +2 è (+4, -2). In definitiva si ha:
$x^3+x^2-10x+8=(x-1)\cdot(x^2+2x-8)=(x-1)(x-2)(x+4)$.

Esempio

- $x^4-5x^3-7x^2+29x+30$

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in
$\{\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 5;\pm 6;\pm 10;\pm 15;\pm 30\}$.
Sostituiamo questi numeri al posto della x, finché non troviamo la radice.
Per $x=1$ si ha $P(1)=1-5-7+29+30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice.
Per $x=-1$ si ha
$P(-1)=(-1)^4-5\cdot(-1)^3-7\cdot(-1)^2+29\cdot(-1)+30=+1+5-7-29+30=0$

Una radice del polinomio è quindi -1; utilizzando la regola di Ruffini abbiamo:

	1	-5	-7	29	30
-1		-1	6	1	-30
	1	-6	-1	30	0

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente
$x^3-6x^2-1x+30$ Possiamo allora scrivere:
$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)(x^3-6x^2-x+30)$
Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3-6x^2-1x+30$
Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme
$\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da -1
Per $x=-1$ si ha $P(-1)=(-1)^3-6\cdot(-1)^2-1\cdot(-1)+30=-1-6+1+30\neq 0$.
Per $x=+2$ si ha $P(+2)=(+2)^3-6\cdot(+2)^2-1\cdot(+2)+30=+8-24-2+30\neq 0$.
Per $x=-2$ si ha $P(+2)=(-2)^3-6\cdot(-2)^2-1\cdot(-2)+30=-8-24+2+30=0$.
Quindi -2 è una radice del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini, ricordiamo che al primo rigo dobbiamo mettere i coefficienti del polinomio da scomporre, cioè $x^3-6x^2-1x+30$

	1	-6	-1	30
-2		-2	+16	-30
	1	-8	+15	0

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3-6x^2-x+30=(x+2)\cdot(x^2-8x+15)$.
Infine possiamo scomporre $x^2-8x+15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma -8 e prodotto +15 sono -3 e -5. In conclusione posiamo scrivere la scomposizione:
$x^4-5x^3-7x^2+29x+30=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove p un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

Esempio

- $6x^2-x-2$

Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazione del tipo $\frac{p}{q}$, con p divisore di -2 e q divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm 1; \pm 2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono $\left\{\pm\frac{1}{1}; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{2}{1}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{2}{6}\right\}$ cioè $\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm 2; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{1}{3}\right\}$.

Si ha $A(1)=-3;\ A(-1)=5;\ A\left(\frac{1}{2}\right)=-1;\ A\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x)=6x^2-x-2$ è divisibile per $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare il polinomio $Q(x)$ per scomporre $6x^2-x-2$ come $Q(x)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

	6	-1	-2
$-\frac{1}{2}$		-3	2
	6	-4	0

Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente:
Il quoziente è $Q(x)=6x-4$

Il polinomio sarà scomposto in $(6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:

$$6x^2-x-2 = (6x-4)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2(3x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (3x-2)(2x+1)$$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini

151 $2x^2-5x+2$ $\quad$ $3x^2-5x-2$

152 x^3-4x^2+x+6 $\quad$ $x^3+2x^2-9x-18$

153 $2x^3-3x^2-8x+12$ $\quad$ $x^4-x^3-5x^2-x-6$

154 x^3+2x^2-2x+3 $\quad$ x^3+x^2-5x+3

155 $2x^3-9x^2+7x+6$ $\quad$ $3x^3+5x^2-16x-12$

156 $2x^3+5x^2+5x+3$ $\quad$ $2x^3-13x^2+24x-9$

157 $6x^3-11x^2-3x+2$ $\quad$ $4x^4-4x^3-25x^2+x+6$

158 $a^5+3a^4-2a^3-9a^2-11a-6$ $\quad$ R. $(a+1)(a-2)(a+3)(a^2+a+1)$

159 $2x^5+16x^4+19x^3-94x^2-213x-90$ $\quad$ R. $(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x-3)$

160 $a^6+6a^4+11a^2+6$ $\quad$ sostituisci $a^2=x$ $\quad$ R. $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$

161 $2x^{2n}+x^n-3$ $\quad$ sostituisci $x^n=a$ $\quad$ R. $(x^n-1)(2x^n+3)$

162 $x^3-ax^2-2ax+2a^2$ $\quad$ cerca le radici tra i monomi divisori di $2a^2$

►3. Somma e differenza di due cubi

Per scomporre i polinomi del tipo A^3+B^3 e A^3-B^3 possiamo utilizzare il metodo di Ruffini.

Esempio

- x^3-8 .

Il polinomio si annulla per x=2, che è la radice cubica di 8. Calcoliamo il quoziente.

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	/

Il polinomio quoziente è $Q(x)=x^2+2x+4$ e la scomposizione risulta
$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$
Notiamo che il quoziente assomiglia al quadrato di un binomio, ma non lo è in quanto il termine intermedio è il prodotto e non il doppio prodotto dei due termini, si usa anche dire che è un falso quadrato. Un trinomio di questo tipo non è ulteriormente scomponibile.

Esempio

- x^3+27

Il polinomio si annulla per x=-3, cioè
$P(-3)=(-3)^3+27=-27+27=0$. Il polinomio quindi è divisibile per $x+3$. Calcoliamo il quoziente attraverso la regola di Ruffini.

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	/

Il polinomio quoziente è $Q(x)=x^2-3x+9$ e la scomposizione risulta
$x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$.
In generale possiamo applicare le seguenti regole per la scomposizione di somma e differenza di due cubi:

$$\boxed{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)}$$
$$\boxed{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)}$$

163 x^3-1 $\quad$ $27-x^3$ $\quad$ $64a^3-8b^3$

164 $0{,}01^3-1$ $\quad$ x^6-y^6 $\quad$ $\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}b^3$

165 $27x^3-8y^3$ $\quad$ a^3b^3-1 $\quad$ a^3-125

166 $\frac{27}{8}x^3-8$ $\quad$ $0{,}064x^3+\frac{1}{27}y^3$ $\quad$ $\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{27}t^3$

167 x^6-y^3 $\quad$ x^9+27y^3 $\quad$ $8x^{12}-1$

168 $a^{3n}+1$ $\quad$ $a^{3n}-8b^3$ $\quad$ $a^{3n+3}+1$

4. SCOMPOSIZIONE MEDIANTE METODI COMBINATI

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro..
Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare **un raccoglimento totale;**
2. **contare il numero di termini** di cui si compone il polinomio:
   2.1.con **due** termini analizzare se il binomio è
      a) una *differenza di quadrati* $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
      b) una *somma di cubi* $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
      c) una *differenza di cubi* $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
      d) una *somma di quadrati o di numeri positivi* nel qual caso è ***irriducibile*** A^2+B^2
   2.2.con **tre** termini analizzare se è
      a) un *quadrato di binomio* $A^2\pm 2\text{AB}+B^2=(A\pm B)^2$
      b) un *trinomio particolare* del tipo $x^2+Sx+P=(x+a)(x+b)$ con $a+b=S\,;\,a\cdot b=P$
      c) un *falso quadrato, che è irriducibile* $A^2\pm AB+B^2$
   2.3.con **quattro** termini analizzare se è
      a) un *cubo di binomio* $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3$
      b) una *particolare differenza di quadrati* $A^2\pm 2\text{AB}+B^2-C^2=(A\pm B+C)(A\pm B-C)$
      c) possibile un *raccoglimento parziale* $ax+bx+ay+by=(a+b)(x+y)$
   2.4.con **sei** termini analizzare se è
      a) un *quadrato di trinomio* $A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC=(A+B+C)^2$
      b) possibile un *raccoglimento parziale* $ax+bx+cx+ay+by+cy=(a+b+c)(x+y)$
3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la **regola di Ruffini**

Ricordiamo infine alcune formule per somma e differenza di potenze dispari

$$A^5+B^5=(A+B)(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4)$$

$$A^5-B^5=(A-B)(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4)$$

$$A^7\pm B^7=(A\pm B)(A^6\mp A^5B+A^4B^2\mp A^3B^3+A^2B^4\mp AB^5+B^6)$$

$$(A^{11}+B^{11})=(A^{10}+A^9B+A^8B^2+A^7B^3+A^6B^4+A^5B^5+A^4B^6+A^3B^7+A^2B^8+AB^9+B^{10})$$

… … … ...

La differenza di due potenze ad esponente pari (uguale o diverso) rientra nel caso della differenza di quadrati:

$$A^8-B^{10}=(A^4-B^5)(A^4+B^5)$$

In alcuni casi si può scomporre anche la somma di potenze pari:

$$A^6+B^6=(A^2)^3+(B^2)^3=(A^2+B^2)(A^4-A^2B^2+B^4)$$

$$A^{10}+B^{10}=(A^2+B^2)(A^8-A^6B^2+A^4B^4-A^2B^6+B^8)$$

Proponiamo di seguito alcuni esercizi svolti o da completare in modo che possiate acquisire una certa abilità nella scomposizione di polinomi

Esempi

- $P(x)=a^2x+5abx-36b^2x$

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo;
tra i suoi monomi si ha M.C.D.= x; effettuiamo il raccoglimento totale: $P(x)=x\cdot(a^2+5ab-36b^2)$

il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo;
può essere riscritto $a^2+(5b)\cdot a-36b^2$, proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi *m* ed *n* tali che $m+n=5b$ e $m\cdot n=-36b^2$; i due monomi sono *m=9b* ed *n=-4b*;
$a^2x+5abx-36b^2x=x\cdot(a+9b)\cdot(a-4b)$

- $x^2+y^2+2xy-2x-2y$

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi perché otterremmo $x^2+y^2+2\cdot(xy-x-y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.
I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere –2, quindi $(\underline{x+y})^2-2\cdot(\underline{x+y})$, (x + y) tra i due termini si ottiene
$\underbrace{x^2+y^2+2xy}\underbrace{-2x-2y}=(x+y)\cdot(x+y-2)$

- $8a+10b+(1-4a-5b)^2-2$

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune
$p=2\cdot(4a+5b-1)+(1-4a-5b)^2$
Osserviamo che la base del quadrato è l’opposto del polinomio contenuto nel primo termine: poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato possiamo riscrivere: $p=2\cdot(4a+5b-1)+(-1+4a+5b)^2$
$8a+10b+(1-4a-5b)^2-2 = (4a+5b-1)\cdot(2-1+4a+5b) = (4a+5b-1)\cdot(1+4a+5b)$

- $t^3-z^3+t^2-z^2$

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili.
Poiché due monomi sono nella variabile t e gli altri due nella variabile z potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale:
$t^3-z^3+t^2-z^2=t^2\cdot(t+1)-z^2\cdot(z+1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.
Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:
$t^3-z^3+t^2-z^2=(t-z)\cdot(t^2+tz+z^2)+(t-z)\cdot(t+z)$
Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t-z)$
$t^3-z^3+t^2-z^2 = (t-z)\cdot(t^2+tz+z^2+t+z)$

- $P(x)=x^3-7x-6$

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile.
Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3;
procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero k tale che p(k) sia uguale a zero nell’insieme dei divisori del termine noto $D=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$;
per $x=+1$ si ha $P(+1)=(+1)^3-7\cdot(+1)-6=1-7-6\neq0$;
per $x=-1$ si ha $P(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6=-1+7-6=0$;
quindi $p=x^3-7x-6=(x+1)\cdot q(x)$ con q(x) polinomio di secondo grado che determiniamo con la regola di Ruffini:

	1	0	-7	-6
-1		-1	+1	+6
	1	-1	-6	0

pertanto: $P(x)=x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x^2-x-6)$
Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole; cerchiamo due numeri a e b tali che $a+b=-1$ e $a\cdot b=-6$;
i due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno -6 come prodotto, precisamente (-6, +1), (-3, +2), (+6,-1), (+3,-2). La coppia che fa a caso nostro è -3 +2 quindi si scompone $q=x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)$.
In definitiva $x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

- $(m^2-4)^2-m^2-4m-4$

Il polinomio ha 4 termini di cui il primo è un quadrato di binomio; negli altri tre possiamo raccogliere -1;
$(m^2-4)^2-m^2-4m-4=(m^2-4)^2-(m^2+4m+4)$
Notiamo che anche il secondo termine è un quadrato di binomio, quindi: $(m^2-4)^2-(m+2)^2$
che si presenta come differenza di quadrati,allora diviene: $[(m^2-4)+(m+2)]\cdot[(m^2-4)-(m+2)]$
eliminando le parentesi tonde $(m^2+m-2)\cdot(m^2-m-6)$
I due fattori ottenuti si scompongono con la regola del trinomio. In definitiva si ottiene:
$(m^2+m-2)\cdot(m^2-m-6) = (m+2)\cdot(m-1)\cdot(m-3)\cdot(m+2)=(m+2)^2\cdot(m-1)\cdot(m-3)$.

- $(a-3)^2+(3a-9)\cdot(a+1)-(a^2-9)$

$=(a-3)^2+3\cdot(a-3)\cdot(a+1)-(a-3)\cdot(a+3)$
mettiamo a fattore comune (a-3)
$(a-3)\cdot[(a-3)+3\cdot(a+1)-(a+3)]$
Svolgiamo i calcoli nel secondo fattore, otteniamo:
$(a-3)(a-3+3a+3-a-3)=(a-3)(3a-3)$

- $a^4+a^2b^2+b^4$

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo a^2b^2 otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:
$a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

- $a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$

$a^3(a^2+2ab+b^2)+b^3(a^2+2ab+b^2)=(a^3+b^3)(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a+b)^2=$
$(a+b)^3(a^2-ab+b^2)$

- $a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12$

$x^2(a^2+2a-3)-4(a^2+2a-3)=(x^2-4)(a^2+2a-3)=(x+2)(x-2)(a-1)(a+3)$

Scomporre in fattori

169	t^5-z^5	$3x^2+6x+6$	
170	t^6-2t^3+1	$tx+x^2+y^2+ty+2xy$	
171	$(x^2-7x+10)^2-x^2+10x-25$		R. $(x-5)^2(x-1)(x-3)$
172	$12m^3+9m^5-3m^7$	$a^2b-25b+a^2-25$	
173	$2ab-b^2+3\cdot(b-2a)^2$	x^6-y^6	
174	$\frac{4}{9}a^2-b^2+\frac{2}{3}a+b$		R. $(\frac{2}{3}a+b)(\frac{2}{3}a-b+1)$
175	$3k^3-k^2+k+5$	y^6+y^3-2	
176	a^8-1	$32a^4b^3-2b^3$	
177	$x^2-6x+9-(y^2-2y+1)$		R. $(x-4+y)(x-2-y)$
178	$x^6-8a^3+12a^2x^2-6ax^4$	$x^2-3a^3+ax-3a^2x$	
179	$16a^4x^2-8a^2b^2x^2+b^4x^2$		R. $x^2(2a-b)^2(2a+b)^2$
180	a^4+4a^2-32	$4x^3+7x^2-14x+3$	
181	$2ax^4y-8bx^4y-2axy^4+8bxy^4$	$36ab-49a^3b^3$	
182	$\frac{1}{9}x^6-2x^4+9x^2$	$\frac{4}{25}a^4+\frac{25}{9}b^2-\frac{4}{3}a^2b$	
183	$\frac{1}{16}a^2+4b^4-ab^2$		R. $\left(\frac{1}{4}a-2b^2\right)^2$

184 x^4+5x^2-36 $\quad -4x^7+16x^6+28x^5-88x^4-96x^3$

185 $ax+bx-3ay-3by$ R. $(a+b)(x-3y)$

186 $640a^3x^2y-960a^3xy^2+10b^3x^2y-15b^3xy^2$ R. $5xy(4a+b)(2x-3y)(16a^2-4ab+b^2)$

187 $12ax^2+12axy+3ay^2$ $\quad 625a^4-b^4$

188 x^3-5x^2+8x-4 R. $(x-1)(x-2)^2$

189 $4(x-1)^2-4y(x-1)+y^2$ R. $(2x-2-y)^2$

190 $4a^2-9-4b^2+12b$ $\quad x^3+3x^2-6x-8$

191 $2ax^2+8ay^2+8axy$ $\quad x^5-2x^2-x+2$

192 $a^2-a+9(a^2-a)$ R. $10a(a-1)$

193 $x^6-y^6+x^3+y^3$ $\quad x^2-3a^3+ax-3a^2x$

194 $16x^3-72x^2+108x-54$ $\quad 50a^4b^3-2b^3$

195 $4a^4b-4a^3b^2+6a^3b^3-6a^2b^4$ R. $2a^2b(2a+3b^2)(a-b)$

196 $5x^4-5x^3y^2-5x^2y+5xy^3$ $\quad 2b^6c-8c^3$

197 $-8a^3+12a^2x^2-6ax^4+x^6$ $\quad 16a^4x^2-8a^2b^2x^2+b^4x^2$

198 $x^2+14x-32$ $\quad 4x^3+7x^2-14x+3$

199 $2ax^4y-6bx^4y-2axy^4+6bxy^4$ R. $2xy(a-3b)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

200 $\frac{1}{9}a^6+9a^2-2a^4$ $\quad 1-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^6$

201 $8x^3-14x^2+7x-1$ R. $(x-1)(2x-1)(4x-1)$

202 x^4-9x^2+20 $\quad 3a^4b^3-6a^3b^3-9a^2b^3$

203 $4a^5b^2+32a^2b^5$ $\quad 32a-50ab^2$

204 $5x^4y^2+5x^4-5xy^4-5xy^2$ $\quad 4y^2-12y+9$

205 $\frac{8}{27}x^3-2x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{8}$ $\quad \frac{4}{49}x^2y^2-\frac{4}{7}xyz+z^2$

206 $x^4-3x^3-10x^2+24x$ R. $x(x-2)(x+3)(x-4)$

207 x^4-4x^2-45 $\quad 3x^3+x^2-8x+4$

208 $81a^4-64a^2b^2$ R. $a^2(9a-8b)(x-3y)$

209 $-24a^4b^2x^2-72a^4b^2y^2-3ab^5x^2-9ab^5y^2$ R. $-3ab^2(2a+b)(x^2+3y^2)(4a^2-2ab+b^2)$

210 $4x^3+8x^2+x-3$ R. $(2x+3)(2x-1)(x+1)$

211 $\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{27}$ $\quad \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}ax+\frac{1}{9}a^2$

212 $a^2-10a-75$ R. $(a-15)(a+5)$

213 $3x^5+12x^4-21x^3-66x^2+72x$ R. $3x(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

214 $2a^4b^3c-8a^2bc^5$ R. $2a^2bc(ab-2c^2)(ab+2c^2)$

215 $5a^4x^3-40a^4y^3-45a^2b^2x^3+360a^2b^2y^3$ R. $5a^2(a-3b)(a+3b)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

216 $3x^4y^3+9x^4-9xy^3-27x$ $\quad 81a^6-18a^4b^2+a^2b^2$

217 $125+75y+15y^2+y^3$ $\quad 4a^2x^2-16a^2y^2-b^2x^2+4b^2y^2$

218 x^4+2x^2-24 $\quad 5x^3-17x^2+16x-4$

219 $32a^3x^2y-48a^3xy^2+4b^3x^2y-6b^3xy^2$ R. $2xy(2a+b)(2x-3y)(4a^2-2ab+b^2)$

220 $81a-16a^3b^2$ R. $a(9-4ab)(9+4ab)$

221 x^3+2x^2-x-2 R. $(x-1)(x+2)(x+1)$

222 $x^6-6x^4+12x^2-8$ $a^7-a^4b^2-4a^3b^2+4b^4$

223 x^4+6x^2-40 $x^5-13x^3+12x^2$

224 $32ab-2a^5b^5$ $24x^4y+36x^3y^3+18x^2y^5+3xy^7$

225 $\frac{4}{9}a^4+\frac{4}{9}a^2b+\frac{b^2}{9}$ $\frac{4}{25}+\frac{4}{5}xy+x^2y^2$

226 $-2a^{10}+12a^7b-24a^4b^2+16ab^3$ $x^3-7x^2-25x+175$

227 $-4x^7+16x^6+28x^5-88x^4-96x^3$ $128a^3-200a$

228 $20x^3-45x$ R. $5x(2x-3)(2x+3)$

229 $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$

230 $18p^3q^2x-2pq^4x+18p^3q^2y-2pq^4y$ R. $2pq^2(3p-q)(3p+q)(x+y)$

231 x^4-6x^2-27 $x^4+4x^3+x^2-6x$

232 $8a^5b^2-64a^2b^5$ $4a^2b^5-81b$

233 $20a^6-16a^3c-25a^4b+20abc$ R. $a(4a^2-5b)(5a^3-4c)$

234 $2a^7-6a^4x^2+6a^4b^2-18ab^2x^2$ R. $2a(a^2+3b^2)(a^2-3x^2)$

235 $x^5+3x^4-xy^4-3y^4$ R. $(x+3)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

236 x^4+3x^2-28 $2x^3-3x^2-5x+6$

237 $48a^5bx+16a^5by-6a^2b^4x-2a^2b^4y$ R. $a^2b(2a-b)(3x+y)(4a^2+2ab+b^2)$

238 $18a^4b-2b^3$

239 $4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2$ $\frac{16}{27}x^3+\frac{8}{3}x^2y+4xy^2+2y^3$

240 $1-9x+27x^2-27x^3$ $6x^3y-12x^2y^2+6xy^3$

241 $x^2(x^4-18x^2+81)-x^6+729$ R. $-9(x+3)(x-3)(2x^2+9)$

242 $x^2-3a^3+ax-3a^2x$ $x^2-12x+133$

243 $3x^5-27xy^4$ $25y^4-10y^2+1$

244 $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$ R. $(x-2y)^3$

245 $ax+bx-3ay-3by$ $2ax^2+8ay^2+8axy$

246 $81a^4-b^4$ $3a^5b^3+24a^2b^9$

247 x^5-2x^2-x+2 R. $(x+1)(x-1)^2(x^2+x+2)$

248 $x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$ R. $(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)$

249 $4ax^5-2ax^3z^4+8ax^3y^2-4axy^2z^4$

250 $16ab-81a^5b^9$ R. $ab(2-3ab^2)(2+3ab^2)(4+9a^2b^4)$

251 $6x^7+2x^6-16x^5+8x^4$ R. $2x^4(x-1)(x+2)(3x-2)$

252 $-54a^7x+54a^5x^2-18a^3x^3+2ax^4$

253 x^4-4x^2-45 R. $(x-3)(x+3)(x^2+5)$

254 $64a^9-48a^6b^2+12a^3b^4-b^6$

255 $4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$

256 $x^8-y^8-2x^6y^2+2x^2y^6$ $\quad 5x^4-5x^2y^4$

257 $27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$

258 $-3a^7x^2+9a^5x^4-9a^3x^6+3ax^8$ R. $3ax^2(x-a)^3(x+a)^3$

259 $4a^2x-4a^2y^2-4ab^2x+4ab^2y^2$ $\quad a^2+12a+36$

260 $x^3-13x^2+35x+49$ R. $(x+1)(x-7)^2$

261 $4ab^3c^2+20ab^3-3abc^2-15ab$ R. $ab(4b^2-3)(c^2+5)$

262 $6a^6b^3-12a^4b^5+6a^2b^7$ R. $6a^2b^3(a-b)^2(a+b)^2$

263 $81a^6b^3-a^2b^3$ $\quad 6abx-3x+2aby-y$

264 $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ $\quad 8a^7b-8a^3b^3+12a^6b-12a^2b^3$

265 y^3-5y^2-24y R. $y(y+3)(y-8)$

266 $8a^4b-8a^3b^2+12a^3b^3-12a^2b^4$ $\quad 3a^3x+3a^3y-3abx-3aby$

267 z^8-2z^4+1 $\quad 3k^4+k^6+1+3k^2$

268 $3x^5-27xy^4$ $\quad 25y^4-10y^2+1$

269 $x^2+4xy-6x+4y^2-12y+9$ R. $(x+2y-3)^2$

270 $2x^4-4x^3+4x^2-4x+2$ R. $2(x^2+1)(x-1)^2$

271 $(3-a)^2+(5+a)\cdot(a-3)$ $\quad 3x^3-x-1+3x^2$

272 x^4-7x^2-60 $\quad x^3-5x^2+6x$

273 $4a^2-9-4b^2+12b$ $\quad x^5-13x^3+36x$

274 $x^2-y^2+2ay-a^2$ R. $(x-a+y)(x+a-y)$

275 $(2x-1)^3-(3-6x)^2$

276 $-4x-3-2(x+1)(16x^2+9+24x)$ R. $-(4x+3)(8x^2+14x+7)$

277 $(x-2)+3(x^2-4x+4)-(x+1)(x-2)^2$ R. $(x-1)(x-2)(3-x)$

278 $(x-1)^2-(x+2)(x^2-2x+1)-2(x^3-3x^2+3x-1)$ R. $(x-1)^2(1-3x)$

279 $(3x+6)-5(x^2+4x+4)^2$ R. $(2-x)(5x^3+30x^2+60x+37)$

280 $(y-x)^2(3x+2)-2(x-y)^3-2x^2+2y^2$ R. $(x-y)(x^2+xy-4y-2y^2)$

281 $(-x^2+6x-9)^2-(4x-12)(x+1)$ R. $(x-3)(x^3-9x^2+23x-31)$

282 $x+1-2(x^2+2x+1)+(3x^2+x^3+3x+1)(x-2)$ R. $(x+1)(x^3-5x^2-4)$

283 $36x^2+24xy-48x+4y^2-16y+15$ R. $(6x+2y-3)(6x+2y-5)$

284 $x^{a+1}-5x^a-4x^{a-2}$ R. $x^{a-2}(x^3-5x^2-4)$

285 $x^{n^2-1}+2x^{n^2+2}+x^{n^2}(x-3)$ R. $x^{n^2-1}(2x-1)(x^2+x-1)$

286 $x^{4n+1}-x^{3n+1}y^n+2x^ny^{4n}-2y^{5n}$ R. $(x^n-y^n)(x^{3n+1}+2y^{4n})$

287 $x^{n+2}+3x^ny^{2n}-x^2y^3-3y^{3+2n}$ R. $(x^n-y^3)(x^2++3y^{2n})$

288 $x^ay^b+x^a-y^b-1$ R. $(x^a-1)(y^b+1)$

289 $x^{2n+1}y^{h+1}-2x^{2n+1}-y^{h+1}+2$ R. $(x^{2n+1}-1)(y^{1+h}-2)$

290 $x^{a+4}-3x^{a+2}y^a+x^2y^2-3y^{2+a}$ R. $(x^{2+a}+y^2)(x^2-3y^a)$

5. M.C.D. E m.c.m. TRA POLINOMI

Il calcolo del minimo comune multiplo (m.c.m.) e del massimo comune divisore (M.C.D.) si estende anche ai polinomi. Per determinare M.C.D e m.c.m. di due o più polinomi occorre prima di tutto scomporli in fattori irriducibili. La cosa non è semplice poiché non si può essere sicuri di aver trovato il massimo comune divisore o il minimo comune multiplo per la difficoltà di decidere se un polinomio è irriducibile: prudentemente si dovrebbe parlare di divisore comune e di multiplo comune.
Un polinomio A si dice **multiplo** di un polinomio B se esiste un polinomio C per il quale $A=B\cdot C$; in questo caso diremo anche che B è **divisore** del polinomio A.

►1. Massimo Comun Divisore

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il massimo comune divisore tra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori comuni ai polinomi, presi ciascuno una sola volta, con il minimo esponente.
Sia i coefficienti numerici, sia i monomi possono essere considerati polinomi.

Procedura per calcolare il M.C.D. tra polinomi
1. **scomponiamo in fattori ogni polinomio;**
2. **prendiamo i fattori comuni a tutti i polinomi una sola volta con l'esponente più piccolo;**
3. **se non ci sono fattori comuni a tutti i polinomi il M.C.D. è 1.**

Esempio

■ $M.C.D.(3a^2b^3-3b^3;\ 6a^3b^2-6b^2;\ 12a^2b^2-24ab^2+12b^2)$

- Scomponiamo in fattori i singoli polinomi
  $3a^2b^3-3b^3=3b^3(a^2-1)=3b^3(a-1)(a+1)$
  $6a^3b^2-6b^2=6b^2(a^3-1)=6b^2(a-1)(a^2+a+1)$
  $12a^2b^2-24ab^2+12b^2=12b^2(a^2-2a+1)=12b^2(a-1)^2$
- I fattori comuni a tutti i polinomi presi con l'esponente più piccolo sono:
  - tra i numeri il 3
  - tra i monomi b^2
  - tra i polinomi $a-1$

quindi il $M.C.D.=3b^2(a-1)$

►2. Minimo comune multiplo

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il minimo comune multiplo tra due o più polinomi è il prodotto dei fattori comuni e non comuni di tutti i polinomi, quelli comuni presi una sola volta, con il massimo esponente.

Procedura per calcolare il m.c.m. tra polinomi
1. **scomponiamo in fattori ogni polinomio;**
2. **prendiamo tutti i fattori comuni e non comuni dei polinomi, i fattori comuni presi una sola volta con il massimo esponente.**

Esempio

■ $m.c.m.(3a^2b^3-3b^3;\ 6a^3b^2-6b^2;\ 12a^2b^2-24ab^2+12b^2)$

- Scomponiamo in fattori i singoli polinomi
  $3a^2b^3-3b^3=3b^3(a^2-1)=3b^3(a-1)(a+1)$
  $6a^3b^2-6b^2=6b^2(a^3-1)=6b^2(a-1)(a^2+a+1)$
  $12a^2b^2-24ab^2+12b^2=12b^2(a^2-2a+1)=12b^2(a-1)^2$
- Il m.c.m. tra i coefficienti numerici è 6;
- tra i monomi è b^3 ;
- tra i polinomi $(a-1)^2\cdot(a+1)\cdot(a^2+a+1)$

Quindi $m.c.m.=12b^3(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)$

Calcola il m.c.m e il M.C.D dei seguenti gruppi di polinomi

291 $a+3;\quad 5a+15;\quad a^2+6a+9$ R. $M.C.D.=(a+3);\ m.c.m.=5(a+3)^2$

292 $a^2-b^2;\quad ab-b^2;\quad a^2b-2ab^2+b^3$ R. $M.C.D.=(a-b);\ m.c.m.=b(a+b)(a-b)^2$

293 $x^2-5x+4;\quad x^2-3x+2;\quad x^2-4x+3$ R. $(x-1);(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

294 $x^2+2x-2;\quad x^2-4x+4;\quad x^2-4$ R. $M.C.D.=1;m.c.m.=(x-2)^2(x+2)(x^2+2x-2)$

295 $a^3b^2-2a^2b^3;\quad a^3b-4a^2b^2+4ab^3;\quad a^3b^2-4ab^4$ R. $(a-2b);a^2b^2(a-2b)^2(a+2b)$

296 $x^3+2x^2-3x;\quad x^3-x;\quad x^2-2x+1$ R. $M.C.D.=(x-1);m.c.m.\,x(x-1)^2(x+1)(x+3)$

297 $a-b;\ ab-a^2;\ a^2-b^2$ R. $M.C.D.=(a-b);m.c.m.=(b-2a)(b+2a)(b^2-4a+4a^2)$

298 $b+2a;\ b-2a;\ b^2-4a^2;\ b^2-4a+4a^2$ R. $M.C.D.=1;m.c.m.=a(a-3)(a+3)$

299 $a^2-9;\ 3a-a^2;\ 3a+a^2$ R. $M.C.D.=1;m.c.m.=a(a-3)(a+3)$

300 $a+1;\ a^2-1;\ a^3+1$ R. $M.C.D.=(a+1);m.c.m.=(a+1)(a-1)(a^2-a+1)$

301 $x^2+2xy+y^2;\ x^2-y^2;\ (x+y)^2(x-y)$ R. $M.C.D.=(x+y);m.c.m.=(x+y)^2(x-y)$

302 $b^3+b^2-4b-4;\ b^2-a;\ b^2-1$ R. $1;(b-1)(b+1)(b-2)(b+2)(b^2-a)$

303 $a-2;\ a^2-9;\ a^2+a-6$ R. $M.C.D.=1;m.c.m.=(a-2)(a-3)(a+3)$

304 $3x+y+3x^2+xy;\ 9x^2-1;\ 9x^2+6xy+y^2$ R. $1;(x+1)(3x-1)(3x+1)(3x+y)^2$

305 $2x^3-12x^2y+24xy^2-16y^3;\ 6x^2-12xy;\ 4x^3-16x^2y+16xy^2$ R. $2(x-2y);12x(x-2y)^3$

6. FRAZIONI ALGEBRICHE

►1. Definizione di frazione algebrica

Diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE. Si definisce **frazione algebrica** una espressione del tipo $\frac{A}{B}$ dove A e B sono polinomi.

Osserviamo che un'espressione di questo tipo si ottiene talvolta quando ci si propone di ottenere il quoziente di due monomi.

Esempi

- Determinare il quoziente tra $m_1=5a^3b^2c^5$ e $m_2=-3a^2bc^5$

Questa operazione si esegue applicando, sulla parte letterale, le proprietà delle potenze e sul coefficiente la divisione tra numeri razionali:

$$q=5a^3b^2c^5:(-3a^2bc^5)=-\frac{5}{3}ab$$

Il quoziente è quindi un monomio.

- Determinare il quoziente tra $m_1=5a^3b^2c^5$ e $m_2=-3a^7bc^5$.

In questo caso l'esponente della *a* nel dividendo è minore dell'esponente della stessa variabile nel divisore quindi si ottiene $q_1=5a^3b^2c^5:(-3a^7bc^5)=-\frac{5}{3}a^{-4}b$

Questo non è un monomio per la presenza dell'esponente negativo alla variabile *a*.

Sappiamo che $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$ e quindi

$$q_1=5a^3b^2c^5:(-3a^7bc^5)=\frac{-5}{3}a^{-4}b=-\frac{5b}{3a^4}$$

Il quoziente è quindi una frazione algebrica.

Analogamente, quando vogliamo determinare il quoziente di una divisione tra un monomio e un polinomio si presentano diversi casi:

Caso1: monomio diviso un polinomio

Esempio

- Determinare il quoziente tra: $D=2a^3b$ e $d=a^2+b$

Il dividendo è un monomio e il divisore un polinomio.
Questa operazione non ha come risultato un polinomio ma una frazione.

$$q=2a^3b:(a^2+b)=\frac{2a^3b}{a^2+b}.$$

Caso2: un polinomio diviso un monomio

Esempio

- $D=2a^3b+a^5b^3-3ab^2$ e $d=\frac{1}{2}ab$

$$q=(2a^3b+a^5b^3-3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right)=4a^2+2a^4b^2-6b$$

Il quoziente è un polinomio

Esempio

- $D=2a^3b+a^5b^3-3ab^2$ e $d=\frac{1}{2}a^5b$

Dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio assegnato: il quoziente sarà

$$q=(2a^3b+a^5b^3-3ab^2):\left(\frac{1}{2}a^5b\right)=4a^{-2}+2b^2-6a^{-4}b=\frac{4}{a^2}+2b^2-\frac{6b}{a^4}$$

Il quoziente è una somma di frazioni algebriche.

Caso3: un polinomio diviso un altro polinomio

Esempio

- Determinare il quoziente tra i polinomi: $D=x-3$ e $d=x^2+1$

La divisione tra polinomi in una sola variabile è possibile, quando il grado del dividendo è maggiore o uguale al grado del divisore; questa condizione non si verifica nel caso proposto:

Il quoziente è la frazione algebrica $q=\frac{x-3}{x^2+1}$

Conclusione

una frazione algebrica può essere considerata come il quoziente indicato tra due polinomi.

Ogni frazione algebrica è dunque un'**espressione letterale fratta o frazionaria**.

►2. Discussione di una frazione algebrica

Per **discussione di una frazione algebrica** intendiamo la **ricerca dei valori che attribuiti alle variabili non la rendano priva di significato.**

Poiché non è possibile dividere per 0, una frazione algebrica perde di significato per quei valori che attribuiti alle variabili rendono il denominatore uguale a zero. Quando abbiamo una frazione algebrica tipo $\frac{A}{B}$ poniamo sempre la condizione di esistenza: $B\neq 0$.

Esempi

- Determina le condizioni di esistenza della frazione $\frac{1+x}{x}$

Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla. Quindi C.E. $x\neq 0$

- $\frac{x}{x+3}$

Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla, cioè quando $x+3=0$, cioè $x=-3$. Quindi C.E. $x\neq -3$.

- $\frac{3a+5b-7}{ab}$

C.E.: $ab\neq 0$ **.** Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei suoi fattori è nullo, dunque affinché il denominatore non si annulli non si deve annullare né *a* né *b*, quindi $a\neq 0$ e $b\neq 0$ **.**
C.E.: $a\neq 0\wedge b\neq 0$.

- Determinare C.E. per le seguenti frazioni

$$f_1=\frac{3x-8}{x^2}\ ;\ f_2=\frac{-3x^3+x-2x^2+1}{x-1}\ ;\ f_3=\frac{-6}{2x+5}\ ;\ f_4=\frac{-x^3-8x}{x^2+2}\ ;\ f_5=\frac{2x}{x^2-4}$$

f_1: C.E. : $x^2\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 0$ infatti una potenza è nulla se la base è uguale a zero.
f_2: C.E. : $x-1\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 1$ infatti il polinomio x – 1 si annulla per x = 1.
f_3: C.E. : $2x+5\neq 0$, per risolvere questa disuguaglianza si procede come per le equazioni normali: $2x+5\neq 0\rightarrow 2x\neq -5\rightarrow x\neq -\frac{5}{2}$ si può concludere: $C.E.\, x\neq -\frac{5}{2}$

f_4: C.E. : $x^2+2\neq 0$; questo binomio è sempre maggiore di 0 in quanto somma di due grandezze positive, in particolare è maggiore di 2 poiché x^2 essendo positivo, o al massimo nullo, si aggiunge a 2. Pertanto la condizione di esistenza $x^2+2\neq 0$ è sempre verificata, in altre parole la frazione esiste sempre: C.E. Esiste per ogni x.

f_5: C.E. : $x^2-4\neq 0$; per rendere nullo il denominatore si dovrebbe avere $x^2 = 4$ e questo si verifica se x = +2 oppure se x = -2; possiamo anche osservare che il denominatore è una differenza di quadrati e che quindi la condizione di esistenza si può scrivere C.E. : $(x-2)(x+2)\neq 0$, essendo un prodotto possiamo scrivere C.E. : $x-2\neq 0\wedge x+2\neq 0$ e concludere: C.E. : $x\neq 2\wedge x\neq -2$.

306 Determinare **C.E.** per le frazioni in più variabili:

$f_1=\frac{a^2-3b}{a-b}$; $f_2=\frac{a+2ab-6b}{a+b}$; $f_3=\frac{-a}{2a-b}$; $f_4=\frac{-x^3-8y^2}{x^2+y^2}$; $f_5=\frac{2x+3y-1}{x^2-4xy}$

f_1: C.E.: $a-b\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq b$.
f_2: C.E.: $a+b\neq 0$ da cui C.E.: … … … ...
f_3: C.E. : ……………. da cui C.E.: … … … … ...
f_4: C.E.: …........... è la somma di due quadrati, mai negativa, ma uguale a zero solo se entrambi i valori attribuiti alle variabili sono zero. Quindi: C.E.: …...............
f_5: C.E.: … … … … … … ; scomponendo in fattori si ha … … … … … … … , ponendo che tutti i fattori siano diversi da zero si ha C.E.: … … … … … … … … … …

Procedura per determinare la Condizione di Esistenza di una frazione algebrica

1. **Porre il denominatore della frazione diverso da zero;**
2. **scomporre in fattori il denominatore;**
3. **porre ciascun fattore diverso da zero;**
4. **escludere i valori che annullano il denominatore.**

Determinare per ciascuna frazione la Condizione di Esistenza

307 $\frac{3x+8y}{x^2-y^2}$ $\qquad \frac{-3x^3+x-2x^2+1}{3x-6}$ $\qquad \frac{a^2-1}{2a^2x+4ax+2x}$

308 $\frac{-6a-5ab}{2b^2+4ab}$ $\qquad \frac{-x^3-8x}{x^2+4x+4}$ $\qquad \frac{y-1}{ay+a+y+1}$

309 $\frac{2x}{x^3-7x^2+x-7}$ $\qquad \frac{-8a+3ab^4}{a^2b^2-25b^4}$ $\qquad \frac{a^3-2b^2}{a^3-b^3}$

310 $\frac{-54}{a^3b^5c}$ $\qquad \frac{-8a+3}{a^3+3a^2+3a+1}$ $\qquad \frac{ay^2}{y^2-5y+6}$

311 $\frac{b-1}{3ab}$ $\qquad \frac{a+b-1}{2a\cdot(b^2-b)}$ $\qquad \frac{x+y}{(x-y)^2}$

►3. Semplificazione di una frazione algebrica

Semplificare una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero, in questo modo infatti la proprietà invariantiva della divisione ci garantisce che la frazione non cambia di valore. Quando semplifichiamo una frazione numerica dividiamo il numeratore e il denominatore per il loro M.C.D. che è sempre certamente un numero diverso da zero, ottenendo una frazione ridotta ai minimi termini equivalente a quella assegnata. Quando ci poniamo lo stesso problema su una frazione algebrica, dobbiamo porre attenzione a escludere quei valori che attribuiti alle variabili rendono nullo il M.C.D.

Esempio

- $\frac{16x^3y^2z}{10xy^2}$ C.E. $xy^2\neq 0\rightarrow x\neq 0 ; y\neq 0$

Puoi semplificare la parte numerica $\frac{\cancel{16}^8}{\cancel{10}^5}$. Per semplificare la parte letterale applica la proprietà della potenze relativa al quoziente di potenze con la stessa base:

$x^3 : x=x^{3-1}=x^2$

$y^2 : y^2=1$

$\frac{16x^3y^2z}{10xy^2}=\frac{8x^2z}{5}$

- Ridurre ai minimi termini la frazione: $\frac{a^2-6a+9}{a^4-81}$

1° passo: scomponiamo in fattori

- il numeratore: $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$
- il denominatore: $a^4 - 81 = (a^2-9)\cdot(a^2+9) = (a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)$

2° passo: riscriviamo la frazione $\dfrac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}$

3° passo: C.E.: $(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq -3$ e $a\neq +3$
(il terzo fattore non si annulla mai essendo somma di un numero positivo e un quadrato, a sua volta sempre positivo)

4° passo: semplifichiamo:

$$f=\frac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}=\frac{(a-3)^2}{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}=\frac{(a-3)}{(a+3)\cdot(a^2+9)}$$

- Riduciamo ai minimi termini la frazione in due variabili: $\dfrac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$.

Scomponiamo in fattori
- numeratore: $x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3=x^2\cdot(x^2+y^2)-xy\cdot(x^2+y^2)=x\cdot(x^2+y^2)\cdot(x-y)$
- denominatore: $x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3=x^2\cdot(x^2-y^2)+xy\cdot(x^2-y^2)=x\cdot(x^2-y^2)\cdot(x+y)=x\cdot(x+y)^2\cdot(x-y)$

La frazione diventa: $f=\dfrac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}=\dfrac{x\cdot(x^2+y^2)\cdot(x-y)}{x\cdot(x+y)^2\cdot(x^2+y^2)}$

C.E.: $x\cdot(x+y)^2\cdot(x^2+y^2)\neq 0$ cioè C.E.: $x\neq 0 \wedge x\neq -y$

Semplifichiamo i fattori uguali:

$$f=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x^2+y^2)}\cdot\cancel{(x-y)}}{\cancel{x}\cdot(x-y)^2\cdot\cancel{(x^2+y^2)}}=\frac{1}{(x-y)}\qquad f=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$$

Semplificazioni errate

$\dfrac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}$ questa **semplificazione è errata** perché a e b sono addendi, non sono fattori.

$\dfrac{\cancel{x^2}+x+4}{\cancel{x^2}+2}$ questa **semplificazione è errata** perché x^2 è un addendo, non un fattore.

312 Completa i passaggi e determina la frazione ridotta ai minimi termini:

numeratore: $5x + 5y = 5\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots..)$

$f=\dfrac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}$

denominatore: $3x + 3y + ax + ay = 3\cdot(\ldots\ldots) + a\cdot(\ldots\ldots) = (......)\cdot(.......)$

quindi $f=\dfrac{5\cdot(\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)}$; C.E. : ....

semplificando $f=\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

313 Completa i passaggi suggeriti e determina la frazione ridotta ai minimi termini:

$\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

Scomponi in fattori numeratore e denominatore

$\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\dfrac{(...+...)\cdot(...-...)}{(...+...)^2}$

Poni le C.E. … … … …

Semplifica la frazione $\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

314 $f=\dfrac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}=\dfrac{4\cdot(\ldots-\ldots.)+x\cdot(\ldots-\ldots.)}{2\cdot(\ldots.+\ldots.)}=\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

C.E. ……………… Semplificando $f=\dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Le seguenti semplificazioni sono errate. Spiegate perché e dove.

315 $\frac{\cancel{3a}\cdot(a-2)}{\cancel{3a}x-7}=\frac{a-2}{x-7}$; $\frac{\cancel{(x-y^2)}\cdot\cancel{(a-b)}}{\cancel{(y^2-x)}\cdot\cancel{(a-b)}}=1$; $\frac{\cancel{(2x-3y)}}{(3y-2x)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{(3y-2x)}$

316 $f=\frac{a^2+ab}{a^3}=\frac{\cancel{a}\cdot(a+b)}{a^{\cancel{3}\,2}}=\frac{\cancel{a}+b}{a^{\cancel{2}}}=\frac{1+b}{a}$

Completa i passaggi

317 $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\frac{(\ldots-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}=$ R $\frac{x-2}{x+2}$

318 $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\frac{(\ldots-\ldots)^2}{(\ldots-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}=$ R $\frac{x-3}{x+3}$

319 $\frac{4x^2-4}{8x^2-8}=\frac{\ldots(\ldots-\ldots)}{\ldots(\ldots-\ldots)}=\frac{\ldots(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}{\ldots(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}$ R $\frac{1}{2}$

320 $\frac{2x^2+8x+8}{4x^2-16}=\frac{2(\ldots+\ldots+\ldots)}{\ldots(\ldots-\ldots)}=\frac{2(\ldots+\ldots)^2}{\ldots(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}$ R $\frac{x+2}{2(x-2)}$

321 $\frac{ax+x+a^2+a}{a^2+2a+1}=\frac{x(\ldots+\ldots)+a(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}=\frac{(x+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}$ R $\frac{x+a}{a+1}$

322 $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1}=\frac{x^2(\ldots+\ldots)+\ldots(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}=\frac{(x^2+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+\ldots)^2}$ R $\frac{x^2+1}{x+1}$

323 $\frac{2x^3-2x^2-3x+3}{2x^2-4x+2}=\frac{2x^2(\ldots-\ldots)-3(\ldots-\ldots)}{2(\ldots-\ldots)^2}=\frac{(2x^2-3)(\ldots-\ldots)}{2(\ldots-\ldots)^2}$ R $\frac{2x^2-3}{2(x-1)}$

324 $\frac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}=\frac{4(\ldots-\ldots)+x(\ldots-\ldots)}{2(\ldots+\ldots)}=\frac{(4+x)(\ldots-\ldots)}{2(\ldots+\ldots)}=\frac{(4+x)(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots)}{2(\ldots+\ldots)}$

325 $\frac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}=\frac{5(\ldots+\ldots)}{3(\ldots+\ldots)+a(\ldots+\ldots)}=\frac{5(\ldots+\ldots)}{(x+\ldots)\cdot(3+\ldots)}=\frac{5}{3+a}$

326 $\frac{3a^3-3a^2-a+1}{9a^4-1}=\frac{3a^2(a-\ldots)-1(\ldots-\ldots)}{(3a^2-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}=\frac{(3a^2-\ldots)\cdot(\ldots-\ldots)}{(3a^2-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}=\frac{a-1}{3a^2+1}$

327 $\frac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}=\frac{2(\ldots-\ldots)-a(\ldots-\ldots)}{(x-\ldots)^2}=\frac{(2-\ldots)\cdot(\ldots-\ldots)}{(x-\ldots)^2}=\frac{2-a}{x-1}$

328 $\frac{6a^2-4ab+3a-2b}{4a^2+4a+1}=\frac{3a(\ldots+\ldots)-2b(\ldots+1)}{(\ldots+1)^2}=\frac{(\ldots-\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(\ldots+1)^2}=\frac{3a-2b}{2a+1}$

329 $\frac{x^5-25-25x^3+x^2}{(x^2-10x+25)(x^2-x+1)}=\frac{x^2(\ldots+\ldots)-25(\ldots+\ldots)}{(x-\ldots)^2(x^2-x+1)}=\frac{(\ldots-25)\cdot(\ldots+\ldots)}{(x-\ldots)^2(x^2-x+1)}=$

$\frac{(\ldots-5)\cdot(\ldots+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots)}{(x-\ldots)^2(x^2-x+1)}=\frac{(\ldots+5)\cdot(x^3+\ldots)}{(x-5)(x^2-x+1)}=\frac{(x+5)\cdot(x+1)(\ldots-\ldots+1)}{(x-5)(x^2-x+1)}=\frac{(x+5)\cdot(x+1)}{(x-5)}$

330 $\frac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}=\frac{4x\cdot(\ldots-\ldots+\ldots-\ldots)}{(\ldots-\ldots)(1+\ldots)}=\frac{4x\cdot[x^2(\ldots-\ldots)+2(\ldots-\ldots)]}{(\ldots-\ldots)(1+\ldots)}=$

$\frac{4x\cdot(x^2+\ldots)(\ldots-\ldots)}{(\ldots-\ldots)(1+\ldots)}=\frac{4x\cdot(x^2+2)}{1+x}$

Ridurre ai minimi termini le frazioni, indicando sempre le C.E.

331 $\frac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$ R $\frac{4}{a+3}$ $\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$ R $\frac{a+1}{2(a-1)}$

332 $\frac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$ R $\frac{x}{a+2}$ $\frac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$ R $\frac{1}{2}$

333 $\frac{x^2-xy}{2x-2y+ax-ay}$ R $\frac{x}{a+2}$ $\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ R $\frac{2x+1}{3x+2}$

334 $\frac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$ R $\frac{1}{a+2}$ $\frac{2x^2-5x+2}{2x^2-7x+6}$ R $\frac{2x-1}{2x-3}$

335	$\frac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$	R $\frac{a^2+1}{x+2}$	$\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}$	R $\frac{2x+1}{a+1}$
336	$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$	R $\frac{x-1}{x+1}$	$\frac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$	R $\frac{2x^2+2x+1}{x(a+1)}$
337	$\frac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$	R $\frac{4}{a+3}$	$\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	R $\frac{2x+1}{3x+2}$
338	$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$	R $\frac{x+2}{x-2}$	$\frac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$	R $\frac{x}{a+2}$
339	$\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-5x+3}$	R $\frac{2x-1}{2x-3}$	$\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$	R $\frac{x+2}{x+3}$
340	$\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$	R $\frac{1}{x-1}$	$\frac{6a^2b^3-9a^3b^2}{2ab-3a^2-2b+3a}$	R $\frac{3a^2b^2}{a-1}$
341	$\frac{x^2+ax}{2x+2a+ax+a^2}$	R $\frac{x}{a+2}$	$\frac{x^2+7x+12}{x^2-9}$	R $\frac{x+4}{x-3}$
342	$\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-6}$	R $\frac{2x-1}{2x-3}$	$\frac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-x-1}$	R $\frac{x^2+1}{2x+1}$
343	$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$	R $\frac{x-3}{x-2}$	$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$	R $\frac{x+2}{x+3}$
344	$\frac{2x^2-4xy}{ax-2ay+2x-4y}$	R $\frac{2x}{a+2}$	$\frac{8a^5b^5-4a^3b^5}{2a^3-a-1+2a^2}$	R $\frac{4a^3b^5}{a+1}$
345	$\frac{2x^2-x-3}{3x^2+2x-1}$	R $\frac{2x-3}{3x-1}$	$\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^3+x^2+2x+2}$	R $\frac{x^2-2}{x^2+2}$
346	$\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}$	R $\frac{x-4}{x+1}$	$\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$	R $\frac{2x+1}{x+1}$
347	$\frac{-2a-a^2}{2b+ab+4+2a}$	R $\frac{-a}{b+2}$	$\frac{x^2+3x-28}{x^2+2x-24}$	R $\frac{x+7}{x+6}$
348	$\frac{2x^3-7x^2+7x-2}{2x^3-5x^2+x+2}$	R $\frac{2x-1}{2x+1}$	$\frac{a^2+a}{ab+b+a+1}$	R $\frac{a}{b+1}$
349	$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$	R $\frac{x+2}{x+5}$	$\frac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$	R $\frac{x^2-2}{x+1}$
350	$\frac{-a-b}{a^2+ab+a+b}$	R $-\frac{1}{a+1}$	$\frac{x^3-1}{x^2-1}$	R $\frac{x^2+x+1}{x+1}$
351	$\frac{-a^2-a}{ab+b+a+1}$	R $-\frac{a}{b+1}$	$\frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$	R $\frac{2x-3}{x^2-x+1}$
352	$\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}$	R $\frac{x}{x-2}$	$\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$	R $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$
353	$\frac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$	R $\frac{2x-1}{x-3}$	$\frac{x^4-1}{x^4-2x^2+1}$	R $\frac{x^2+1}{x^2-1}$
354	$\frac{4x+4y}{6x+6y+2ax+2ay}$	R $\frac{2}{a+3}$	$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$	R $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$
355	$\frac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$	R $\frac{1}{a+2}$	$\frac{x^3-8}{(x^2+4)^2-4x^2}$	R $\frac{x-2}{x^2+4-2x}$
356	$\frac{2x^2-x-1}{2x^2+x}$	R $\frac{x-1}{x}$	$\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x^2+y^2+1+2xy-2x-2y}$	R $\frac{x+y+1}{x+y-1}$
357	$\frac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$	R $\frac{a^2+1}{x+2}$	$\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$	R $(x+2)(x+1)$
358	$\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}$	R $\frac{2x+1}{a+1}$	$\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$	R $\frac{a+1}{2(a-1)}$

359	$\frac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$	R $\frac{1}{2}$	$\frac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$	R $\frac{2x^2+2x+1}{x(a+1)}$
360	$\frac{x^3-1}{x^4+2x^3+x^2-1}$	R $\frac{x-1}{x^2+x-1}$	$\frac{x^6-1}{x^4-1}$	R $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$
361	$\frac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}$	R $\frac{a-2}{x-1}$	$\frac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}$	R $\frac{4x(x^2+2)}{x+1}$
362	$f_3=\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}$	R $\frac{x}{x-2}$	$\frac{a^2-b^2-ac+bc}{ab+ac+b^2-c^2}$	R $\frac{a-b}{b+c}$
363	$\frac{y^3-20y^2-34+53y}{y^2-3y+2}$	R $y-17$	$\frac{(1+ab)^2-a^2-b^2-2ab}{1+a-b^2-ab^2}$	R $1-a$

►4. Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il prodotto di due frazioni è una frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Esempio numerico

Si vuole determinare il prodotto $p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}$;

possiamo

- scrivere prima il risultato dei prodotti dei numeratori e dei denominatori e poi ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta,

$$p=\frac{7}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{\cancel{140}^{4}}{\cancel{315}_{9}}=\frac{4}{9}$$

oppure

- semplificare i termini delle frazioni e poi moltiplicare secondo lo schema di calcolo illustrato.

$$p=\frac{{}^{1}\cancel{7}}{\cancel{15}_{3}}\cdot\frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{21}_{3}}=\frac{4}{9}$$

<u>Esempi</u>

- Determinare il prodotto delle frazioni algebriche $f_1=-\frac{3a^2}{10b^3c^4}$ e $f_2=\frac{25ab^2c^7}{ab}$.

Poniamo le C.E. per ciascuna frazione assegnata ricordando che tutti i fattori letterali dei denominatori devono essere diversi da zero, quindi
C.E. : $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge c\neq 0$

Il prodotto è la frazione $f=-\frac{3a^2}{10b^3c^4}\cdot\frac{25ab^2c7}{ab}=-\frac{15a^2c^3}{2b^2}$.

- Determinare il prodotto delle frazioni algebriche $f_1=-\frac{3a}{2b+1}$ e $f_2=\frac{10b}{a-3}$.

L'espressione è in due variabili, i denominatori sono polinomi di primo grado irriducibili;

poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: **C.E. :** $2b+1\neq 0\wedge a-3\neq 0$ dunque **C.E.:** $b\neq -\frac{1}{2}\wedge a\neq 3$.

Il prodotto è la frazione algebrica: $f=-\frac{3a}{2b+1}\cdot\frac{10b}{a-3}=-\frac{30ab}{(2b+1)\cdot(a-3)}$ in cui non è lecita alcuna semplificazione.

ATTENZIONE il passaggio di semplificazione qui a lato **contiene un errore**: la variabile *a* mentre è un fattore del numeratore, è un addendo nel denominatore e così la variabile *b*.

$$f=-\frac{3\cancel{a}}{2\cancel{b}+1}\cdot\frac{10\cancel{b}}{\cancel{a}-3}$$

Esempio

Determinare il prodotto delle frazioni algebriche in cui numeratori e denominatori sono polinomi: $f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$ e $f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}$

- 1° passo: scomponiamo in fattori tutti i denominatori (servirà per la determinazione delle C.E.) e tutti i numeratori (servirà per le eventuali semplificazioni)
  $f_1=\frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{x\cdot(2x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}$ e $f_2=\frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}=\frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot(2x-1)^2}$
- 2° passo: Poniamo le C.E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: C.E.: $x-1\neq 0\wedge x-2\neq 0\wedge x\neq 0\wedge 2x-1\neq 0$ da cui C.E.:
  $x\neq 1\wedge x\neq 2\wedge x\neq 0\wedge x\neq \frac{1}{2}$
- 3° passo: determiniamo la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:

$$f=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}\cdot\frac{5\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{5}{(x-2)\cdot(2x-1)}$$

364 Determinate il prodotto delle frazioni algebriche completando le parti mancanti

$$f_1=\frac{a^2-b^2}{3x-3y} \quad e \quad f_2=\frac{6x^3y-6xy^3}{a^2x-a^2y+b^2y-b^2x}$$

- I° passo: scomponi in fattori tutti i denominatori
  $d_1=3x-3y=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
  $d_2=a^2x-a^2y+b^2y-b^2x=a^2\cdot(\dots-\dots)-\dots\cdot(x-y)=(x-\dots)\cdot(a^2-\dots)=(\dots\dots)(\dots\dots)(\dots\dots)$
  scomponi in fattori tutti i numeratori $n_1=a^2-b^2=\dots\dots\dots\dots$
  $n_2=6x^3y-6xy^3=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- II° passo: poni le C.E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: C.E.**: …………………..**
- III° passo: determina la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:
  $f=\frac{a^2-b^2}{3x-3y}\cdot\frac{6x^3y-6xy^3}{a^2x-a^2y+b^2y-b^2x}=\frac{(\dots\dots)\cdot(\dots\dots)}{3\cdot(\dots\dots)}\cdot\frac{6xy\cdot(\dots\dots)\cdot(\dots\dots)}{(\dots\dots)\cdot(\dots\dots)\cdot(\dots\dots)}=\frac{2\dots\dots\cdot(x\dots\dots)}{(x-y)}$

*Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le **C.E.**:*

365 $\frac{3x-6y}{5xy^3}\cdot\frac{2x^2y^2+xy^3}{4y^2-x^2}$ R. $\frac{-3(2x+y)}{5y(x+2y)}$

366 $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}\cdot\frac{x}{x^3-4x}$ R. 1

367 $\frac{4x-2a}{x-a}\cdot\frac{3a-3x}{a-2x}$ R. [6]

368 $\frac{-1-2a-a^2}{1+a^2-2a}\cdot\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^4+2a^3-2a-1}$; R. $-\frac{1}{a+1}$

369 $\frac{2a^4+6a+12+4a^3}{16-a^4}\cdot\frac{a^2-7a+10}{5a^5+15a^2}$ R. $\frac{-2(a-5)}{5a^2(a^2+4)}$

370 $\frac{-45x^7}{y^{-2}}\cdot\frac{4y^{-7}}{36x^{-1}}$ R. $-5\frac{x^8}{y^5}$

371 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$ R. $\frac{x+1}{x-1}$

372 $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x}$ R. $\frac{1}{x}$

373 $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{ax+x}{x^2+x}$ R. $a+1$

374 $\frac{4x^3-4x^2-x+1}{8x^3-1}\cdot\frac{4x^3+2x^2+x}{2x^2-x-1}$ R. x

375 $\frac{x^2-x-6}{2x^2-8x+8}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^3+2x^2-9x-18}$ R. $\frac{1}{2(x-2)}$

376 $\frac{x^4-1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{2x^2-x-1}{2x^3+x^2+2x+1}\cdot\frac{2x^2-2x+2}{x^3+1}$ R. 2

►5. Potenza di una frazione algebrica

La potenza di esponente n, naturale diverso da zero, della frazione algebrica $\frac{A}{B}$ con B ≠ 0 (C.E.) è la frazione avente per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}\ .$$

Esempio

- Calcoliamo f^3 , dove $f=\frac{x-2}{x^2-1}$.

Innanzi tutto, prima di calcolare la potenza, indichiamo le C.E. per la frazione assegnata.

$f=\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}$ con C.E.: $(x-1)(x+1)\neq 0$ da cui C.E. $x\neq 1\wedge x\neq -1$ dunque si ha

$f^3=\frac{(x-2)^3}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}$ con le condizioni poste.

Casi particolari dell'esponente

Se **n = 0** sappiamo che qualsiasi numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1; lo stesso si può dire se la base è una frazione algebrica, purché essa non sia nulla.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^0=1\ \ con\ \ A\neq 0\ \ e\ \ B\neq 0$$

Esempio

- Quali condizioni devono rispettare le variabili affinché si abbia $\left(\frac{3a-2}{5a^2+10a}\right)^0=1$?

Per rispondere alla domanda dobbiamo individuare le C.E. e i valori della variabile per i quali la frazione è diversa da zero.

- Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore della frazione: $f=\frac{3a-2}{5a\cdot(a+2)}$
- Determiniamo C.E. Poniamo $a\neq 0\wedge a+2\neq 0$ da cui C.E.: $a\neq 0\wedge a\neq -2$.
- Poniamo la condizione affinché la frazione non sia nulla, ricordando che questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero; indichiamo con **C_0** questa condizione dunque

  C_0 : $3a-2\neq 0$ da cui **C_0 :** $a\neq\frac{2}{3}$ **.**
- Le condizioni di esistenza sono allora $a\neq -2\wedge a\neq 0\wedge a\neq\frac{2}{3}$ **.**

Quindi la variabile *a* deve rispettare le Condizioni di Esistenza sopra determinate affinché sia vera l'uguaglianza proposta.

Se n è intero negativo sappiamo che la potenza con base diversa da zero è uguale alla potenza che ha per base l'inverso della base e per esponente l'opposto dell'esponente; lo stesso può dirsi se la base è una frazione algebrica diversa da zero:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\left(\frac{B}{A}\right)^{+n}\ \ con\ \ A\neq 0\ \ e\ \ B\neq 0$$

Esempio

- Determinare f^{-2} con $f=\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}$.
- Scomponiamo in fattori sia il numeratore che il denominatore della frazione:

  $f=\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}=\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}$

- Determiniamo C.E.:
  Poniamo $x \neq 0$ e $x^2 + 1 \neq 0$ da cui C.E.: $x \neq 0$ essendo l'altro fattore diverso da zero per qualunque valore della variabile in quanto somma di numeri positivi

Determiniamo la frazione inversa di f ;
Per poterne fare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla e questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero, quindi si deve avere **$C_0 = (x+2)\cdot(x+3) \neq 0$** da cui **$C_0 = x \neq -2$ e $x \neq -3$**.
Aggiorniamo le condizioni C.E. : $x \neq 0$ e $x \neq -2$ e $x \neq -3$
Con queste condizioni l'operazione richiesta ha come risultato:

$$f=\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}=\left(\frac{x\cdot(x^2+1)}{(x+2)\cdot(x+3)}\right)^2=\frac{x^2\cdot(x^2+1)^2}{(x+2)^2\cdot(x+3)^2}$$

Osservazioni:
Con le dovute condizioni, nell'insieme delle frazioni algebriche valgono le proprietà delle potenze viste nell'insieme dei razionali.
Con le dovute condizioni, se è possibile, si possono ridurre le frazioni ai minimi termini prima di procedere nello svolgimento di un calcolo proposto.

Determina, con le dovute condizioni sulle variabili, le seguenti frazioni

377 $\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)^3$

378 $\left[\left(\frac{12ab}{a^{2b}-ab^2}\right)^2\cdot\left(\frac{a-b}{2a^2}\right)^{-2}\right]^{-1}$ $\qquad$ $\left[\left(\frac{x^2+x}{x^2+4x+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{x+3}\right)\right]^2$

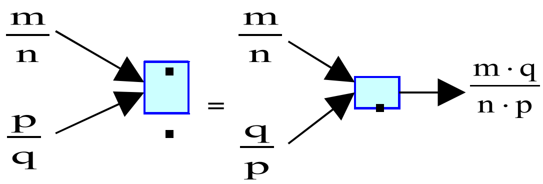
379 $\frac{a^2-b^2}{a^3+ab^2+2a^2b}\cdot\left(\frac{5a^2-5ab}{4ab+4b^2}\right)^{-1}$ $\qquad$ $\left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\right)\cdot\left(\frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)^3$

380 È vero che per $t=-\frac{15}{17}$ la frazione $f=\left(\frac{t^2-1}{1+2t+t^2}\cdot\frac{3t+3}{4-4t}\right)^4$ assume il valore 16 ?

►6. Divisione di frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni F e f con f diversa da zero è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima (F) con l'inverso della seconda (f^{-1}).

Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali:



Esempio numerico

$\frac{5}{12}:\frac{7}{4}$

L'inversa di $\frac{7}{4}$ è la frazione $\frac{4}{7}$ dunque: $\frac{5}{12}:\frac{7}{4}=\frac{5}{\cancel{12}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}^{1}}{7}=\frac{5}{21}$.

Esempio

- Determinare il quoziente delle frazioni algebriche: $f_1=\frac{3a-3b}{2a^2b}$; $f_2=\frac{a^2-ab}{b^2}$

I° passo: scomponiamo in fattori tutti i numeratori e tutti i denominatori:

$$f_1=\frac{3a-3b}{2a^2b}=\frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b}\ ;\ f_2=\frac{a^2-ab}{b^2}=\frac{a\cdot(a-b)}{b^2}$$

II° passo: poniamo le **C**ondizioni d'**E**sistenza: $2a^2b\neq0 \wedge b^2\neq0$ da cui **C.E. :** $a\neq0 \wedge b\neq0$.
III° passo: determiniamo la frazione inversa di f_2;

Per poter determinare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché non sia nulla.

Questo si verifica se il suo numeratore è diverso da zero, quindi si deve avere **C_0 :** $a \neq 0 \wedge a-b \neq 0$
da cui **C_0 :** $a \neq 0 \wedge a \neq b$.
IV° passo: aggiorniamo le condizioni **C.E. :** $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$.
V° passo: cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$f=\frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b}:\frac{a\cdot(a-b)}{b^2}=\frac{3\cdot\cancel{(a-b)}}{2a^2\cancel{b}}\cdot\frac{b^{\cancel{2}}}{a\cdot\cancel{(a-b)}}=\frac{3b}{2a^3}$$

381 *Determinare il quoziente:* $f=\frac{x^2+x}{5x-10}:\frac{x+1}{20x}$
Procedi seguendo la procedura da completare:
1° passo: scomponi in fattori x^2+x = ………………; $5x-10$ = ………………
2° passo: poni le C.E.: tutti i fattori dei denominatori diversi da zero: C.E.: …………………
3° passo: determina la frazione inversa del divisore, poni la condizione che il numeratore della frazione divisore sia diverso da zero **C_0** : ……………………………………
4° passo: aggiorna le **C.E.: ……………………..**
5° passo: cambia la divisione in moltiplicazione
$f=\frac{x^2+x}{5x-10}:\frac{x+1}{20x}=\frac{\text{…………}}{\text{……}}\cdot\frac{\text{…………}}{\text{…………}}$
6° passo: semplifica
7° passo: verificare il risultato $f=\frac{4x^2}{x-2}$

Semplificare le seguenti espressioni, evidenziando sempre le ***C.E.:***

382 $\frac{4x^3-4x^2-8}{4x^2-16}:\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

383 $\left(\frac{a^3-a^2}{2a^2+a-1}\cdot\frac{a^2-2a-3}{a^2-2a+1}\right):\left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\cdot\frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)$ R. $\left[\frac{a-3}{2a+6}\right]$

384 $\frac{a^2-b^2-a-b}{3a^2-3b^2}:\left(\frac{a^2-ab}{3a^2}\cdot\frac{5a+5ab-5a^2}{a^2-2ab+b^2}\right)$ R. $\frac{-1}{5}$

385 $\left(\frac{-2a}{b^3}\cdot\left(\frac{-ab}{4}\right)^2\right):\left(\frac{a^2}{2b^3}\right)^{-2}$ R. $\left[\frac{-a^7}{32b^7}\right]$

386 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}:\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ *R.* $\left[\frac{(x-2)^2}{x^2-9}\right]$

387 $\frac{x^2+ax-x-a}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+ax+a}$ R. $\left[\left(\frac{x+a}{x+1}\right)^2\right]$

388 $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-3x^2-x+3}:\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$ *R.* $\frac{1}{2x+1}$

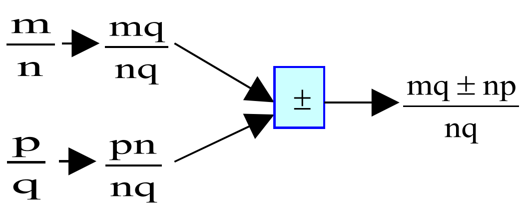
389 $\frac{xy+x+2y+2}{xy+2x-y-2}\cdot\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ *R.* $\frac{y+1}{y+2}$

►7. Addizione di frazioni algebriche

Proprietà della addizione tra frazioni algebriche
Nell'insieme delle frazioni algebriche la somma

- È commutativa: $f_1+f_2=f_2+f_1$
- È associativa: $(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)=f_1+f_2+f_3$
- Possiede l'elemento neutro, cioè esiste una frazione F° tale che: per qualunque frazione f si abbia F° + f = f + F°= f e F° = 0
- Ogni frazione algebrica f, possiede la frazione opposta (-f) tale che (- f) + f = f + (- f) = F° = 0

Quest'ultima proprietà ci permette di trattare contemporaneamente l'operazione di addizione e di sottrazione, come abbiamo fatto tra numeri relativi; (+1) + (-2) omettendo il segno di addizione + e togliendo le parentesi diventa 1 – 2 ; (+1) – (-2) omettendo il segno di sottrazione – e togliendo le parentesi diventa 1 + 2. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si



intenderà "somma algebrica".
Lo schema di calcolo per addizionare due frazioni algebriche può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali.

Esempio

$$S=\frac{2x-3y}{x+y}+\frac{x+2y}{x+y}$$

poniamo le C.E.: x + y ≠ 0 da cui C.E.: x ≠ -y

$$S=\frac{2x-3y}{x+y}+\frac{x+2y}{x+y}=\frac{(2x-3y)+(x+2y)}{x+y}=\frac{3x-y}{x+y}\ .$$

Osservazione

a questo caso ci si può sempre ricondurre trasformando le frazioni allo stesso denominatore. Si potrebbe scegliere un qualunque denominatore comune, ad esempio il prodotto di tutti i denominatori, ma, come abbiamo operato in **Q**, scegliamo il m.c.m dei denominatori delle frazioni addendi.

Esempio

Si vuole determinare la seguente somma algebrica: $\frac{x+y}{3x^2y}-\frac{2y-x}{2xy^3}$

I due addendi hanno monomi al denominatore; dobbiamo trasformare le frazioni in modo che abbiano lo stesso denominatore:

1° passo: calcoliamo il m.c.m. $(3x^2y,\ 2xy^3)=6x^2y^3$

2° passo: poniamo le C.E.: $6x^2y^3\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 0$ e $y\neq 0$

3° passo: trasformiamo gli addendi allo stesso denominatore; l'operazione che dobbiamo eseguire diventa:

$S=\frac{2y^2\cdot(x+y)}{6x^2y^3}-\frac{3x\cdot(2y-x)}{6x^2y^3}$ si procede ora come nel primo esempio; la frazione somma ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori:

$S=\frac{2y^2\cdot(x+y)-3x\cdot(2y^2-x)}{6x^2y^3}=\frac{2xy^2+2y^3-6xy^2+3x^2}{6x^2y^3}=\frac{2y^3-4xy^2+3x^2}{6x^2y^3}$ in cui non è lecita alcuna semplificazione.

Esempio

Eseguiamo la seguente somma algebrica: $S=\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}$

Le frazioni addendi hanno polinomi al denominatore: dobbiamo trasformare le frazioni ad avere lo stesso denominatore, dunque

1° passo: calcoliamo il m.c.m. dei denominatori

scomponiamo in fattori ciascun denominatore

$$x^2-2x=x\cdot(x-2);\quad x^2+2x=x\cdot(x+2);\quad x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$$

il m.c.m. è il prodotto dei fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con l'esponente maggiore:

$$m.c.m.=x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

2° passo: poniamo le C.E.: $x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\neq 0$ da cui C.E.: $x\neq 0$ e $x\neq 2$ e $x\neq -2$

3° passo: trasformiamo le frazioni ad avere come denominatore il m.c.m. trovato:

$$\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-2}{2x+x^2}+\frac{-4x}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}-\frac{(x-2)^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}+\frac{-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$$

4° passo: scriviamo la frazione risultato avente come denominatore il denominatore comune e come numeratore la somma dei numeratori: $=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$

(questi due passi possono essere eseguiti contemporaneamente)

5° passo: eseguiamo le operazioni al numeratore, riducendo i monomi simili:

$$=\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{8x-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=$$

6° passo: semplifichiamo se possibile la frazione ottenuta: $S=\frac{-4\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{-4}{(x+2)}$

390 *Esegui la seguente somma algebrica seguendo e completando i passi suggeriti:*

$$S=\frac{x}{x-2}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-1}-\frac{5x^2-7}{x^3-2x^2+2-x}$$

1° passo: calcola il m.c.m. dei denominatori
Scomponi i denominatori: $(x-2)$, $(x+1)$ e $(x-1)$ sono irriducibili,
$x^3-2x^2+2-x=x^2\cdot(x-2)-1\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x^2-1)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$
determina il m.c.m.= ………………………….
2° passo: le C.E.: ……………………..
3° passo: trasforma gli addendi allo stesso denominatore:
S = **…………………- ……………+ …………………… - ……………………..**
4° passo: scrivi la frazione risultato avente come denominatore il denominatore comune e come numeratore la somma dei numeratori:

$$\frac{x\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots-\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot(x-1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-(5x^2-7)}{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=$$

5° passo: eseguite le operazioni al numeratore, riducendo i monomi simili

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}=$$

6° passo: semplificate se possibile la frazione ottenuta $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{-7}{(x-2)\cdot(x+1)}$

391 *Verificare che la somma* $S=\frac{z+1}{4z-4}+\frac{1+z}{z^2-4z+3}-\frac{3-z}{4-4z}$ *assume valore* $-\frac{4}{3}$ *se* $z=\frac{3}{2}$

392 *Possiamo affermare che per qualunque valore attribuito alle variabili la somma* $S=\frac{b+1}{a^2+ab+a}-\frac{1}{a}+\frac{a+1-b}{a^2+2a+1-b^2}$ *vale zero?*

Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto

393 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2}=1$ V F

394 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1+x}{x^2}$ V F

395 $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{x-y+x+y}{x^2-y^2}=\frac{2x}{x^2-y^2}$ V F

396 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}=\frac{-y+1}{x-y}$ V F

397 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{x-1}$ V F

398 $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x+1}=1$ V F

399 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=\frac{1+1}{a-b}$ V F

400 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$ V F

401 $x-\frac{y}{x+y}=\frac{x^2+xy-y}{x+y}$ V F

Riduci le seguenti somme fra frazioni algebriche

402 $\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{x^2y^2}$ *R.* $\frac{x+y-1}{x^2y^2}$

403 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}$ *R.* $\frac{7}{6x}$

404 $\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2-a}-\frac{1}{a-1}$ *R.* $\frac{1}{a}$

405 $\frac{a-1}{a^2-a}+\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a}$ *R.* $\frac{2}{a(a-2)}$

406 $\frac{2}{a-1}+\frac{3}{1-a}+\frac{a}{a-1}$ *R.* 1

407 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1}+x$ R. x

408 $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$ R. $-\frac{1}{x^2-x}$

409 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}$ R. $\frac{2x+1}{x^2-4}$

410 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$ R. $\frac{2}{x-2}$

411 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+ab-b-1}$ R. $\frac{a+b+1}{(a-1)(b+1)}$

412 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}$ R. $\frac{x}{(x-1)^2}$

413 $\frac{2x-3}{x}+\frac{-2x}{2x+3}-1$ R. $\frac{-3(x+3)}{x(2x+3)}$

414 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$ R. $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}$

415 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}$ R. $\frac{x(x+1)}{x^3-1}$

416 $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2a^2-a-1}$ R. $\frac{3a+1}{2a^2-a-1}$

417 $\frac{3x}{x^2-2xy+y^2}-\frac{3}{x-y}+\frac{9}{2y-2x}$ R. $\frac{3(5y-3x)}{2(x-y)^2}$

418 $\frac{24x}{x^2+3x-4}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}-\frac{18(x-1)}{x^2+2x-8}$ R. $\frac{7(x+1)}{(x+4)(x-1)}$

419 $\frac{2}{x^2-9x+20}-\frac{2}{25-x^2}-\frac{4}{x^2+x-20}$ R. $\frac{22}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

420 $\frac{4ay-4a^2}{y^3+8a^3}+\frac{1}{y+2a}-\frac{y-a}{y^2-2ay+4a^2}$ R. $\frac{a}{y^2-2ay+4a^2}$

421 $\frac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\frac{5x}{2x^2+3x}-\frac{20x}{9-4x^2}$ R. $\frac{9}{2x-3}$

422 $\frac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}$ R. $\frac{x^2-2x}{x^3+1}$

423 $\frac{t^2-1}{4+t^2}-\frac{4z-1}{2z+1}+\frac{24z-4t^2-2t^2z}{2t^2z+t^2+8z+4}$ R. $\frac{3-2t^2}{t^2+4}$

424 $\frac{1}{xy+yz-y^2-xz}-\frac{1}{zx+zy-xy-z^2}-\frac{1}{xy-x^2-yz+xz}$ R. $\frac{2}{(x-y)(y-z)}$

►8. Espressioni con le frazioni algebriche

In questo paragrafo, attraverso la soluzione guidata di alcuni esercizi, faremo vedere come semplificare espressioni contenenti somme algebriche, moltiplicazioni, divisioni e potenze i cui termini sono frazioni algebriche.

425 $f=\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right):\frac{3}{4x^2-4}$

Analisi preliminare: f si ottiene dividendo la somma algebrica S per la frazione F'

$$f=\underbrace{\left(\frac{x+1}{2x-2}+\frac{5}{2x^2-2}-\frac{x+3}{2x+2}\right)}_{S}:\underbrace{\frac{3}{4x^2-4}}_{F'}$$

Scomponiamo tutti i denominatori degli addendi per poterne calcolare il m.c.m.; scomponiamo numeratore e denominatore di F' per poter eseguire la divisione.

Riscriviamo: $$f=\underbrace{\left(\frac{x+1}{2\cdot(x-1)}+\frac{5}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{x+3}{2\cdot(x+1)}\right)}_{\text{m.c.m.}=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}:\frac{3}{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Poniamo le C.E.: 2·(x+1)·(x-1) ≠ 0, condizioni che rendono definita anche F', che non si annulla mai avendo il numeratore indipendente dalla variabile. Per cui:C.E.: $x \neq -1$ e $x \neq +1$.

Procediamo nella soluzione della somma e cambiamo la divisione in moltiplicazione

$$f=\left(\frac{(x+1)\cdot(x+1)+5-(x+3)\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\right)\cdot\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{3}=$$

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{4\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{3}=$$

eseguite i calcoli al numeratore della prima frazione, semplificate e verificate il risultato: f=6.

426 $f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$

Dobbiamo innanzi tutto eseguire le somme nelle parentesi; determiniamo il m.c.m. e poniamo le C.E. 3·a ≠ 0 da cui C.E.: a ≠0

$$f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{3-a}{3a}\right):\left(\frac{3+a}{3a}\right)-\frac{1}{3}$$

per eseguire la divisione poniamo C_0: 3 + a ≠ 0 da cui C.E.: a ≠ -3. Aggiornate le C.E. … … … … .

Cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$f=\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{3-a}{3a}\right)\cdot\left(\frac{3a}{3+a}\right)-\frac{1}{3} = \frac{a-3}{a+3}+\frac{3-a}{a+3}-\frac{1}{3}$$

completate l'operazione e verificate il risultato $f=-\frac{1}{3}$.

427 $E=\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^2}+\frac{a}{1+a}$

Analisi preliminare: E si ottiene dalla somma di due frazioni algebriche **f_1, f_2;** f_1 è il prodotto della somma **s** con la frazione **f** come dallo schema sottostante

$$E=\underbrace{\underbrace{\left(\frac{a}{a^2-1}-\frac{a}{a^2+1}\right)}_{s}\cdot\underbrace{\frac{a^3-a^2+a-1}{2a^2}}_{f}}_{f_1}+\underbrace{\frac{a}{1+a}}_{f_2}$$

Risolviamo la somma **s** e scomponiamo il numeratore di **f**:

$$E=\left(\frac{a}{(a-1)\cdot(a+1)}-\frac{a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a^2\cdot(a-1)+(a-1)}{2a^2}+\frac{a}{1+a}=$$

$$=\left(\frac{a^3+a-a^3+a}{(a-1)\cdot(a+1)\cdot(a^2+1)}\right)\cdot\frac{(a-1)\cdot(a^2+1)}{2a^2}+\frac{a}{1+a}=$$

mettiamo le C.E.: $a-1\neq 0$, $a+1\neq 0$ e $a^2+1\neq 0$; per il fattore a^2+1 non mettiamo alcuna condizione perché è una somma di quadrati, quindi sempre diversa da zero.
Quindi C.E.: …..

sommiamo i monomi simili al numeratore, semplifichiamo i fattori uguali:

$$=\frac{2a}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}\cdot\frac{(a-1)(a^2+1)}{2a^2}+\frac{a}{1+a}=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{a}{1+a}=\frac{1+a^2}{a(a+1)}$$

Nell'esercizio che segue, lasciamo a voi il completamento di alcuni passaggi:

428 $F=\frac{x^3-25x}{x^2+8x+15}:\left(\frac{x}{2x+6}+\frac{2}{3-x}+\frac{6+x}{x^2-9}\right)$

Analisi preliminare**:** F è il quoziente tra ………………………………………….

$$F=\frac{x\cdot(x+\ldots)\cdot(\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots)\cdot(x+5)}:\left(\frac{x}{2\cdot(x+\ldots)}+\frac{2}{3-x}+\frac{6+x}{(x+\ldots)\cdot(x-\ldots)}\right)$$

Mettete le C.E. per il dividendo: ………………………………………..
Calcolate il m.c.m. per eseguire la somma nel divisore: m.c.m. = …………………….. , mettete le C.E. per il

denominatore: ……………………………………………………………………

$F=\frac{x\cdot(x+\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)}{(\ldots\ldots\ldots)\cdot(x+5)}:\left(\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{2\cdot(x+\ldots\ldots)\cdot(x-\ldots\ldots)}\right)$ eseguite i calcoli al numeratore, ponete la condizione per eseguire la divisione: C_0 : …………………

Aggiornate le **C**ondizioni di **E**sistenza: …..................................

Completate il calcolo e verificare il risultato $E=2\cdot(x-3)$

429 $E=\left(\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\right)\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$

Analisi preliminare**:** L'espressione E è nelle due variabili a e x; essa rappresenta il prodotto tra un quoziente di frazioni algebriche e una frazione algebrica.

1° passo: scomponiamo in fattori tutti i numeratori e tutti i denominatori

$$E=\left(\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\right)\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}=\left(\frac{x^2\cdot(x-a)\cdot(x+a)}{a^2\cdot(2x+a)^2}:\frac{x\cdot(x+a)}{ax\cdot(2x+a)}\right)\cdot\frac{a^2\cdot(2x+a)}{x\cdot(x-a)}$$

2° passo: determiniamo **C.E.**
C.E. : a ≠ 0 e 2x + a ≠ 0 e x ≠ 0 e x **– a** ≠ 0 quindi C.E.: ….......................

3° passo: determiniamo la frazione inversa del divisore, ponendo la C_0 sul suo numeratore: C_0 : x ≠ 0 e x + a≠ 0 da cui C_0 : …………….
Aggiornate le condizioni: C.E.: …..

4° passo: completate il calcolo e verificate il risultato: E = ax

$$E=\left(\frac{x^2\cdot(x-a)\cdot(x+a)}{a^2\cdot(2x+a)^2}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\cdot\frac{a^2\cdot(2x+a)}{x\cdot(x-a)}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

430 *Quale delle seguenti espressioni ha lo stesso significato e dunque lo stesso risultato dell'espressione E dell'esercizio precedente? E=ax*

$$E_1=\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$$

$$E_2=\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\left(\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}\right)$$

$$E_3=\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}:\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$$

Semplificate le espressioni ricordando l'analisi preliminare e ponendo sempre le condizioni di esistenza:

431 $\left(\frac{2a^2+a}{a^3-1}-\frac{a+1}{a^2+a+1}\right)\cdot\left(1+\frac{a+1}{a}-\frac{a^2+5a}{a^2+a}\right)$ R. $\left[\frac{a-1}{a^2+a}\right]$

432 $\left(\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}\right):\left(1-\frac{x-a}{x+a}\right)^2$ R. $\left[\frac{x(a+x)}{a(x-a)}\right]$

433 $\frac{a^2b^2}{a^4-ab^3+a^3b-b^4}:\left(\frac{a+b}{a^3-b^3}-\frac{1}{a^2-b^2}\right)$ R. $[ab]$

434 $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right):\left(\frac{z^3-z^2}{z-5}:\frac{z^5-z^3}{2z-10}\right)$ R. $\left[\frac{1}{2}\right]$

435 $\frac{x+y}{x^2+x+xy+y}-\frac{1}{y+1}+\frac{x}{x+1}$ R. $\left[\frac{y}{y+1}\right]$

436 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-a^3}-1\right)$ R. $\left[\frac{1}{1-a}\right]$

437 $1-\frac{a+b}{a-b}\cdot\left(\frac{2a-b}{a+b}-\frac{a-b}{a}\right)$ R. $\left[\frac{b^2}{a(b-a)}\right]$

438 $\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)\frac{a^2-1}{2a}$ R. 1

439 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\frac{a^2-1}{2a}$ R. $\frac{a^2+1}{2a(a-1)}$

440 $\left(\frac{1}{a^2-2a+1}+\frac{1}{a^2-3a+2}\right):\frac{4a^2-6a}{1-a}$ R. $\frac{-1}{2a(a-1)(a-2)}$

441 $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{x}{x-1}\right)\frac{ax^2-ax-a^2x+a^2}{ax-x^2}$ R. $\left[\frac{a(a-1)}{a-x}\right]$

442 $\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2-a}\right)-\frac{1}{a-2}\right]:\frac{1+a+a^2}{1-a^3}$ R. $\frac{1}{a-2}$

443 $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)+\frac{x-y}{x}$ R. $\frac{x-y}{x+y}$

444 $\left(\frac{a^2+1}{2a}-1\right):\frac{a^2-3a+2}{4a}:\frac{a^2+a-2}{a^2-4}+\frac{a^2+1}{a}$ R. $\frac{(a+1)^2}{a}$

445 $\left[\left(\frac{1}{a^2+9-b^2+6a}-\frac{1}{a^2+9+b^2+6a-2ab-6b}\right):\frac{-6b}{3a+9+3b}\right]^{-1}$ R. $(a+3-b)^2$

446 $\left(\frac{3}{x^6-x^3}-\frac{1}{9x^3-9}\right):\frac{9+x^2+3x}{3x^5+3x^3+3x^4}+\frac{6x-5}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{12}{x^2+x-2}$ R. $\frac{14x+3}{3(x-1)}$

447 $\left(\frac{1}{2b-2-a+ab}+\frac{1}{1-b}\right):\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{2+a+2b+ab}\right)+\frac{2b^2-b-1}{b^2-2b+1}$ R. $\left[\frac{b}{b-1}\right]$

448 $\dfrac{\dfrac{x^{3n}-y^{3n}}{x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}}}{\dfrac{2x^{2n}-4x^ny^n+2y^{2n}}{x^{2n}-y^{2n}}}+\frac{1}{2}(x^n-y^n)-\frac{x^ny^n}{2(x^n+y^n)}$ R. $\frac{x^{2n}}{x^n+y^n}$

449 $\dfrac{\dfrac{x^ny+x^{n+1}+y^{n+1}+xy^n}{x^{n+1}-x^ny-xy^n+y^{n+1}}}{\dfrac{x^n+y^n}{x^n-y^n}}-\dfrac{\dfrac{x^3}{x^3-y^3}}{\dfrac{x^2}{x^2+y^2+xy}}$ R. $\frac{y}{x-y}$

450 $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-25+20y-4y^2}-\dfrac{1}{x^2-25+4y^2+4xy}}{\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+25+10x-4y^2}}\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}-\frac{5}{4}\right):\dfrac{1}{\frac{x}{y}-2}$ R. $\frac{1}{x+2y}$

451 $\dfrac{\dfrac{x^{n+1}+xy-x^ny-y^2}{x^{2n}-y^2}}{\dfrac{1+\frac{y}{x}}{x^{n-1}-\frac{y}{x}}}-\left(-\frac{a}{a+2}+\frac{x}{x+y}-\dfrac{1}{\dfrac{ax+2x+ay+2y}{2y+2x}}\right)$ R. $\frac{x}{x+y}$

452 $\dfrac{\left(\dfrac{x^3-b^3}{x^3-3bx^2+3b^2x-b^3}-\dfrac{bx}{x^2-2bx+b^2}+\dfrac{x+b}{b-x}\right):\left(\dfrac{x+b}{x-b}+1\right)}{\dfrac{x^2-bx-6b^2}{x^2+bx-2b^2}}:\frac{b}{x}$ R. $\frac{b}{x-3b}$

453 È vero che per qualunque $a\neq0$ e $b\neq0$ l'espressione $P=\left(\frac{4a^2-1}{8a^3b}:\frac{2a+1}{4a^4b}\right)\cdot\left(\frac{2a^5}{6a-3}:\frac{a^2}{27}\right)$ è sempre positiva?

454 Assegnata l'espressione $Q=\frac{4-(a^2-2ab+b^2)}{b-2-a}:\left(\frac{4-2a+2b}{3a^2}:\frac{2}{a^3}\right)$, quali condizioni dobbiamo porre alla variabile b affinché sia vera la proposizione "Per a = 3, l'espressione Q assume il valore –1."?

MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

6. ALGEBRA DI PRIMO GRADO

Maze

photo bby: woodleywonderworks

taken from: http://www.flickr.com/photos/wwworks/2786242106

1. EQUAZIONI

►1. Equazioni di grado superiore al primo riducibili al primo grado

Le equazioni di grado superiore al primo possono, in certi casi, essere ricondotte ad equazioni di primo grado, utilizzando la legge di annullamento del prodotto.

Esempio

■ $x^2-4=0$

Il polinomio a primo membro può essere scomposto in fattori: $(x-2)(x+2)=0$
Per la legge di annullamento, il prodotto dei due binomi si annulla se $x-2=0$ oppure se $x+2=0$.
Di conseguenza si avranno le soluzioni: $x=2$ e $x=-2$.

In generale, se si ha un'equazione di grado *n* scritta in forma normale $P(x)=0$
e se il polinomio $P(x)$ è fattorizzabile nel prodotto di *n* fattori di primo grado:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)=0$$

applicando la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione si ottengono determinando le soluzioni delle *n* equazioni di primo grado, cioè risolvendo:

$$\begin{array}{l} x-a_1=0 \\ x-a_2=0 \\ x-a_3=0 \\ \dots \\ x-a_{n-1}=0 \\ x-a_n=0 \end{array}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data sarà $S=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$

Esempio

■ $x^2-x-2=0$

Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, ricercando quei due numeri la cui somma è pari a -1 e il cui prodotto è pari a -2, si ha: $(x+1)(x-2)=0$
Utilizzando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene il seguente insieme di soluzioni: $I.S.=\{-1,2\}$

1 Risolvere l'equazione $x^4-5x^2+4=0$.
Scomponendo in fattori il polinomio a primo membro, utilizzando la regola della scomposizione del particolare trinomio di secondo grado, si ottiene: $(x^2-1)(x^2\dots\dots)=0$
Per la legge di annullamento del prodotto è necessario risolvere le equazioni:
$x^2-1=0$ e ……………………………
Ciascuno dei binomi può essere ulteriormente scomposto ottenendo … … … … … … … … … … … ...
L'insieme delle soluzioni: $I.S.=\{\dots\dots\dots\}$.

Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al primo, riconducendole a equazioni di primo grado, ricercare le soluzioni tra i numeri reali.

2	$x^2+2x=0$	$I.S.=\{0,-2\}$
3	$x^2+2x-9x-18=0$	$I.S.=\{-2,+9\}$
4	$2x^2-2x-4=0$	$I.S.=\{2,-1\}$
5	$4x^2+16x+16=0$	$I.S.=\{-2\}$
6	$x^2-3x-10=0$	$I.S.=\{5,-2\}$
7	$x^2+4x-12=0$	$I.S.=\{2,-6\}$
8	$3x^2-6x-9=0$	$I.S.=\{3,-1\}$
9	$x^2+5x-14=0$	$I.S.=\{2,-7\}$
10	$-3x^2-9x+30=0$	$I.S.=\{2,-5\}$
11	$7x^2+14x-168=0$	$I.S.=\{4,-6\}$

12 $-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+63=0$ $\quad I.S.=\{7,-6\}$

13 $\frac{7}{2}x^2+7x-168=0$ $\quad I.S.=\{6,-8\}$

14 $x^4-16x^2=0$ $\quad I.S.=\{0,4,-4\}$

15 $-4x^3+20x^2+164x-180=0$ $\quad I.S.=\{1,9,-5\}$

16 $2x^3+2x^2-20x+16=0$ $\quad I.S.=\{1,2,-4\}$

17 $-2x^3+6x+4=0$ $\quad I.S.=\{2,-1\}$

18 $-x^6+7x^5-10x^4=0$ $\quad I.S.=\{0,2,5\}$

19 $x^3-3x^2-13x+15=0$ $\quad I.S.=\{1,5,-3\}$

20 $x^2+10x-24=0$ $\quad I.S.=\{2,-12\}$

21 $-\frac{6}{5}x^3-\frac{6}{5}x^2+\frac{54}{5}x+\frac{54}{5}=0$ $\quad I.S.=\{-1,3,-3\}$

22 $5x^3+5x^2-80x-80=0$ $\quad I.S.=\{-1,4,-4\}$

23 $-3x^3+18x^2+3x-18=0$ $\quad I.S.=\{1,-1,6\}$

24 $4x^3+8x^2-16x-32=0$ $\quad I.S.=\{2,-2\}$

25 $2x^3-2x^2-24x=0$ $\quad I.S.=\{0,-3,4\}$

26 $x^3+11x^2+26x+16=0$ $\quad I.S.=\{-1,-2,-8\}$

27 $2x^3+6x^2-32x-96=0$ $\quad I.S.=\{4,-4,-3\}$

28 $x^4-5x^2+4=0$ $\quad I.S.=\{1,-1,2,-2\}$

29 $2x^3+16x^2-2x-16=0$ $\quad I.S.=\{1,-1,-8\}$

30 $-x^3-5x^2-x-5=0$ $\quad I.S.=\{-5\}$

31 $-2x^3+14x^2-8x+56=0$ $\quad I.S.=\{7\}$

32 $2x^3+12x^2+18x+108=0$ $\quad I.S.=\{-6\}$

33 $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ $\quad I.S.=\{1,2,3,4\}$

34 $-2x^3-12x^2+18x+28=0$ $\quad I.S.=\{-1,2,-7\}$

35 $-4x^4-28x^3+32x^2=0$ $\quad I.S.=\{0,1,-8\}$

36 $-5x^4+125x^2+10x^3-10x-120=0$ $\quad I.S.=\{1,-1,-4,6\}$

37 $\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{4}x=0$ $\quad I.S.=\{0,1,-1\}$

38 $\frac{7}{6}x^4-\frac{161}{6}x^2-21x+\frac{140}{3}=0$ $\quad I.S.=\{1,-2,5,-4\}$

39 $(x^2-6x+8)(x^5-3x^4+2x^3)=0$ $\quad I.S.=\{0,1,2,4\}$

40 $(25-4x^2)^4(3x-2)^2=0$ $\quad I.S.=\left\{\frac{5}{2},-\frac{5}{2},\frac{2}{3}\right\}$

41 $(x-4)^3(2x^3-4x^2-8x+16)^9=0$ $\quad I.S.=\{4,2,-2\}$

42 $(x^3-x)(x^5-9x^3)(x^2+25)=0$ $\quad I.S.=\{0,1,-1,3,-3\}$

43 $(x^4+3x^3-3x^2-11x-6)(4x^6-216x^3+2916)=0$ $\quad I.S.=\{-1,2,3,-3\}$

44 $2x^2-x-1=0$ $\quad I.S.=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$

45 $3x^2+5x-2=0$ $\quad I.S.=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

46 $6x^2+x-2=0$ $\quad I.S.=\left\{\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right\}$

47 $2x^3-x^2-2x+1=0$ $\qquad I.S.=\left\{1,-1,\frac{1}{2}\right\}$

48 $3x^3-x^2-8x-4=0$ $\qquad I.S.=\left\{-1,2,-\frac{2}{3}\right\}$

49 $8x^3+6x^2-5x-3=0$ $\qquad I.S.=\left\{-1,-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$

50 $6x^3+x^2-10x+3=0$ $\qquad I.S.=\left\{1,\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right\}$

51 $4x^4-8x^3-13x^2+2x+3=0$ $\qquad I.S.=\left\{3,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

52 $8x^4-10x^3-29x^2+40x-12=0$ $\qquad I.S.=\left\{2,-2,\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}$

53 $-12x^3+68x^2-41x+5=0$ $\qquad I.S.=\left\{5,\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right\}$

54 $x^5+3x^4-11x^3-27x^2+10x+24=0$ $\qquad I.S.=\{1,-1,-2,3,-4\}$

55 $2x^5-9x^4+2x^3+33x^2-40x+12=0$ $\qquad I.S.=\left\{1,2,-2,3,\frac{1}{2}\right\}$

56 $4x^5+3x^4-64x-48=0$ $\qquad I.S.=\left\{2,-2,-\frac{3}{4}\right\}$

►2. Equazioni numeriche frazionarie

In un capitolo precedente abbiamo affrontato le equazioni di primo grado. Affrontiamo ora le equazioni in cui l'incognita compare anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Un'**equazione** in cui compare l'incognita al denominatore si chiama **frazionaria o fratta.**

Partiamo da alcuni esempi.

Esempio

Sono assegnate le due frazioni algebriche $f_1=\frac{3x-2}{1+x}$, $f_2=\frac{3x}{x-2}$. Esiste un valore reale che sostituito alla variabile x rende f_1 uguale ad f_2 ?

La soluzione al problema viene cercata impostando l'equazione $\frac{3x-2}{1+x}=\frac{3x}{x-2}$, che si differenzia dalle equazioni affrontate nel capitolo 4 (Equazioni intere) dal fatto che l'incognita compare anche al denominatore.

Riflettendo sulla richiesta del problema posto all'inizio, possiamo senz'altro affermare che, se esiste il valore che rende f_1 uguale ad f_2, esso non deve annullare né il denominatore di f_1, né quello di f_2, poiché in questo caso renderebbe priva di significato la scrittura, in quanto scritture con frazioni che hanno 0 al denominatore sono prive di significato.

Per risolvere un'equazione frazioni seguiamo la seguente procedura. Ogni equazione frazionaria deve essere condotta alla forma $\frac{F(x)}{G(x)}=0$ dove F(x) e G(x) sono polinomi nella incognita x, per farlo si applica il primo principio di equivalenza delle equazioni.

1° passo: determiniamo il m.c.m. dei denominatori $m.c.m.=(1+x)\cdot(x-2)$

Osserviamo che per x = -1 oppure per x = 2 le frazioni al primo e al secondo membro perdono di significato, in quanto si annulla il denominatore.

2° passo: imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $1+x\neq 0$ e $x-2\neq 0$ cioè:
C.E. $x\neq -1 \wedge x\neq 2$.

La ricerca del valore che risolve l'equazione viene ristretta ai numeri reali appartenenti all'insieme $D=\mathbb{R}-\{-1,2\}$ detto **dominio** dell'equazione o **insieme di definizione.**

3° passo: applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione che si trova al secondo membro; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) per condurre l'equazione alla forma $\frac{F(x)}{G(x)} = 0$, nel nostro caso $\frac{(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)}=0$

4° passo: applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste. L'equazione diventa:
$(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)=0$

5° passo: svolgiamo i calcoli riducendo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica:
$3x^2-6x-2x+4-3x-3x^2=0 \quad \rightarrow \quad -11x=-4$

6° passo: dividiamo ambo i membri per –11, applicando il secondo principio di equivalenza, otteniamo: $x=\frac{4}{11}$

7° passo: confrontiamo il valore trovato con le C.E.: in questo caso la soluzione appartiene all'insieme D, quindi possiamo concludere che è accettabile, l'insieme soluzione è: $I.S.=\left\{\frac{4}{11}\right\}$

Conclusione: il valore da attribuire alla variabile affinché f_1 sia uguale ad f_2 è $x=\frac{4}{11}$.

Esempio

■ $\frac{x^2+x-3}{x^2-x}=1-\frac{5}{2x}$

L'equazione assegnata è un'equazione frazionaria:

- determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo prima scomporli in fattori. Riscriviamo: $\frac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)}=1-\frac{5}{2x}$ $\quad m.c.m.=2x\cdot(x-1)$;
- imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: $x-1\neq 0$ e $2x\neq 0$, cioè $x\neq 1$ e $x\neq 0$, quindi il dominio è $D=\mathbb{R}-\{1,0\}$;
- trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione: $\frac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)}-1+\frac{5}{2x}=0$ otteniamo
$$\frac{2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5}{2x\cdot(x-1)}=0$$
- applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5=0$;
- svolgiamo i calcoli riducendo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $9x=11$;
- dividiamo ambo i membri per 9 , otteniamo: $x=\frac{11}{9}$.
- Confrontando con le C.E., la soluzione appartiene all'insieme **D**, dunque è accettabile e l'insieme soluzione è: $I.S.=\left\{\frac{11}{9}\right\}$.

57 Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{30}{x^2-25}+\frac{3}{5-x}=0$

L'equazione assegnata è fratta:

- determiniamo il m.c.m. dei denominatori; per fare questo dobbiamo scomporre in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\frac{30}{(x-5)\cdot(x+5)}-\frac{3}{x-5}=0$ $\quad m.c.m.=(x+5)\cdot(x-5)$;
- imponiamo le **C**ondizioni di **E**sistenza: x - 5 ≠ 0 et x + 5 ≠ 0, cioè C.E. x ≠ 5 et x ≠ -5, quindi $D=\mathbb{R}-\{-5,5\}$.

Prosegui tu riempiendo le parti lasciate vuote:

- riduci allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione:
- m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa:
- svolgi i calcoli e porta l'equazione alla forma canonica:

- dividi ambo i membri per ……… , applicando il secondo principio, ottieni: $x=$……… . Confrontando con le C.E. la soluzione non appartiene all'insieme D, dunque non è accettabile e l'insieme soluzione è: **I.S. =** …....................... l'equazione è impossibile.

58 Determina l'insieme soluzione dell'equazione: $\frac{18x^2-9x-45}{4-36x^2}-\frac{6x+1}{9x-3}+\frac{21x-1}{18x+6}=0$

L'equazione assegnata è frazionaria:

- determina il m.c.m. dei denominatori; per fare questo scomponi in fattori i denominatori:
- $\frac{18x^2-9x-45}{4\cdot(..........)\cdot(...........)}-\frac{6x+1}{...............}+\frac{21x-1}{................}=0$ quindi m.c.m. = … … … … ...
- Poni le **C**ondizioni di **E**sistenza: ……………………………………………
- Il dominio è D = R – {…………… }
- riduci allo stesso denominatore (m.c.m.) ambo i membri dell'equazione:
$\frac{3\cdot(.......................).......(6x+1)\cdot(.............)+(...................)\cdot(.............)}{12\cdot(..........)\cdot(3x+1)}=0$
- applica il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m., certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa:
- svolgi i calcoli riducendo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica:
- applica il secondo principio di equivalenza, ottieni: x = …………………..
Confronta con le C.E. : la soluzione appartiene/non appartiene all'insieme D, dunque è accettabile/non è accettabile e l'insieme soluzione è: I.S. = ...

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie

59 $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x+2}$ $I.S.=\{-3\}$ $\frac{1}{x-1}=2$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

60 $1-\frac{1}{x+1}=0$ $I.S.=\{0\}$ $\frac{2x-4}{x-2}=0$ $I.S.=\emptyset$

61 $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}=1$ $I.S.=\{0\}$ $\frac{1}{x-3}=\frac{x}{3-x}$ $I.S.=\{-1\}$

62 $\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{5}{x+2}$ $I.S.=\left\{\frac{11}{6}\right\}$ $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x+1}$ $I.S.=\emptyset$

63 $\frac{1}{3-x}-\frac{4}{2x-6}=0$ $I.S.=\{\emptyset\}$ $\frac{x^2-1}{x-1}-1=2x+1$ $I.S.=\{-1\}$

64 $\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$ $I.S.=\emptyset$ $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{2-2x}{x^3}$ $I.S.=\{2,-1\}$

65 $\frac{x-2}{x-1}=\frac{x-1}{x-2}$ $I.S.=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ $\frac{x+3}{x+1}=x+3$ $I.S.=\{0,-3\}$

66 $\frac{3x+1}{3x^2+x}=1$ $I.S.=\{1\}$ $\frac{6+x}{x-3}=\frac{x^2}{x-3}$ $I.S.=\{-2\}$

67 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ $I.S.=\emptyset$

68 $\frac{5}{x-2}-\frac{6}{x+1}=\frac{3x-1}{x^2-x-2}$ $I.S.=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

69 $\frac{1}{(1-x)}-\frac{x}{(x-1)}=0$ $I.S.=\{-1\}$

70 $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{1+x}=0$ $I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

71 $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4x^2+1}{4x^2-1}=2$ $I.S.=\{-1\}$

72 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2-x}=0$ $\qquad I.S.=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

73 $\frac{3x}{x-2}+\frac{6x}{x^2-4x+4}=\frac{3x^2}{(x-2)^2}$ $\qquad I.S.=\mathbb{R}-\{2\}$

74 $\frac{x-1}{x^2-2x+1}=\frac{2}{2-2x}$ $\qquad I.S.=\emptyset$

75 $1+\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{x-2}+\frac{1-x^2}{x^2-x-2}$ $\qquad I.S.=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

76 $-\frac{3x}{6-2x}+\frac{5x}{10-5x}=\frac{1-x}{4-2x}$ $\qquad I.S.=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

77 $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2-x}=\frac{x+3}{x^2+x-6}$ $\qquad I.S.=\emptyset$

78 $4-x^2=\frac{x^2+5x+6}{x+2}-1$ $\qquad I.S.=\{1\}$

79 $\frac{5}{5x+1}+\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{1-2x}$ $\qquad I.S.=\left\{\frac{2}{25}\right\}$

80 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x^2-x-2}$ $\qquad I.S.=\{\emptyset\}$

81 $\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{6-8x^2}{1-4x^2}$ $\qquad I.S.=\emptyset$

82 $(4x+6)\left(\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=0$ $\qquad I.S.=\left\{-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right\}$

83 $\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{x-5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{x^2}{x^2-5x}=0$ $\qquad I.S.=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

84 $\frac{1+2x}{x^2+2x}+\frac{x^3-6x+1}{x^2-4}=\frac{x^2-2x}{x-2}+\frac{1}{x^2-2x}$ $\qquad I.S.=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$

85 $\frac{1}{3x+2}-\frac{3}{2-x}=\frac{10x+4}{3x^2-4x-4}$ $\qquad \mathbb{R}-\left\{-\frac{2}{3},2\right\}$

86 $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{x-4}=\frac{4x-9}{x^2-x-12}$ $\qquad x=4$ soluzione non accettabile $\qquad I.S.=\{1\}$

87 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)^2}{2(x^2-1)}+1$ $\qquad I.S.=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

88 $\frac{x^2-1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}-x$ $\qquad I.S.=\{1\}$

89 $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+2}=\frac{3x-6}{x^2+5x+6}$ $\qquad I.S.=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

90 $\frac{2x-3}{x+2}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x^2-2x-8}$ $\qquad I.S.=\{2,3\}$

91 $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{1}{x^2+x-2}$ $\qquad I.S.=\emptyset$

92 $\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{12-x}{x^2-1}$ $\qquad I.S.=\{2\}$

93 $\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-1}{x}$ $\qquad I.S.=\{-5,+1\}$

94 $(40-10x^2)^3\cdot\left(\frac{3x-1}{x+2}-\frac{3x}{x+1}\right)=0$ $\qquad I.S.=\left\{2,-\frac{1}{4}\right\}$

95 $\frac{x}{2x+1}+\frac{x+1}{2(x+2)}=\frac{x-1}{2x^2+5x+2}$ $\qquad I.S.=\emptyset$

96 $\dfrac{3x+1}{x^2-9}+\dfrac{2}{3x^2-9x}=\dfrac{3}{x+3}$ $\qquad I.S.=\left\{-\dfrac{3}{16}\right\}$

97 $\dfrac{3(2x-3)}{x^3+27}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x}{x^2-3x+9}$ $\qquad I.S.=\mathbb{R}-\{-3\}$

98 $(x-4)(x+3)=\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-2}$ $\qquad I.S.=\{4,-3,3\}$

99 $\left(1-\dfrac{1}{2}x\right):\left(1+\dfrac{1}{2}x\right)=\left(\dfrac{2x+1}{6x+3}-\dfrac{1}{2}x\right)+\dfrac{x^2}{2x+4}$ $\qquad I.S.=\{4\}$

100 $\dfrac{3x-1}{1-2x}+\dfrac{x}{2x-1}-\dfrac{x^3-8}{x^2-4}:\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+2x+1}=\dfrac{2-3x}{2x-6}\cdot\dfrac{x^2-9}{4-9x^2}-\dfrac{6x+7}{6}$ $\qquad I.S.=\left\{-\dfrac{26}{25}\right\}$

101 $\left(\dfrac{2x}{6x-3}+\dfrac{x}{4-8x}\right)+\left(\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{2x-1}\right)\cdot\dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{8x^2-4x}=\dfrac{x^2(5x-3)}{3(2x+1)(2x-1)^2}$ $\qquad I.S.=\left\{\dfrac{12}{5}\right\}$

102 $\dfrac{3x^2-2x+3}{x^2-3x}+\dfrac{x+2}{3-x}=\left(\dfrac{x+1}{x}-1\right)\left(\dfrac{x^2}{x^3-27}+\dfrac{x}{x-3}\right):\dfrac{3x}{3x^3-81}+\dfrac{x^2-x+2}{3-x}$ $\qquad I.S.=\{-30\}$

103 Osservando i due membri dell'equazione, senza svolgere i calcoli, puoi subito affermare che non esiste alcun numero reale che rende vera l'uguaglianza? $\left(2x-4x^2+7\right)^6=-\dfrac{1}{\left(x^2-5x+7\right)^4}$

104 Due amici A e B partono con le loro automobili nello stesso istante da due località diverse; A fa un viaggio di 100 Km a una certa velocità, B fa un viaggio di 132 Km ad una velocità che supera quella dell'amico di 20 Km/h. I due amici arrivano nello stesso istante all'appuntamento.
Qual è la velocità di A?

Traccia di soluzione
1. Se A e B partono insieme e arrivano insieme significa che hanno impiegato lo stesso tempo per fare il proprio viaggio;
2. il tempo è dato dal rapporto tra lo spazio percorso e la velocità;
3. la velocità di A è l'incognita del problema: la indichiamo con x;
4. l'equazione risolvente è $\dfrac{110}{x}=\dfrac{132}{x+20}$.

Prosegui nella risoluzione.

105 Per percorrere 480Km un treno impiega 3 ore di più di quanto impiegherebbe un aereo a percorrere 1920 Km. L'aereo viaggia ad una velocità media che è 8 volte quella del treno. Qual è la velocità del treno?

►3. Equazioni letterali

Quando si risolvono problemi, ci si ritrova a dover tradurre nel linguaggio simbolico delle proposizioni del tipo: *Un lato di un triangolo scaleno ha lunghezza pari a k volte la lunghezza dell'altro e la loro somma è pari a 2k.*
Poiché la lunghezza del lato del triangolo non è nota, ad essa si attribuisce il valore incognito x e quindi la proposizione viene tradotta dalla seguente equazione: $x+kx = 2k$.
È possibile notare che i coefficienti dell'equazione non sono solamente numerici, ma compare una lettera dell'alfabeto diversa dall'incognita. Qual è il ruolo della lettera k?
Essa prende il nome di **parametro** ed è una costante che rappresenta dei numeri fissi, quindi, può assumere dei valori prefissati. Ogni volta che viene fissato un valore di k, l'equazione precedente assume una diversa forma. Infatti si ha:

Valore di k	Equazione corrispondente
$k=0$	$x=0$
$k=2$	$x+2x=4$
$k=-\frac{1}{2}$	$x-\frac{1}{2}x=-1$

Si può quindi dedurre che il parametro diventa una costante, all'interno dell'equazione nell'incognita x, ogni volta che se ne sceglie il valore.
Si supponga che il parametro k assuma valori all'interno dell'insieme dei numeri reali. Lo scopo è quello di risolvere l'equazione, facendo attenzione a rispettare le condizioni che permettono l'uso dei principi d'equivalenza e che permettono di ridurla in forma normale.
Riprendiamo l'equazione $x+kx = 2k$, raccogliamo a fattore comune la x si ha $(k+1)x=2k$.
Per determinare la soluzione di questa equazione di primo grado, è necessario utilizzare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per il coefficiente $k+1$.
Si ricordi però che il secondo principio ci permette di moltiplicare o dividere i due membri dell'equazione per una stessa espressione, purché questa sia diversa da zero.
Per questa ragione, nella risoluzione dell'equazione $(k+1)x=2k$ è necessario distinguere i due casi:

- se $k+1\neq 0$, cioè se $k\neq -1$, è possibile dividere per $k+1$ e si ha $x=\frac{2k}{k+1}$;
- se $k+1=0$, cioè se $k=-1$, sostituendo tale valore all'equazione si ottiene l'equazione $(-1+1)x=2\cdot(-1)$, cioè $0\cdot x=-2$ che risulta impossibile.

Riassumendo si ha:

$x+kx = 2k$ con $k\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	**Soluzione**	**Equazione**
$k=-1$	nessuna	Impossibile
$k\neq -1$	$x=\frac{2k}{k+1}$	Determinata

Ritorniamo ora al problema sul triangolo isoscele, spesso nell'enunciato del problema sono presenti delle limitazioni implicite che bisogna trovare. Infatti, dovendo essere x un lato del triangolo esso sarà un numero reale positivo. Di conseguenza, dovendo essere l'altro lato uguale a k volte x, il valore di k deve necessariamente essere anch'esso positivo, ovvero $k>0$. Di conseguenza il parametro k non può mai assumere il valore -1 e quindi il problema geometrico ammette sempre una soluzione.

Questa analisi effettuata sui valori che può assumere il parametro k, prende il nome di **discussione dell'equazione**.

Procedura per stabile quando una equazione è determinata, indeterminata, impossibile
In generale, data l'equazione $a\,x+b=0$ si ha $a\,x=-b$ e quindi:

- se $a\neq 0$, l'equazione è **determinata** e ammette l'unica soluzione $x=-\dfrac{b}{a}$;
- se $a=0$ e $b\neq 0$, l'equazione è **impossibile**;
- se $a=0$ e $b=0$, l'equazione è soddisfatta da tutti i valori reali di x, ovvero è **indeterminata**.

Esempio

■ $1+(x+m)=(x+1)^2-x(x+m)$

Dopo aver fatto i calcoli si ottiene l'equazione $(m-1)\cdot x=-m$ e quindi si ha:

- se $m-1\neq 0$, cioè se $m\neq 1$, è possibile dividere ambo i membri per $m-1$ e si ottiene l'unica soluzione $x=-\dfrac{m}{m-1}$;
- se $m-1=0$, cioè se $m=1$, sostituendo nell'equazione il valore 1 si ottiene $0\cdot x=-1$; che risulta impossibile.

106 $(k+3)x=k+4\,x(k+1)$

Effettuando i prodotti si ottiene l'equazione: $(3\,k+1)\,x=-k$ e quindi si ha:

- se ……… ≠ 0, cioè se $k\neq\dfrac{\dots}{\dots}$, è possibile dividere ambo i membri per ……… e si ottiene l'unica soluzione $x=\dfrac{-k}{\dots\dots}$
- se ……… = 0, cioè se $k=\dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$, sostituendo nell'equazione il valore … ... si ottiene $0\cdot x=\dfrac{1}{3}$, che risulta un'equazione impossibile.

107 $a^2\cdot x=a+1+x$

Portiamo al primo membro tutti i monomi che contengono l'incognita $a^2\cdot x-x=a+1$
Raccogliamo a fattore comune l'incognita ed abbiamo la forma canonica dell'equazione $x\cdot\left(a^2-1\right)=a+1$
Il coefficiente dell'incognita è … … …
Il termine noto è … … …
Scomponendo in fattori dove possibile si ha l'equazione $x\cdot(a-1)(a+1)=a+1$
I valori di *a* che annullano il coefficiente dell'incognita sono *a=1* e *a=-1*
Nell'equazione sostituisco a=1, ottengo l'equazione … … … che è indeterminata/impossibile.
Nell'equazione sostituisco a=-1, ottengo l'equazione … … … che è indeterminata/impossibile.
Escludendo i valori del parametro a che annullano il coefficiente della *x* posso applicare il secondo principio di equivalenza delle equazione, posso cioè dividere 1° e 2° membro per *a+1*, ottengo

$x=\dfrac{a+1}{(a+1)\cdot(a-1)}=\dfrac{1}{a-1}$. Pertanto per $a\neq +1\wedge a\neq -1$ l'insieme delle soluzioni è

$I.S.=\left\{\dfrac{1}{a-1}\right\}$.

108 Seguendo i passi descritti e lo svolgimento dell'esempio, risolvi e discuti le seguenti equazioni:

$2\,x-\dfrac{7}{2}=a\,x-5$ $\qquad b^2\,x=2\,b+b\,x$ $\qquad a\,x+x-2\,a^2-2\,a\,x=0$

109 Date le due equazioni $x\cdot(3-5\,a)+2\cdot(a-1)=(a-1)\cdot(a+1)$ *e* $x+2\,a\cdot(x-2\,a)+1=0$,

- Basta la condizione $a\neq -\dfrac{1}{2}$ *et* $a\neq 1$ per affermare che sono equivalenti?
- Esiste un valore di a per cui l'insieme soluzione della prima equazione sia $I.S.=\{0\}$?
- Se a = 0 è vero che entrambe le equazioni hanno $I.S.=\emptyset$?
- Completa: " per $a=\dfrac{1}{2}$ la prima equazione ha come insieme soluzione $I.S.=\{\dots\dots\dots\}$; mentre la seconda ha $I.S.=\{\dots\dots\dots\}$ "

110 Nell'equazione $3\,a\,x-2\,a=x\cdot(1-2\,a)+a\cdot(x-1)$ è sufficiente che sia $a\neq\dfrac{1}{4}$ perché l'insieme delle soluzioni sia contento in $\mathbb{Q}-\{0\}$?

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali nell'incognita x.

111 $1+2x=a+1-2x$ $\quad x=\frac{a}{4}\ \forall a\in\mathbb{R}$

112 $ax+2=x+3$ $\quad$ se $a=1$ $I.S.=\emptyset$; se $a\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$

113 $k(x+2)=k+2$ $\quad$ se $k=0$ $I.S.=\emptyset$; se $k\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2-k}{k}\right\}$

114 $(b+1)(x+1)=0$ $\quad$ se $b=-1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $b\neq -1$ $I.S.=\{-1\}$

115 $k^2x+2k=x+2$ $\quad k=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; $k=-1$ $I.S.=\emptyset$; $k\neq 1\wedge k\neq -1$ $I.S.=\left\{-\frac{2}{k+1}\right\}$

116 $(a-1)(x+1)=x+1$ $\quad$ se $a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 2$ $I.S.=\{-1\}$

117 $(a-1)(x+1)=a-1$ $\quad$ se $a=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 1$ $I.S.=\{0\}$

118 $2k(x+1)-2=k(x+2)$ $\quad$ se $k=0$ $I.S.=\emptyset$; se $k\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2}{k}\right\}$

119 $a(a-1)x=2a(x-5)$ $\quad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{10}{3-a}\right\}$

120 $3ax+a=2a^2-3a$ $\quad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3}\cdot(a-2)\right\}$

121 $3x-a=a(x-3)+6$ $\quad$ se $a=3$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 3$ $I.S.=\{2\}$

122 $2+2x=3ax+a-a^2x$ $\quad a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=1$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 2\wedge a\neq 1$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$

123 $x(a^2-4)=a+2$ $\quad a=2$ $I.S.=\emptyset$; $a=-2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a\neq -2\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a-2}\right\}$

124 $(x-m)(x+m)=(x+1)(x-1)$ $\quad m=1\vee m=-1$ $I.S.=\mathbb{R}$; $m\neq 1\wedge m\neq -1$ $I.S.=\emptyset$

125 $(a-2)^2x+(a-2)x+a-2=0$ $\quad a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=1$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq 1\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{1-a}\right\}$

126 $(9a^2-4)x=2(x+1)$ $\quad a=-\frac{2}{3}\vee a=\frac{2}{3}$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq -\frac{2}{3}\wedge a\neq\frac{2}{3}$ $I.S.=\left\{\frac{2}{3(3a^2-2)}\right\}$

127 $(a-1)x=a^2-1$ $\quad$ se $a=1$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 1$ $I.S.=\{a+1\}$

128 $(a+2)x=a^2+a-1$ $\quad$ se $a=-2$ $I.S.=\emptyset$; se $a\neq -2$ $I.S.=\left\{\frac{a^2+a-1}{a+2}\right\}$

129 $a(x-1)^2=a(x^2-1)+2a$ $\quad$ se $a=0$ $I.S.=\mathbb{R}$; se $a\neq 0$ $I.S.=\{0\}$

130 $a^3x-a^2-4ax+4=0$ $\quad a=-2\vee a=2$ $I.S.=\mathbb{R}$; $a=0$ $I.S.=\emptyset$; $a\neq -2\wedge a\neq 0\wedge a\neq 2$ $I.S.=\left\{\frac{1}{a}\right\}$

131 $bx(b^2+1)-(bx-1)(b^2-1)=2b^2$ $\quad$ se $b=0$ $I.S.=\emptyset$; se $b\neq 0$ $I.S.=\left\{\frac{1+b^2}{2b}\right\}$

Equazioni con due parametri

Esempio

■ $(b+a)x-(b+2)(x+1)=-1$

Mettiamo l'equazione in forma canonica

$bx+ax-bx-b-2x-2=-1$

$(a-2)x=b+1$

- se $a-2=0$ l'equazione è impossibile o indeterminata
  - se $b+1=0$ è indeterminata
  - se $b+1\neq 0$ è impossibile
- se $a-2\neq 0$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x=\frac{b+1}{a-2}$

Riassumendo:

$a=2\wedge b=-1\ \rightarrow\ I.S.=\mathbb{R}$

$a=2\wedge b\neq -1\ \rightarrow\ I.S.=\emptyset$

$a\neq 2\wedge b\neq -1\ \rightarrow\ I.S.=\left\{\frac{b+1}{a-2}\right\}$.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni nell'incognita x con due parametri

132 $(m+1)(n-2)x=0$ $\quad m=-1 \vee n=2 \quad I.S.=\mathbb{R}\,;\, m\neq -1 \wedge n\neq 2 \quad I.S.=\{0\}$

133 $m(x-1)=n$ $\quad m=0 \wedge n\neq 0\; I.S.=\emptyset\,;\, m=0 \wedge n=0\; I.S.=\mathbb{R}\,;\, m\neq 0\; I.S.=\left\{\frac{m+n}{m}\right\}$

134 $(a+1)(b+1)x=0$ $\quad a=-1 \vee b=-1 \quad I.S.=\mathbb{R}\,;\quad a\neq -1 \wedge b\neq -1\; I.S.=\{0\}$

135 $(a+1)x=b+1$ $\quad a=-1 \wedge b=-1 \quad I.S.=\mathbb{R}\,;\quad a=-1 \wedge b\neq -1 \quad I.S.=\emptyset\,;\quad a\neq -1 \quad I.S.=\left\{\frac{b+1}{a+1}\right\}$

136 $(m+n)(x-1)=m-n$ $\quad m=n=0 \quad I.S.\,\mathbb{R}\,;\, m=-n\neq 0 \quad I.S.=\emptyset\,;\, m\neq -n \quad I.S.=\left\{\frac{2\mathrm{m}}{m+n}\right\}$

137 $x(2\mathrm{a}-1)+2\mathrm{b}(x-2)=-4\mathrm{a}-x$ $\quad a=b=0 \quad I.S.\,\mathbb{R}\,;\, a=-b\neq 0 \quad I.S.=\emptyset\,;\, a\neq -b \quad I.S.=\left\{\frac{2(b-a)}{a+b}\right\}$

138 $ax-3+b=2(x+b)$ $\quad \begin{cases} a=2 \wedge b=-3 \text{ eq. ind.} \\ a=2 \wedge b\neq -3 \text{ eq. imp.} \\ a\neq 2 \wedge b\neq -3 \quad x=\dfrac{b+3}{a-2} \end{cases}$

►4. Equazioni letterali con termini frazionari

Nella risoluzione di equazioni letterali con termini frazionari si possono presentare tre casi:

A. Il denominatore contiene solo il parametro

$$\frac{x+a}{2a-1}-\frac{1}{a-2a^2}=\frac{x}{a} \quad \text{con } a\in\mathbb{R}$$

Questa equazione è intera, pur presentando termini frazionari.
Sappiamo che ogni volta che viene fissato un valore per il parametro, l'equazione assume una diversa forma; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme dei numeri reali quei valori che annullano il denominatore. Per $a=0 \vee a=\frac{1}{2}$ si annullano i denominatori quindi l'equazione è priva di significato.
Per poter risolvere l'equazione abbiamo bisogno delle Condizioni di Esistenza $C.E.\; a\neq 0$ et $a\neq\frac{1}{2}$
La rappresentazione con diagrammi di Venn si modifica; dall'insieme R, dei numeri reali, eliminiamo i valori che annullano il denominatore.
Procediamo nella risoluzione, riduciamo allo stesso denominatore ambo i membri dell'equazione:

$$\frac{a\cdot(x+a)+1}{a\cdot(2a-1)}=\frac{x\cdot(2a-1)}{a\cdot(2a-1)} \quad ,$$

applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il m.c.m.; l'equazione diventa: $ax+a^2+1=2ax-x$ che in forma canonica è $x\cdot(a-1)=a^2+1$. Il coefficiente dell'incognita dipende dal valore assegnato al parametro; procediamo quindi alla
<u>Discussione</u>:

- se $a-1\neq 0$ cioè $a\neq 1$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $a-1$ ottenendo $x=\frac{a^2+1}{a-1}$ L'equazione è determinata: $I.S.=\left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$;
- se $a-1=0$ cioè $a=1$ l'equazione diventa $0\cdot x=2$. L'equazione è impossibile: $I.S.=\emptyset$.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$a=0$ vel $a=\frac{1}{2}$		Priva di significato
$a=1$	$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$a\neq 0$ et $a\neq\frac{1}{2}$ et $a\neq 1$	$I.S.=\left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$	Determinata

139 Risolvi e discuti la seguente equazione $\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}=0$

- Scomponendo i denominatori troviamo il m.c.m. = ………………………
- Pertanto se a = …… vel a = ……… il denominatore si annulla e quindi l’equazione è ……………
- Per poter procedere nella risoluzione poni le C.E. a ……. et a …….
- Riduci allo stesso denominatore: $\frac{a^2+2a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(a+2)\cdot(a-2)}$
- Applica il secondo principio per eliminare il denominatore e svolgi i calcoli ……………………………………………………………………………………
- La forma canonica è $2\cdot(\ldots\ldots\ldots)\cdot x=\ldots\ldots\ldots\ldots-4$. Per le C.E. sul parametro il coefficiente dell’incognita è …………… pertanto puoi dividere ……………………. e ottenere I.S. = {...............}.
- L’equazione è ………………………… per qualunque valore di a ………………………………….

Riassumendo si ha:

$\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}$ con $a\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$a=\ldots\ldots\vee a=\ldots\ldots$		Priva di significato
………………………	$I.S.=\left\{\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\right\}$	Determinata

B. il denominatore contiene l’incognita ma non il parametro

$\frac{x+4a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$

Questa equazione è frazionaria o fratta perché nel denominatore compare l’incognita.
Sappiamo che risolvere un’equazione significa determinare quale valore sostituire all’incognita affinché l’uguaglianza tra il primo e il secondo membro sia vera. Non sappiamo determinare tale valore solamente analizzando l’equazione, ma certamente possiamo dire che non dovrà essere x = 0 perché tale valore, annullando i denominatori, rende privi di significato entrambi i membri dell’equazione.
Poniamo allora una condizione sull’incognita: la soluzione è accettabile se $x\neq 0$.
Non abbiamo invece nessuna condizione sul parametro.
Procediamo quindi con la riduzione allo stesso denominatore di ambo i membri dell’equazione
$\frac{2x+8a}{6x}=\frac{6ax-2x-2a}{6x}$; eliminiamo il denominatore che per la condizione posta è diverso da zero.
Eseguiamo i calcoli al numeratore e otteniamo $4x-6ax=-10a$ da cui la forma canonica: $x\cdot(3a-2)=5a$.
Il coefficiente dell’incognita contiene il parametro quindi procediamo alla
Discussione

- se $3a-2\neq 0$ cioè $a\neq\frac{2}{3}$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $3a-2$ ottenendo $x=\frac{5a}{3a-2}$ L’equazione è determinata: $I.S.=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$; la soluzione è accettabile se $x=\frac{5a}{3a-2}\neq 0 \rightarrow a\neq 0$
- se $3a-2=0$ cioè $a=\frac{2}{3}$ l’equazione diventa $0\cdot x=\frac{10}{3}$. L’equazione è impossibile: $I.S.=\emptyset$

Riassumendo si ha la tabella:

$\frac{x+a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
	$x\neq 0$		
$a=\frac{2}{3}$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$a\neq\frac{2}{3}$		$I.S.=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$	Determinata
$a\neq\frac{2}{3}$ et $a\neq 0$		$x=\frac{5a}{3a-2}$ accettabile	

140 Risolvi e discuti la seguente equazione $\frac{3}{x+1}=2a-1$ con $a\in\mathbb{R}$

- Il denominatore contiene l'incognita quindi Soluzione accettabile se x ……..
- Non ci sono invece condizioni sul parametro a.
- Riduci allo stesso denominatore e semplifica l'equazione, ottieni ……………………………………
- La forma canonica dell'equazione è $x\cdot(2a-1)=$……………
- Poiché il coefficiente dell'incognita contiene il parametro bisogna fare la discussione:
  se a = ………… l'equazione è …………………………… e I.S. = ……..
  se a ≠ ………….. l'equazione è ………………………; x = ………………. accettabile se …………..

C. Il denominatore contiene sia il parametro che l'incognita

$$\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x} \quad \text{con } b\in\mathbb{R}$$

L'equazione è fratta; il suo denominatore contiene sia l'incognita che il parametro.

Scomponiamo in fattori i denominatori $\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{x\cdot(b-1)}$

- determiniamo le condizioni di esistenza che coinvolgono il parametro $C.E.\ b\neq 1$;
- determiniamo le condizioni sull'incognita: soluzione accettabile se $x\neq 0$.

Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamolo in quanto per le condizioni poste è diverso da zero.
L'equazione canonica è $x\cdot(2b-1)=b+1$.
Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro quindi occorre fare la discussione:

- se $2b-1\neq 0$ cioè $b\neq\frac{1}{2}$ possiamo dividere ambo i membri per $2b-1$, otteniamo $x=\frac{b+1}{2b-1}$
  L'equazione è determinata, l'insieme delle soluzioni è $I.S.=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$; la soluzione è accettabile se verifica la condizione di esistenza $x\neq 0$ da cui si ha $x=\frac{b+1}{2b-1}\neq 0 \rightarrow b\neq -1$, cioè se b=-1 l'equazione ha una soluzione che non è accettabile, pertanto è impossibile.
- se $2b-1=0$ cioè $b=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{3}{2}$. L'equazione è impossibile, l'insieme delle soluzioni è vuoto: $I.S.=\emptyset$.

La tabella che segue riassume tutti i casi:

$\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x}$ con $b\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$b=1$			Priva di significato
$b\neq 1$	$x\neq 0$		
$b=\frac{1}{2}\vee b=-1$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$		$I.S.=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$	Determinata
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$		$x=\frac{b+1}{2b-1}$ accettabile	

141 Risolvi e discuti la seguente equazione $\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{2a-1}{a+1}$ con $a\in\mathbb{R}$

<u>Svolgimento</u> Il denominatore contiene l'incognita quindi Soluzione accettabile se ………
Ma contiene anche il parametro, quindi C.E. …….
Se a = …….. l'equazione è priva di significato.
Determina il m.c.m. e riduci allo stesso denominatore ……………………………………
Semplifica ………………………………………………………………………..
Ottieni la forma canonica $x\cdot(4-2a)=\ldots\ldots\ldots$
Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro, quindi bisogna fare la discussione:

- se a = ………… l'equazione è ………………………… I.S. =
- se a ≠ ………….. l'equazione è ………………………; x = ………………. accettabile se $\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\neq\frac{1}{2}$ quindi risolvendo rispetto alla lettera a si ha la condizione …………

$\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{2a-1}{a+1}$ con $a\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
$a=\ldots\ldots\ldots$			Priva di significato
$a\neq\ldots\ldots\ldots$	$x\neq\ldots\ldots\ldots$		
$a=\ldots\ldots\ldots$		$I.S.=\emptyset$	… … … … …
… … … … …		$I.S.=\left\{\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\right\}$	determinata
$a\neq\ldots\ldots\wedge a\neq\ldots\ldots$		$x=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ accettabile	

142 Risolvi l'equazione $\frac{2x+1}{x}+\frac{2x^2-3b^2}{bx-x^2}=\frac{1}{x-b}$ con $b\in\mathbb{R}$ e completa la tabella:

Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
	$x\neq\ldots\ldots\ldots$		
		$I.S.=\emptyset$	$\ldots\ldots\ldots$
		$I.S.=\left\{\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}\right\}$	Determinata
		$x=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ accettabile	

143 Assegna il valore di verità alla seguente proposizione: "L'equazione $\frac{x-1}{x+a}=2+\frac{1-x}{x-a}$ con $a\in\mathbb{R}$ è determinata per qualunque valore reale del parametro e la sua soluzione è accettabile se $a\neq 0$ ".

144 Risolvi e discuti la seguente equazione $\frac{a}{x+1}=\frac{3}{x-2}$ con $a\in\mathbb{R}$. Basta la condizione $a\neq 3$ perché la sua soluzione sia accettabile?

145 Attribuisci il valore di verità alla seguente proposizione: "Bastano le $C.E.\ a\neq 0\wedge a\neq\frac{1}{2}$ perché l'equazione $\frac{x}{2a}+\frac{x+1}{1-2a}=\frac{1}{a}$ sia determinata".

146 Correggi gli eventuali errori contenuti nella tabella riassuntiva della discussione

$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{bx}{1-x^2}+\frac{a+2x^2}{x^2-1}$ con $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\mathbb{R}$			
Condizioni sul parametro	**Condizioni sull'incognita**	**Insieme Soluzione**	**Equazione**
	$x\neq 1$ et $x\neq -1$		
$b=0$ et $a=0$		$I.S=\mathbb{R}$	Indeterminata
$b\neq 0$ et $a=0$		$I.S.=\emptyset$	Impossibile
$b\neq 0$		$I.S.=\left\{\frac{a}{b}\right\}$	Determinata
$a=b\quad a=-b$		$x=\frac{a}{b}$ accettabile	

Risolvi e discuti le seguenti equazioni che presentano il parametro al denominatore

147 $\frac{x+2}{6a}+\frac{x-1}{2a^2}=\frac{1}{3a}$ $\left\{\begin{array}{l} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-3\ \ I.S.=\emptyset \\ a\neq 0\wedge a\neq -3\ I.S.=\left\{\frac{3}{a+3}\right\}\end{array}\right\}$

148 $\frac{x-1}{b}+\frac{2x+3}{4b}=\frac{x}{4}$ $\left\{\begin{array}{l} b=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ b=6\ \ I.S.=\emptyset \\ b\neq 0\wedge b\neq 6\ \ I.S.=\left\{\frac{1}{6-b}\right\}\end{array}\right\}$

149 $\frac{2x-1}{3a}+\frac{x}{3}=\frac{2}{a}$ $\begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq -2 \quad I.S.=\left\{\frac{7}{2+a}\right\} \end{cases}$

150 $\frac{x}{a}+\frac{2x}{2-a}=\frac{a-x+2}{2a-a^2}$ $\begin{cases} a=0 \vee a=2 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq -3 \quad I.S.=\left\{\frac{a+2}{a+3}\right\} \end{cases}$

151 $\frac{x}{a-1}+8=4a-\frac{x}{a-3}$ $\begin{cases} a=1 \vee a=3 \quad \text{equaz. priva di significato} \\ a\neq 1 \wedge a\neq 3 \; I.S.=\{(a-1)(a-3)\} \end{cases}$

152 $\frac{x-1}{a-1}+\frac{x+a}{a}=\frac{a-1}{a}$ $\begin{cases} a=0 \vee a=1 \quad \text{equaz. priva di signif.} \\ a=\frac{1}{2} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 \wedge a\neq \frac{1}{2} \wedge a\neq 1 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{2a-1}\right\} \end{cases}$

153 $\frac{x+2}{a^2-2a}+\frac{x}{a^2+2a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a^2-4}$ $\begin{cases} a=0 \vee a=-2 \vee a=+2 \text{ priva di signif.} \\ a\neq 0 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq +2 \quad I.S.=\left\{-\frac{a}{2}\right\} \end{cases}$

154 $\frac{x+1}{a^2+2a+1}+\frac{2x+1}{a^2-a-2}-\frac{2x}{(a+1)(a-2)}+\frac{1}{a-2}=0$ $\begin{cases} a=2 \vee a=-1 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a\neq 2 \wedge a\neq -1 \quad I.S.\left\{\frac{a(a+4)}{2-a}\right\} \end{cases}$

155 $\frac{x+1}{a-5}+\frac{2x-1}{a-2}=\frac{2}{a^2-7a+10}$ $\begin{cases} a=5 \vee a=2 \text{ equaz. priva di signif.} \\ a=4 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 5 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq 4 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{3(4-a)}\right\} \end{cases}$

156 $\frac{x+2}{b-2}+\frac{2}{b^2-4b+4}+\left(\frac{1}{b-2}+\frac{x}{b-1}\right)\cdot(b-1)=0$ $\begin{cases} b=2 \vee b=1 \text{ equaz. priva di significato} \\ b\neq 2 \wedge b\neq 1 \quad I.S.\left\{\frac{b}{2-b}\right\} \end{cases}$

157 $\frac{x-2}{t^2+3t}+\frac{x-1}{t+3}=\frac{x-2}{t^2}+\frac{1}{t+3}$ $\begin{cases} t=0 \vee t=-3 \text{ equaz. priva di significato} \\ t^2=3 \quad I.S.=\mathbb{R} \\ t\neq 0 \wedge t\neq -3 \wedge t^2\neq 3 \quad I.S.=\{2\} \end{cases}$

158 $\frac{3+b^3x}{7b^2-b^3}+\frac{(2b^2+b)x+1}{b(b-7)}=\frac{3b^2x+1}{b^2}-2x$ $\begin{cases} b=0 \vee b=7 \text{ equaz. priva di significato} \\ b\neq 0 \wedge b\neq 7 \quad I.S.=\left\{-\frac{1}{2b^2}\right\} \end{cases}$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni frazionarie con il parametro

159 $\frac{x+m}{x+1}=1$ $\begin{cases} m=1 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{-1\} \\ m\neq 1 \quad I.S.=\emptyset \end{cases}$

160 $\frac{2a-x}{x-3}-\frac{ax+2}{9-3x}=0$ $\begin{cases} a=3 \vee a=\frac{7}{9} \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 3 \wedge a\neq \frac{7}{9} \quad I.S.=\left\{\frac{2(3a+1)}{3-a}\right\} \end{cases}$

161 $\frac{t-1}{x-2}=2t$ $\begin{cases} t=0 \vee t=1 \quad I.S.=\emptyset \\ t\neq 0 \wedge t\neq 1 \quad I.S.=\left\{\frac{5t-1}{2t}\right\} \end{cases}$

162 $\frac{k}{x+1}=\frac{2k}{x-1}$ $\begin{cases} k=0 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{1,-1\} \\ k\neq 0 \quad I.S.=\{-3\} \end{cases}$

163 $\frac{a-1}{x+3}-\frac{a}{2-x}=\frac{ax+a^2}{x^2+x-6}$ $\begin{cases} a=1 \quad I.S.=\mathbb{R}-\{-3,2\} \\ a=3 \vee a=2 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 1 \wedge a\neq 3 \quad I.S.=\{-a\} \end{cases}$

164 $\frac{a+1}{x+1}-\frac{2a}{x-2}=\frac{3-5a}{x^2-x-2}$ $\quad \begin{cases} a=1 \vee a=-3 \vee a=3 & I.S.=\emptyset \\ a\neq -3 \wedge a\neq 1 \wedge a\neq 3 & I.S.=\left\{\frac{5-a}{1-a}\right\} \end{cases}$

165 $\frac{x-a}{x^2-1}-\frac{x+3a}{2x-x^2-1}=\frac{x+5}{x+1}-\frac{2x}{(x-1)^2}-1$ $\quad \begin{cases} a=1 \vee a=-5 \vee a=-1 \vee a=7 & I.S.=\emptyset \\ a\neq -5 \wedge a\neq -1 \wedge a\neq 7 & I.S.=\left\{\frac{2(a-1)}{a+5}\right\} \end{cases}$

166 $\frac{3}{1+3x}+\frac{a}{3x-1}=\frac{a-5x}{1-9x^2}$ $\quad \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \vee a=\frac{5}{9} \vee a=\frac{13}{3} & I.S.=\emptyset \\ a\neq -\frac{4}{3} \wedge a\neq \frac{5}{9} \wedge a\neq \frac{13}{3} & I.S.=\left\{\frac{3-2a}{4+3a}\right\} \end{cases}$

167 $\frac{2a}{x^2-x-2}+\frac{1}{3x^2+2x-1}=\frac{6a^2-13a-4}{3x^3-4x^2-5x+2}$ $\quad \begin{cases} a=-\frac{1}{6} & I.S.=\mathbb{R}-\left\{-1,2,\frac{1}{3}\right\} \\ a=\frac{7}{3} \vee a=4 \vee a=1 & I.S.=\emptyset \\ a\neq -\frac{1}{6} \wedge a\neq \frac{7}{3} \wedge a\neq 4 \wedge a\neq 1 & I.S.=\{a-2\} \end{cases}$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni frazionarie con il parametro al denominatore

168 $\frac{a}{x}=\frac{1}{a}$ $\quad \begin{cases} a=0 \text{ equaz. priva di significato} \\ a\neq 0 \quad I.S.=\{a^2\} \end{cases}$

169 $\frac{a}{x+a}=1+a$ $\quad \begin{cases} a=-1 \vee a=0 & I.S.=\emptyset \\ a\neq -1 \wedge a\neq 0 & I.S.=\left\{-\frac{a^2}{1+a}\right\} \end{cases}$

170 $\frac{x+a}{x-a}=\frac{x-a}{x+a}$ $\quad \begin{cases} a=0 & I.S.=\mathbb{R}-\{0\} \\ a\neq 0 & I.S.=\{0\} \end{cases}$

171 $\frac{2}{1-ax}+\frac{1}{2+ax}=0$ $\quad \begin{cases} a=0 & I.S.=\emptyset \\ a\neq 0 & I.S.=\left\{-\frac{5}{a}\right\} \end{cases}$

172 $\frac{2}{x-2}+\frac{a+1}{a-1}=0$ $\quad \begin{cases} a=1 \text{ equaz. priva di significato} \\ a=-1 \quad I.S.=\emptyset \\ a\neq 1 \wedge a\neq -1 \quad I.S.=\left\{\frac{4}{a+1}\right\} \end{cases}$

173 $\frac{1}{x+t}-\frac{1}{t+1}=\frac{tx}{tx+x+t^2+t}$ $\quad \begin{cases} t=-1 \text{ equazione priva di significato} \\ t^2+t-1=0 \quad I.S.=\emptyset \\ t^2+t-1\neq 0 \quad I.S.=\left\{\frac{1}{t+1}\right\} \end{cases}$

174 $\frac{tx}{x-2}+\frac{t^2}{t+1}-\frac{t}{x-2}=0$ $\quad \begin{cases} t=-1 \text{ equaz. priva di significato} \\ t=0 \quad I.S. \mathbb{R}-\{2\} \\ t=-\frac{1}{2} \vee t=-3 \quad I.S.=\emptyset \\ t\neq -3,-\frac{1}{2},-1,0 \quad I.S.=\left\{\frac{3t+1}{2t+1}\right\} \end{cases}$

►5. Equazioni letterali e formule inverse

Le formule di geometria, di matematica finanziaria e di fisica possono essere viste come equazioni letterali. I due principi di equivalenza delle equazioni permettono di ricavare le cosiddette formule inverse, ossia di risolvere un'equazione letterale rispetto a una delle qualsiasi lettere incognite che vi compaiono.

Esempi

- Area del triangolo $A=\frac{b\cdot h}{2}$

Questa equazione è stata risolto rispetto all'incognita A, ossia se sono note le misure della base b e dell'altezza h è possibile ottenere il valore dell'area A.
E' possibile risolvere l'equazione rispetto a un'altra lettera pensata come incognita.
Note le misure di A e di B ricaviamo h. Per il primo principio di equivalenza moltiplichiamo per 2 entrambi i membri dell'equazione $A=\frac{b\cdot h}{2}\rightarrow 2\mathrm{A}=b\cdot h$ dividiamo per b entrambi i membri $\frac{2\mathrm{A}}{b}=h$, ora basta invertire primo e secondo membro:
$h=\frac{2\mathrm{A}}{b}$.

- Formula del montante $M=C(1+it)$

Depositando un capitale C viene depositato per un periodo di tempo t in anni, al quale è applicato un tasso di interesse annuo i, si ha diritto al montante M.
Risolviamo l'equazione rispetto al tasso di interesse i, ossia supponiamo di conoscere il capitale depositato C, il montante M ricevuto alla fine del periodo t e ricaviamo il tasso di interesse che ci è stato applicato.
Partendo da $M=C(1+it)$, dividiamo primo e secondo membro per C, otteniamo $\frac{M}{C}=1+it$;
sottraiamo 1 al primo e al secondo membro, otteniamo $\frac{M}{C}-1=it$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo $i=\frac{\left(\frac{M}{C}-1\right)}{t}$ che possiamo riscrivere come $i=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{M}{C}-1\right)$ oppure $i=\frac{M-C}{t\cdot C}$.

- Formula del moto rettilineo uniforme $s=s_0+v\cdot t$

Un corpo in una posizione s_0, viaggiando alla velocità costante *v*, raggiunge dopo un intervallo di tempo *t* la posizione *s*.
Calcoliamo v supponendo note le altre misure.
Partendo dalla formula $s=s_0+v\cdot t$ sottraiamo ad ambo i membri s_0, otteniamo $s-s_0=v\cdot t$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo $\frac{s-s_0}{t}=v$.

Ricava dalle seguenti formule le formule inverse richieste:

175 $I=C\cdot i\cdot t$
Interesse *I* maturato da un capitale *C*, al tasso di interesse annuo *i*, per un numero di anni *t*.
Ricava C = … … i = … … t = … …

176 $V_a=V_n\cdot(1-i\cdot t)$
Valore attuale V_a di una rendita che vale V_n dopo *n* anni, anticipata di *t* anni al tasso di interesse *i*.
Ricava V_n = … … i = … … t = … …

177 $S=\frac{M\cdot i\cdot t}{1+i\cdot t}$
Sconto semplice. Ricava M = … … i = … …

178 $S=\frac{1}{2}\cdot(B+b)\cdot h$
Superficie *S* di un trapezio di base maggiore *B*, base minore *b*, altezza *h*.
Ricava B = … … b = … … h = … …

179 $S_l=\frac{(2\mathrm{p}+2\mathrm{p}')\cdot a}{2}$

Superficie laterale S_l di un tronco di piramide con perimetro della base maggiore *2p*, perimetro della base minore *2p'*, apotema *a* (attenzione *2p* e *2p'* sono da considerare come un'unica incognita).
Ricava 2p = … … 2p' = … … a = … ...

180 $V=\pi\cdot h^2\cdot\left(r-\frac{h}{3}\right)$

Volume *V* del segmento sferico a una base di raggio *r* e altezza *h*. Ricava r = … …

181 $S=\pi\cdot r\cdot(r+a)$

Superficie totale *S* del cono di raggio di base *r* e apotema *a*. Ricava a = … …

182 $v=v_0+a\cdot t$

Velocità nel moto rettilineo uniforme. Ricava v_0 = … … a = … … t = … …

183 $s=s_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$

Spazio percorso nel moto rettilineo uniformemente accelerato. Ricava v_0 = … … a = … ...

184 $p+\rho\cdot g\cdot h+\frac{1}{2}\rho\cdot v^2=k$

Formula di Bernoulli relativa al moto di un fluido. Ricava h = … … ρ = … …

185 $V=V_0\cdot(1+\alpha\cdot t)$

Legge di Gay-Lussac per i gas. Ricava V_0 = … … t = … …

186 $pV=nRT$

Equazione di stato dei gas perfetti. Ricava V = … … T = … …

187 $\eta=1-\frac{T_1}{T_2}$

Rendimento del ciclo di Carnot. Ricava T_1 = … … T_2 = … ...

188 $P_B=P_A+\rho\cdot g\cdot(z_A-z_B)$

Legge di Stevino. Ricava ρ = … … z_A = … … z_B = … …

Risolvi le seguenti equazioni rispetto alla lettera richiesta:

189 $(m-1)x=m-3$ m = … …

190 $\frac{2}{x+2}+\frac{a-1}{a+1}=0$ a = … …

191 $(a+1)(b-1)x=0$ b = … …

192 $\frac{x}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{b}{a^2-b^2}$ risolvi nell'incognita *a* e poi in *x* $R.\left[a=\frac{b(b+1)}{2x-b};\ x=\frac{b(a+b+1)}{2a}\right]$

193 $\frac{2x}{a+b}+\frac{bx}{a^2-b^2}-\frac{1}{a-b}=0$ risolvi rispetto ad *a* e poi rispetto a *b*

$R.\left[a=\frac{b(x+1)}{2x-1};b=\frac{a(2x-1)}{x+1}\right]$

2. DISEQUAZIONI

►1. Intervalli sulla retta reale

DEFINIZIONE.
Dati due numeri reali a e b, con a < b, si chiamano **intervalli**, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervallo limitato aperto, a e b sono esclusi;
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ intervallo limitato chiuso, a e b sono inclusi;
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra, a è incluso, b è escluso;
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra, a è escluso, b è incluso;
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ intervallo superiormente illimitato aperto, a è escluso;
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ intervallo superiormente illimitato chiuso, a è incluso;
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ intervallo inferiormente illimitato aperto, a è escluso;
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ intervallo inferiormente illimitato chiuso, a è escluso.

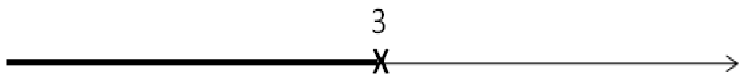
I numeri a e b si chiamano **estremi** dell'intervallo.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: ogni numero reale ha per immagine un punto della retta e viceversa ogni punto della retta è immagine di un numero reale. Di conseguenza ognuno degli intervalli sopra definiti ha per immagine una semiretta o un segmento, precisamente gli intervalli limitati corrispondono a segmenti e quelli illimitati a semirette. Vediamo con degli esempi come si rappresentano i diversi tipi di intervalli.

Esempi

■ $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ intervallo illimitato inferiormente $H = (-\infty, 3)$

L'insieme H è rappresentato da tutti i punti della semiretta che precedono il punto immagine del numero 3, esclusa l'origine della semiretta. Nella figura, la semiretta dei punti che appartengono ad H è stata disegnata con una linea più spessa; per mettere in evidenza che il punto immagine di 3 non appartiene alla semiretta abbiamo messo una crocetta sul punto.



■ $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$ intervallo illimitato superiormente chiuso a sinistra $H = [-5, +\infty)$

Segniamo sulla retta r il punto immagine di -5; l'insieme P è rappresentato dalla semiretta di tutti i punti che seguono -5, compreso lo stesso -5. Nel disegno, la semiretta dei punti che appartengono a P è stata disegnata con una linea più spessa, per indicare che il punto -5 appartiene all'intervallo abbiamo messo un pallino pieno sul punto.

■ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 6\}$ intervallo limitato aperto $D = (-2, 6)$

Segniamo sulla retta reale i punti immagine degli estremi del segmento, -2 e 6. L'insieme D è rappresentato dal segmento che ha per estremi questi due punti. Nel disegno il segmento è stato disegnato con una linea più spessa, i due estremi del segmento sono esclusi, pertanto su ciascuno di essi abbiamo messo una crocetta.

■ $T = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 6\}$ intervallo limitato chiuso a destra $T = (-2, 6]$.

Rispetto al caso precedente, il segmento che rappresenta l'insieme T è chiuso a destra, ossia è incluso nell'intervallo anche il 6, è escluso invece il punto -2.

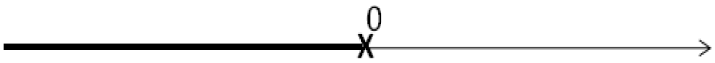
- $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\leq x\leq 6\}$ intervallo chiuso e limitato $S=[2,6]$

Il segmento che rappresenta l'insieme S contiene tutti e due i suoi estremi:

Altri particolari sottoinsiemi dei numeri reali sono

- $\mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$ semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri positi:

- $\mathbb{R}^{-}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0\}$ semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri reali negativi

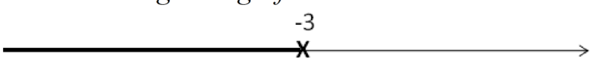


Il punto 0 non appartiene a nessuna delle due semirette; il numero zero non appartiene né a $\mathbb{R}^{+}$ né a $\mathbb{R}^{-}$
$\mathbb{R}=\mathbb{R}^{+}\cup\mathbb{R}^{-}\cup\{0\}$.

- $\mathbb{R}_0^{+}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 0\}$
- $\mathbb{R}_0^{-}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq 0\}$

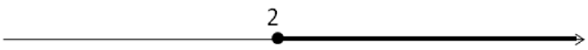
Per ciascuno dei seguenti grafici determina la scrittura corretta

194



[A] $x<-3$ [B] $x>-3$ [C] $x\leq -3$ [D] $x\leq -3$

195



[A] $x<2$ [B] $x>2$ [C] $x\leq 2$ [D] $x\leq 2$

196

[A] $x<+2$ [B] $x>-2$ [C] $-2\leq x\leq 2$ [D] $-2<x<2$

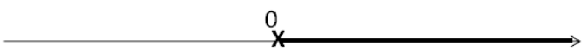
197

[A] $x<5\,;\,x>3$ [B] $3>x\geq 5$ [C] $3\leq x<5$ [D] $3<x\leq 5$

198

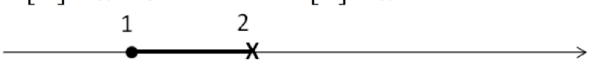
[A] $\mathbb{R}^{-}-\{-1\}$ [B] $-1\geq x\geq 0$ [C] $-1\leq x\leq 0$ [D] $0<x<-1$

199



[A] $x>0$ [B] $x>-\infty$ [C] $x\leq 0$ [D] $0<x\leq 0$

200



[A] $x\geq 1\,;\,x<2$ [B] $1\leq x<2$ [C] $x\leq 1\;e\;x>2$ [D] $2\geq 1$

►2. Disequazioni numeriche

Consideriamo le seguenti proposizioni:

A) 5 è minore di 12
B) 48-90 è maggiore di 30
C) il quadrato di un numero reale è maggiore o uguale a zero
D) sommando ad un numero la sua metà si ottiene un numero minore o uguale a 1

esse possono essere tradotte in linguaggio matematico usando i simboli > (maggiore) , < (minore) , ≥ (maggiore o uguale) ; ≤ (minore o uguale) e precisamente :

A) $5<12$ B) $48-90>30$ C) $x^2\geq 0$ D) $x+\frac{1}{2}x\leq 1$

Le formule che contengono variabili si dicono aperte; quelle che contengono solo numeri si dicono chiuse. Quindi A) e B) sono formule chiuse; C) e D) sono formule aperte.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **disuguaglianza** una formula chiusa costruita con uno dei predicati < (essere minore) ; > (essere maggiore) ; ≤ (essere minore o uguale) ; ≥ (essere maggiore o uguale).

Di essa sappiamo subito stabilire il valore di verità, quando è stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate.

DEFINIZIONE. Chiamiamo **disequazione** una formula aperta, definita in R e costruita con uno dei seguenti predicati: < (essere minore) ; > (essere maggiore) ; ≤ (essere minore o uguale) ; ≥ (essere maggiore o uguale).

Analogamente a quanto detto per le equazioni, chiamiamo **incognite** le variabili che compaiono nella disequazione, **primo membro** e **secondo membro** le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di disuguaglianza.

Esempi

- In N, la formula $5>0$ è una disuguaglianza VERA
- In Z, la formula $-6>-4$ è una disuguaglianza FALSA
- La formula $5x>0$ è una disequazione; quando all'incognita sostituiamo un numero essa si trasforma in una disuguaglianza e solo allora possiamo stabilirne il valore di verità. Nel caso proposto è VERA se sostituiamo alla variabile un qualunque numero positivo, FALSA se sostituiamo zero o un numero negativo.

201 Completa la seguente tabella indicando con una crocetta il tipo di disuguaglianza o disequazione:

Proposizione	Disuguaglianza		Disequazione
	VERA	FALSA	
Il doppio di un numero reale è minore del suo triplo aumentato di 1			
La somma del quadrato di 4 con 3 è maggiore della somma del quadrato di 3 con 4			
Il quadrato della somma di 4 con 3 è minore o uguale a 49			
In $\mathbb{Z}:(5+8)-(2)^4>0$			
$-x^2>0$			
$(x+6)^2\cdot(1-9)\cdot(x+3-9)<0$			

DEFINIZIONE. L'insieme dei valori che sostituiti all'incognita trasformano la disequazione in una disuguaglianza vera, è l'**insieme soluzione (I.S.)** della disequazione.

►3. Ricerca dell’insieme soluzione di una disequazione

Alcune volte l’I.S. si può semplicemente trovare ragionando sulla forma della disequazione.

Esempi

Analizziamo le seguenti disequazioni in R:

- $3 \cdot x \geq 0$ si cercano quei valori da attribuire all’incognita che moltiplicati per 3 diano un prodotto positivo o nullo. Per le regole dei segni e per la legge di annullamento del prodotto, il numero x deve essere maggiore o uguale a 0: $I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- $x^2 + 1 < 0$ si cercano i valori che rendono la somma del loro quadrato con 1 un numero negativo. Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, al più nullo se il numero è zero, aggiungendo ad esso 1, non troveremo mai un risultato negativo: $I.S. = \emptyset$.
- $-x^2 \leq 0$ il primo membro è l’opposto del quadrato di un numero; poiché il quadrato è sempre positivo o nullo, la disequazione è verificata per qualunque numero reale: $I.S. = \mathbb{R}$.
- $\dfrac{1}{x} < 0$ il primo membro è l’inverso di un numero reale; tale operazione ha significato per qualunque numero tranne che per 0, $\dfrac{1}{0}$ infatti è priva di significato. La frazione $\dfrac{1}{x}$ è negativa per qualunque valore negativo attribuito alla incognita: $I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \mathbb{R}^-$.

In questo paragrafo affronteremo disequazioni in una sola incognita, che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, avrà l'incognita al primo grado e i cui coefficienti sono numeri reali.
La forma più semplice o **forma canonica** di una disequazione di primo grado in una sola incognita a coefficienti reali è una delle seguenti $ax > b$; $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$ con a e b numeri reali.
Per condurre una disequazione alla forma canonica e quindi per determinare il suo I.S. si procede applicando dei principi analoghi a quelli delle equazioni.
Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

PRIMO PRINCIPIO. Addizionando o sottraendo a ciascuno dei due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per qualunque valore attribuito all’incognita), si ottiene una disequazione equivalente alla data.

Regola pratica: questo principio ci permette di “spostare” un addendo da un membro all’altro cambiandogli segno o di “eliminare” da entrambi i membri gli addendi uguali.

SECONDO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero positivo o per una stessa espressione (definita e positiva per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data.

TERZO PRINCIPIO. Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero negativo o per una stessa espressione (definita e negativa per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data ma con il verso cambiato.

Esempi

- $4 \cdot (2x - 1) + 5 > 1 - 2 \cdot (-3x - 6)$

1° passo: eseguiamo i prodotti $8x - 4 + 5 > 1 + 6x + 12$
2° passo: spostiamo tutti termini con l’incognita nel primo membro e i termini noti nel secondo membro, cambiamo i segni quando passiamo da un membro all'altro: $8x - 6x > 1 + 12 + 4 - 5$
3° passo: sommando i termini simili si ottiene la forma canonica $2x > 12$
4° passo: applichiamo il secondo principio dividendo ambo i membri per il coefficiente della x. E' Fondamentale a questo punto osservare che il coefficiente è 2, che è un numero positivo, pertanto non

cambia il verso della disequazione $\frac{2}{2}x > \frac{12}{2} \rightarrow x > 6$. Se viceversa il coefficiente dell'incognita fosse stato un numero negativo si sarebbe dovuto cambiare il verso della disequazione.
5° passo: scriviamo l'insieme delle soluzioni $I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\} = (6, +\infty)$ e rappresentiamo graficamente l'intervallo

■ $\frac{3}{2} \cdot (x+1) - \frac{1}{3} \cdot (1-x) < x+2$

1° passo: eseguiamo i prodotti $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x < x+2$
2° passo: il m.c.m.(2,3) = 6, per il secondo principio moltiplichiamo ambo i membri per 6 (numero positivo):
$6 \cdot \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x\right) < 6 \cdot (x+2) \rightarrow 9x + 9 - 2 + 2x < 6x + 12$
3° passo: sommiamo i termini simili, portiamo i monomi con l'incognita al primo membro, i termini noti al secondo membro: $11x - 6x < 12 - 7 \rightarrow 5x < 5$
4° passo: per il secondo principio dividiamo ambo i membri per il coefficiente positivo 5:
$5x < 5 \rightarrow \frac{5}{5}x < \frac{5}{5} \rightarrow x < 1$
5° passo: $I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1)$ la rappresentazione grafica è:

202 Determina e rappresenta l'I.S. della seguente disequazione: $1 - (2x-4)^2 > -x \cdot (4x+1) + 2$

1° passo: esegui i prodotti … … … … … … … … … … … … … … … …

2° passo: la forma canonica è $\dots\dots > 17$

3° passo: dividendo per … … si ottiene $x > \dots$

4° passo: I.S. = {… … … … ….} la cui rappresentazione è ………………………………………………>

<u>Esempio</u>

■ $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{2+3x}{2} > \frac{(x-1)^2}{4}$

Il m.c.m. è 4 numero positivo, moltiplichiamo per 4
$4 \cdot \left\{\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{2+3x}{2}\right\} > \frac{4 \cdot (x-1)^2}{4}$
$(x+1)^2 - 2 \cdot (2+3x) > (x-1)^2$
Eseguiamo i prodotti
$x^2 + 2x + 1 - 4 - 6x > x^2 - 2x + 1$
Eliminiamo dai due membri i termini uguali x^2 e 1, trasportiamo a sinistra i monomi con l'incognita e a destra i termini noti; infine sommiamo i monomi simili:
$\cancel{x^2} + 2x + 1 - 4 - 6x > \cancel{x^2} - 2x + 1 \rightarrow 2x + 2x - 6x > +4 \rightarrow -2x > 4$
Il coefficiente dell'incognita è negativo, applicando il terzo principio dividiamo ambo i membri per -2 e cambiamo il verso della disuguaglianza:
$\frac{-2}{-2}x < \frac{4}{-2} \rightarrow x < -2$

$I.S. = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\} = (-\infty, -2)$

<u>Osservazione</u>: giunti alla forma $-2x > 4$ potevano trasportare a destra del segno di disuguaglianza il monomio con l'incognita e a sinistra mettere il termine noto; ovviamente per il primo principio spostando questi termini cambiano segno e otteniamo $-4 > 2x$. Il coefficiente dell'incognita è positivo dunque applichiamo il secondo principio dividendo per 2, abbiamo $\frac{-4}{2} > \frac{2}{2}x \rightarrow -2 > x$, che letta da destra a

sinistra dice che i valori da attribuire ad x per soddisfare la disequazione assegnata sono tutti i numeri reali minori di -2.

Vediamo qualche esempio in cui scompare l'incognita

Esempi

- $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x>\frac{1}{2}\cdot(3-x)$

Il m.c.m. è 2, positivo; moltiplichiamo ambo i membri per 2; svolgiamo i calcoli:

$2\cdot\left(\frac{1}{2}(x+5)-x\right)>2\cdot\left(\frac{1}{2}(3-x)\right) \rightarrow x+5-2x>3-x \rightarrow -x+5>3-x$

La forma canonica è $0\cdot x>-2$ che si riduce alla disuguaglianza $0>-2$ vera per qualunque x reale: $I.S.=\mathbb{R}$

- $\frac{1}{2}\cdot(x+5)-x>\frac{1}{2}\cdot(3-x)$

Svolgiamo i calcoli ed eliminiamo i monomi simili: $x^2+4x+4-4x-4<x^2-1 \rightarrow 0\cdot x<-1$ che è la disuguaglianza $0<-1$ falsa per qualunque x reale: $I.S.=\emptyset$

203 Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

$x-2>0$	$x+5>0$	$x-4>0$
$x-5\geq 0$	$x+3\leq 0$	$x>0$
$x\geq 0$	$x<0$	$3>x$

Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni

204	$3-x>x$	$I.S.=\left\{x<\frac{3}{2}\right\}$	$2x>3$	$I.S.=\left\{x>\frac{3}{2}\right\}$
205	$3x\leq 4$	$I.S.=\left\{x\leq\frac{4}{3}\right\}$	$5x\geq -4$	$I.S.=\left\{x\geq -\frac{4}{5}\right\}$
206	$x^2+x^4+10>0$	$I.S.=\mathbb{R}$	$x^2+x^4+100<0$	$I.S.=\emptyset$
207	$-x+3>0$	$I.S.=\{x<3\}$	$-x-3\leq 0$	$I.S.=\{x\geq -3\}$
208	$3+2x\geq 3x+2$	$I.S.=\{x\leq 1\}$	$5x-4\geq 6x-4$	$I.S.=\{x\leq 0\}$
209	$-3x+2\geq -x-8$	$I.S.=\{x\leq 5\}$	$4x+4\geq 2(2x+8)$	$I.S.=\emptyset$
210	$4x+4\geq 2(2x+1)$	$I.S.=\mathbb{R}$	$4x+4\geq 2(2x+2)$	$I.S.=\mathbb{R}$
211	$4x+4<2(2x+3)$	$I.S.=\emptyset$	$4x+4>2(2x+2)$	$I.S.=\emptyset$
212	$4x+4<2(2x+2)$	$I.S.=\emptyset$	$x^2+4>3$	$I.S.=\mathbb{R}$
213	$x^2+3<-1$	$I.S.=\emptyset$	$4x+4\geq 3\left(x+\frac{4}{3}\right)$	$I.S.=\{x\geq 0\}$
214	$-3x>0$	$I.S.=\{x<0\}$	$-3x\leq 0$	$I.S.=\{x\geq 0\}$
215	$-3x+5\geq 0$	$I.S.=\left\{x\leq\frac{5}{3}\right\}$	$-3x-8\geq 0$	$I.S.=\left\{x\leq -\frac{8}{3}\right\}$
216	$-3x-8\geq 2$	$I.S.=\left\{x\leq -\frac{10}{3}\right\}$	$-\frac{4}{3}x\geq 1$	$I.S.=\left\{x\leq -\frac{3}{4}\right\}$
217	$-\frac{4}{3}x\geq 0$	$I.S.=\{x\leq 0\}$	$-\frac{4}{3}x\geq\frac{2}{3}$	$I.S.=\left\{x\leq -\frac{1}{2}\right\}$
218	$-\frac{2}{3}x\leq\frac{1}{9}$	$I.S.=\left\{x\geq -\frac{1}{6}\right\}$	$-\frac{2}{3}x\leq 9$	$I.S.=\left\{x\geq -\frac{27}{2}\right\}$

219 L'insieme soluzione della disequazione $\frac{x+5}{2}>-\frac{1}{5}$ è:

[A] $I.S.=\emptyset$ [B] $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{27}{5}\right\}$ [C] $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\frac{27}{5}\right\}$

[D] $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-\frac{27}{5}\right\}$ [E] $\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{5}{27}\right\}$

220 $\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{2}-5\right)^2\le\frac{(x-3)^2}{4}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

221 $\frac{(x+5)}{3}+3+2\frac{(x-1)}{3}\le x+4$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

222 $x+\frac{1}{2}<\frac{(x+3)}{3}-1$ $\quad I.S.=\left\{x<-\frac{3}{4}\right\}$

223 $(x+3)^2\ge(x-2)(x+2)$ $\quad I.S.=\left\{x\ge-\frac{13}{6}\right\}$

224 $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}<5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)$ $\quad I.S.=\left\{x>\frac{3}{2}\right\}$

225 $(x+1)^2\ge(x-1)^2$ $\quad I.S.=\{x\ge0\}$

226 $\frac{x+0{,}25}{2}<1{,}75+0{,}25\,x$ $\quad I.S.=\left\{x<\frac{13}{2}\right\}$

227 $\frac{1}{2}\left(3\mathrm{x}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)^2\ge0$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

228 $3\frac{(x+1)}{2}-\frac{x+1}{3}-\frac{1}{9}>-5\mathrm{x}+\frac{1}{2}$ $\quad I.S.=\left\{x>-\frac{10}{111}\right\}$

229 $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)+x-\frac{1}{2}>x\frac{(x-1)}{4}+\frac{5\mathrm{x}-6}{4}$ $\quad I.S.=\emptyset$

230 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)>\frac{x-\frac{1}{2}}{3}+\frac{x-\frac{1}{3}}{2}$ $\quad I.S.=\mathbb{R}$

►4. Problemi con le disequazioni

<u>Problema</u> tariffe telefoniche

Sto analizzando due proposte di compagnie telefoniche per poi stipulare il contratto più conveniente per le mie esigenze. La compagnia T_1 prevede una spesa fissa di 5 centesimi di scatto alla risposta da sommare alla spesa di 1 centesimo per ogni minuto di telefonata. La compagnia T_2 non prevede spesa per lo scatto alla risposta, ma per ogni minuto di telefonata la spesa è di 2 centesimi. Dopo quanti minuti di telefonata la seconda tariffa è più conveniente della prima?

Indichiamo con x la durata in minuti di una telefonata e con t_1 e t_2 rispettivamente la spesa con la prima e la seconda compagnia:

$t_1=(5+1\cdot x)$ centesimi $\qquad t_2=(2\cdot x)$ centesimi

t_2 sarà più conveniente di t_1 se $2\cdot x<5+x$

Il problema è formalizzato con una disequazione nell'incognita x, di primo grado. Dobbiamo trovare I.S.

Applicando il primo principio si ottiene: $2\cdot x-x<5 \;\rightarrow\; x<5\;(min)$

Conclusione: se le mie telefonate durano meno di 5 minuti allora mi conviene il contratto con T_2 , altrimenti se faccio telefonate più lunghe di 5 minuti mi conviene T_1 . Le due tariffe sono uguali se la telefonata dura esattamente 5 minuti.

Risolvi i seguenti problemi con una disequazione

231 Sommando un numero con il doppio del suo successivo si deve ottenere un numero maggiore di 17. Quali numeri verificano questa condizione? [x>5]

232 Sommando due numeri pari consecutivi si deve ottenere un numero che non supera la metà del numero più grande. Quali valori può assumere il primo numero pari? $[x \leq -2/3]$

233 Il noleggio di una automobile costa 55,00 € al giorno, più 0,085 € per ogni chilometro percorso. Qual è il massimo di chilometri da percorrere giornalmente, per spendere non più di 80,00 € al giorno? [massimo 294 km]

234 In una fabbrica, per produrre una certa merce, si ha una spesa fissa settimanale di 413 €, ed un costo di produzione di 2,00 € per ogni kg di merce. Sapendo che la merce viene venduta a 4,00 € al kg, determinare la quantità minima da produrre alla settimana perché l'impresa non sia in perdita.

235 Per telefonare in alcuni paesi esteri, una compagnia telefonica propone due alternative di contratto:
a) 1,20 € per il primo minuto di conversazione, 0,90 € per ogni minuto successivo;
b) 1,00 € per ogni minuto di conversazione.
Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la seconda alternativa? [meno di 3 minuti]

236 Il prezzo di un abbonamento mensile ferroviario è di 125,00 €. Sapendo che il prezzo di un singolo biglietto sulla stessa tratta è di 9,50 €, trovare il numero minimo di viaggi per cui l'abbonamento mensile risulta conveniente, e rappresentare graficamente la soluzione. [14]

237 Al circolo tennis i soci pagano 12 € a ora di gioco, i non soci pagano 15€. Sapendo che la tessera annuale costa 150€, dopo quante partite all'anno conviene fare la tessera di socio?

238 In montagna l'abbonamento per due settimane allo skipass costa 220€ mentre il biglietto giornaliero costa 20€. Andando a sciare ogni giorno, dopo quanti giorni conviene fare l'abbonamento? [x>11]

239 Marco ha preso alle prime tre prove di matematica i seguenti voti: 5; 5,5; 4,5. Quanto deve prendere alla quarta e ultima prova per avere 6 di media? [9]

240 Per produrre un tipo di frullatore un'azienda ha dei costi fissi per 12.000€ a settimana e riesce a produrre 850 frullatori a settimana, ognuno dei quali ha un costo di produzione pari a 34€. L'azienda concorrente riesce a vendere un frullatore analogo a 79€. A quanto devono essere venduti i frullatori in modo che l'azienda abbia un utile e che il prezzo di vendita non sia superiore a quello del prodotto concorrente?

241 Per noleggiare un'auto una compagnia propone un'auto di tipo *citycar* al costo di 0,20 € per km percorso e una quota fissa giornaliera di 15,00 €, un'auto di tipo *economy* al costo di 0,15 € per km e una quota fissa giornaliera di 20,00€. Dovendo noleggiare l'auto per 3 giorni quanti km occorre fare perché sia più conveniente l'auto di tipo *economy*? [più di 300 km]

242 Alle 9.00 di mattina sono in autostrada e devo raggiungere una città che dista 740 km entro le 17.00 poiché ho un appuntamento di lavoro. Prevedendo una sosta di mezzora per mangiare un panino, a quale velocità devo viaggiare per arrivare in orario?

243 Quanto deve essere lungo il lato di un triangolo equilatero il cui perimetro deve superare di 900cm il perimetro di un triangolo equilatero che ha il lato di 10cm? [x>310cm]

244 I lati di un triangolo sono tali che il secondo è doppio del primo e il terzo è più lungo del secondo di 3cm. Se il perimetro deve essere compreso tra 10cm e 20cm, tra quali valori può variare il lato più piccolo? $\left[\frac{7}{5}cm < x < \frac{17}{5}cm\right]$

245 In un triangolo isoscele l'angolo alla base deve essere minore della metà dell'angolo al vertice. Tra quali valori deve essere compresa la misura dell'angolo alla base? $[0° < \alpha < 45°]$

246 Un trapezio rettangolo l'altezza che è il triplo della base minore, mentre la base maggiore è 5 volte la base minore. Se il perimetro del trapezio non deve superare i 100m, quali valori può assumere la lunghezza dell'altezza del trapezio? $\left[h \leq \frac{150}{7} m\right]$

247 Un rettangolo ha le dimensioni una doppia dell'altra. Si sa che il perimetro non deve superare 600m e che l'area non deve essere inferiore a 200m^2. Tra quali valori possono variare le dimensioni del rettangolo? [*Il lato minore tra 10m e 100m, il lato maggiore tra 20m e 200m*]

►5. Sistemi di disequazioni

In alcune situazioni occorre risolvere contemporaneamente più disequazioni. Vediamo alcuni problemi.

Problema

Il doppio di un numero reale positivo diminuito di 1 non supera la sua metà aumentata di 2. Qual è il numero?

Incognita del problema è il numero reale che indichiamo con x. Di esso sappiamo che deve essere positivo, quindi $x>0$ e che deve verificare la condizione $2x-1\le\frac{1}{2}x+2$. Le due disequazioni devono verificarsi contemporaneamente.

Il problema può essere formalizzato con un **sistema di disequazioni:** $\begin{cases}x>0\\ 2x-1\le\frac{1}{2}x+2\end{cases}$.

Risolvere un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono soluzioni comuni alle due disequazioni, cioè che le verificano entrambe.

Se indichiamo con $I.S._1$ e $I.S._2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato dall'intersezione $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$.

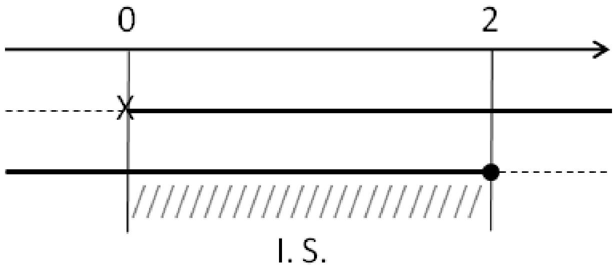
Risolviamo separatamente le due disequazioni per determinare i due insiemi delle soluzioni.

D1: $x>0 \rightarrow I.S._1=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$

D2: $4x-2\le x+4 \rightarrow 3x\le 6 \rightarrow I.S._2=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 2\}$

Dobbiamo ora determinare $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$. Questa ricerca può essere facilitata rappresentando graficamente i due intervalli in uno stesso schema.

Disegniamo l'asse dei numeri reali r e su esso indichiamo i numeri che entrano in gioco, lo 0 e il 2. Disegniamo una prima linea dove rappresentiamo con una linea spessa $I.S._1$, disegniamo una seconda linea dove rappresentiamo con una linea più spessa I.S.2. Su una terza linea rappresentiamo l'insieme degli elementi comuni a $I.S._1$ e $I.S._2$, che è appunto l' insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni.



Non ci rimane che descrivere l'intervallo delle soluzioni in forma insiemistica $I.S.=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x\le 2\}=(0,2]$.

Problema

In un triangolo il lato maggiore misura 13m, gli altri due lati differiscono tra di loro di 2m. Come si deve scegliere il lato minore affinché il perimetro non superi 100m?

Dati: $\overline{AB}=13\text{m}$, $\overline{BC}-\overline{AC}=2\text{m}$

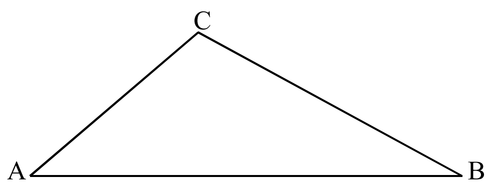
Riferendoci alla figura, AC è il lato minore; indichiamo con x la sua misura.

Obiettivo: determinare x in modo che $2p\le 100$

Soluzione:

$\overline{AC}=x$; $\overline{BC}=2+x$; $\overline{AB}=13$ con $x>0$

L'obiettivo in linguaggio matematico si trascrive: $x+(2+x)+13\le 100$

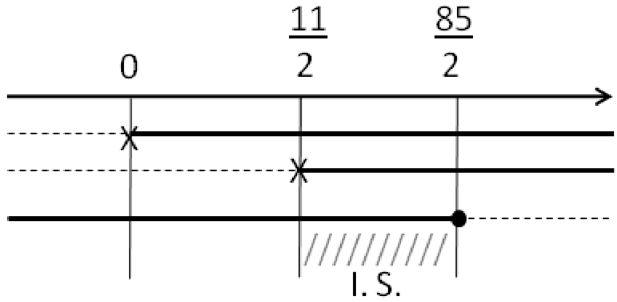


Dal momento che ci troviamo in un triangolo, tra i suoi lati deve sussistere la "disuguaglianza triangolare" e dunque $13<x+(2+x)$. Il problema è formalizzato attraverso un sistema di disequazioni:

$\begin{cases}x>0\\ x+(x+2)+13\le 100\\ 13<x+(x+2)\end{cases}$ risolvendo ciascuna disequazione si ottiene $\begin{cases}x>0\\ x\le\frac{85}{2}\\ x>\frac{11}{2}\end{cases}$;

determiniamo l'insieme soluzione aiutandoci con una rappresentazione grafica.

Disegniamo l'asse dei numeri reali, sul quale riportiamo i valori numerici che abbiamo trovato nel sistema.
Disegniamo, una sotto l'altra, le tre semirette che rappresentano le soluzioni delle tre disequazioni.
Disegniamo infine il segmento dei punti che verificano contemporaneamente le tre disequazioni.



Risposta: affinché il perimetro non superi 100m la misura in metri del lato minore deve essere un numero dell'insieme $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{11}{2}<x\leq\frac{85}{2}\right\}$

Risolviamo delle disequazioni più articolate nel calcolo algebrico.

Esempi

- $\begin{cases} x>\frac{2x-11}{8}+\frac{19-2x}{4} \\ \frac{1}{5}(x+1)>\frac{x}{3}-\frac{15+2x}{9} \end{cases}$

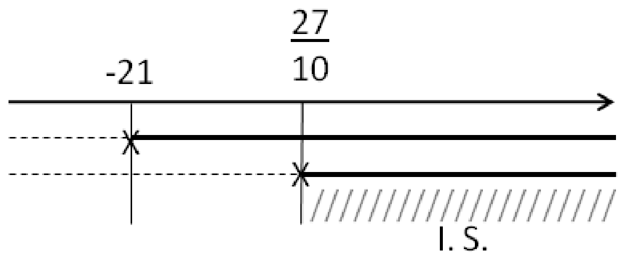
Risolviamo separatamente le due disequazioni:

d_1: $8x>2x-11+38-4x \;\rightarrow\; 10x>27 \;\rightarrow\; x>\frac{27}{10} \;\rightarrow\; I.S._1=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{27}{10}\right\}$

d_2: $9x+9>15x-75-10x \;\rightarrow\; 4x>-84 \;\rightarrow\; x>-21 \;\rightarrow\; I.S._2=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-21\}$

Rappresentiamo graficamente le soluzioni e determiniamo $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{27}{10}\right\}$



- $\begin{cases} 2\cdot(x+1)+(-2)^2\cdot x>3\cdot(2x-3) \\ \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}<\frac{35}{16} \end{cases}$

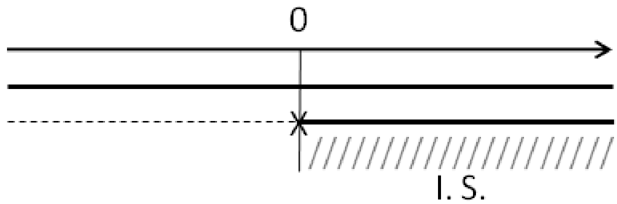
Risolviamo separatamente le due disequazioni:

D_1: $2x+2+4x>6x-9 \;\rightarrow\; 0x>-11 \;\rightarrow\; I.S._1=\mathbb{R}$

D_2: $4x^2+36-24x-4x^2-1+4x-35<0 \;\rightarrow\; -20x<0 \;\rightarrow\; x>0 \;\rightarrow\; I.S._2=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$

Determiniamo $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$

$I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$



- $\begin{cases} (x-2)\cdot(x+3)\geq x+(x-1)\cdot(x+1) \\ (x-1)^3\leq x^2\cdot(x-3)+2\left(-\frac{1}{2}x+1\right) \end{cases}$

Risolviamo separatamente le disequazioni: D_1: $x^2-2x+3x-6>x+x^2-1 \;\rightarrow\; 0x\geq 5 \;\rightarrow\; I.S._1=\emptyset$
Poiché la prima equazione non ha soluzioni non avrà soluzioni nemmeno il sistema. E' superfluo quindi risolvere la seconda disequazione. La risolviamo per esercizio.

$D_2:\ x^3-3x^2+3x-1\le x^3-3x^2-x+2\ \rightarrow\ 4x\le 3\ \rightarrow\ x\le\frac{3}{4}\ \rightarrow\ I.S._2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\le\frac{3}{4}\right\}$

$I.S.=I.S._1\cap I.S._2=\emptyset\cap I.S._2=\emptyset$

■ $\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\le\frac{1}{6}\\ x+1\le\frac{2x-1}{3}+\frac{1-2x}{4}\end{cases}$

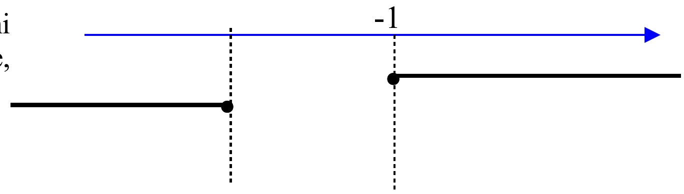
Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$D_1:\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x\le\frac{1}{6}\ \rightarrow\ 2x-3x\le 1\ \rightarrow\ x\ge -1\ \rightarrow\ I.S._1=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge -1\}$

$D_2:\ 12x+12\le 8x-4+3-6x\ \rightarrow\ 10x\le -13\ \rightarrow\ x\le-\frac{13}{10}\ \rightarrow\ I.S._2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\le-\frac{13}{10}\right\}$

Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo $I.S.=I.S._1\cap I.S._2$.

Il grafico mette in evidenza che i due insiemi soluzione non hanno elementi in comune, pertanto $I.S.=\emptyset$



248 Sulla retta reale rappresenta l'insieme soluzione S_1 dell'equazione: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot(5x+3)=2+\frac{2}{3}\cdot(x+1)$ e l'insieme soluzione S_2 della disequazione: $\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1-x}{4}\right)\ge 3-\frac{6-2x}{3}-\frac{x}{2}$. È vero che $S_1\subset S_2$?

249 Determina i numeri reali che verificano il sistema: $\begin{cases}x^2\le 0\\ 2-3x\ge 0\end{cases}$ [x = 0]

250 L'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases}(x+3)^3-(x+3)\cdot(9x-2)>x^3+27\\ \frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}<x+1\end{cases}$ è:

A) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$ B) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>-3\}$ C) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<-3\}$ D) $I.S.=\emptyset$ E) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<3\}$

251 Attribuire il valore di verità alle seguenti proposizioni

a) Il quadrato di un numero reale è sempre positivo V F

b) L'insieme complementare di $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-8\}$ *è* $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-8\}$ V F

c) Il monomio $-6x^3y^2$ assume valore positivo per tutte le coppie dell'insieme $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ V F

d) Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi il sistema $\begin{cases}x+1>0\\ 8x<0\end{cases}$ non ha soluzione V F

e) L'intervallo $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$ rappresenta l'I.S. del sistema $\begin{cases}1+2x<0\\ \frac{x+3}{2}\le x+1\end{cases}$ V F

252 $\begin{cases}3-x>x\\ 2x>3\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}3x\le 4\\ 5x\ge -4\end{cases}$ $-\frac{4}{5}\le x\le\frac{4}{3}$

253 $\begin{cases}2x>3\\ 3x\le 4\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}3x-5<2\\ x+7<-2x\end{cases}$ $x<-\frac{7}{3}$

254 $\begin{cases}3-x\ge x-3\\ -x+3\ge 0\end{cases}$ $x\le 3$ $\begin{cases}-x-3\le 3\\ 3+2x\ge 3x+2\end{cases}$ $-6\le x\le 1$

255 $\begin{cases}2x-1>2x\\ 3x+3\le 3\end{cases}$ $\emptyset$ $\begin{cases}2x+2<2x+3\\ 2(x+3)>2x+5\end{cases}$ $\mathbb{R}$

256 $\begin{cases} -3x>0 \\ -3x+5\geq 0 \\ -3x\geq -2x \end{cases}$ $\quad x<0$ $\qquad$ $\begin{cases} 3+2x>3x+2 \\ 5x-4\leq 6x-4 \\ -3x+2\geq -x-8 \end{cases}$ $\quad 0\leq x<1$

257 $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x\geq \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3}x\leq \dfrac{1}{9} \end{cases}$ $\quad \emptyset$ $\qquad$ $\begin{cases} 4x+4\geq 3\cdot\left(x+\dfrac{4}{3}\right) \\ 4x+4\geq 2\cdot(2x+2) \end{cases}$ $\quad x\geq 0$

258 $\begin{cases} 3(x-1)<2(x+1) \\ x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x+1}{2}>0 \end{cases}$ $\quad 0<x<5$ $\qquad$ $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{3}(x+3)-1 \\ (x+3)^2\geq (x-2)(x+2) \end{cases}$ $\quad -\dfrac{13}{6}\leq x<-\dfrac{3}{4}$

259 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}-(x+5)^2\leq \dfrac{(x-3)^2}{4} \\ \dfrac{x+5}{3}+3+2\cdot\dfrac{x-1}{3}\leq x+4 \end{cases}$ $\quad \mathbb{R}$ $\qquad$ $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3}>x-1 \\ \dfrac{x-4}{5}<\dfrac{2x+1}{3} \end{cases}$ $\quad -\dfrac{17}{7}<x<6$

260 $\begin{cases} 2\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+x>3x-2 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\geq \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{6} \end{cases}$ $\quad x\geq 2$

261 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}<5\cdot\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\cdot\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(1+x)(1-x)+3\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)^2\geq 0 \end{cases}$ $\quad x>\dfrac{3}{2}$

262 $\begin{cases} 3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{2-x}{3}+x-\dfrac{x-1}{3}>0 \\ \left[1-\dfrac{1}{6}(2x+1)\right]+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2<(x+1)^2+\dfrac{1}{3}(1+2x) \end{cases}$ $\quad x>\dfrac{9}{10}$

263 $\left\{\begin{array}{l} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)>\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)<\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right\}$ $\quad x>\dfrac{1}{2}$

►6. Disequazioni polinomiali di grado superiore al primo

Problema

Vogliamo determinare i valori di x che rendono il polinomio $p=(3x-7)(2-x)$ positivo.
Il problema chiede di determinare l’insieme delle soluzione della disequazione di secondo grado $(3x-7)(2-x)>0$. La disequazione si presenta nella forma di prodotto di due fattori di primo grado e proprio la sua forma di prodotto ci faciliterà la risposta al quesito.
Sappiamo che nell’insieme dei numeri relativi il segno del prodotto di due fattori segue la regola dei segni visualizzata dalla tabella a lato: ”il segno di un prodotto è positivo se i due fattori sono concordi”. Questo fatto si traduce nei due metodi risolutivi del problema proposto.

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Metodo 1: impostiamo due sistemi di disequazioni, formalizzando l’osservazione precedente

$$\begin{cases}3x-7>0\\ 2-x>0\end{cases} \vee \begin{cases}3x-7<0\\ 2-x<0\end{cases}$$

Risolvendo i due sistemi e unendo le loro soluzioni otteniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione originaria: $I.S.=I.S._1 \cup I.S._2$

$$IS_1:\ \begin{cases}3x-7>0\\ 2-x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x>\dfrac{7}{3}\\ x<2\end{cases} \rightarrow IS_1=\emptyset \qquad IS_2:\ \begin{cases}3x-7<0\\ 2-x<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x<\dfrac{7}{3}\\ x>2\end{cases} \rightarrow IS_2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$$

quindi $I.S.=I.S._1\cup I.S._2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$

Mediante il metodo appena esposto risolvi le seguenti disequazioni

264 $(x+3)\cdot\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}\right)<0$ $\quad\left(-\frac{6}{11}+2x\right)\cdot\left(-x+\frac{9}{2}\right)$

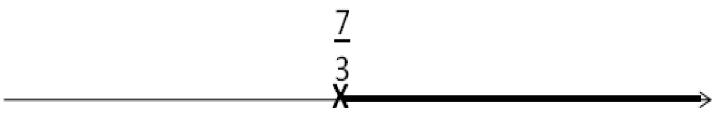
265 $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(5x+\frac{1}{5}\right)<0$ $\quad\left(-\frac{1}{10}x+2\right)\cdot(-3x+9)\geq 0$

Il metodo illustrato nel caso precedente si complica se il prodotto ha più di due fattori. Prova infatti ad applicarlo alla seguente disequazione

266 $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x)>0$

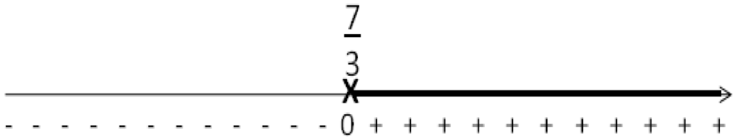
Metodo 2: Torniamo alla disequazione iniziale $(3x-7)(2-x)>0$ e applichiamo un altro metodo.
Osserviamo che quando risolviamo la disequazione $3x-7>0$ determiniamo l’insieme dei valori che attribuiti alla variabile rendono il polinomio $p=3x-7$ positivo, precisamente sono i valori $x>\frac{7}{3}$

Rappresentiamo l’I.S. con una semiretta in grassetto come in figura



In realtà, nel grafico sono contenute tutte le informazioni sul segno del polinomio:

- la semiretta in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio positivo;
- il valore x = 2 è quello che annulla il polinomio;
- la semiretta non in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio negativo.



Esempio

- $(3x-7)\cdot(2-x)>0$

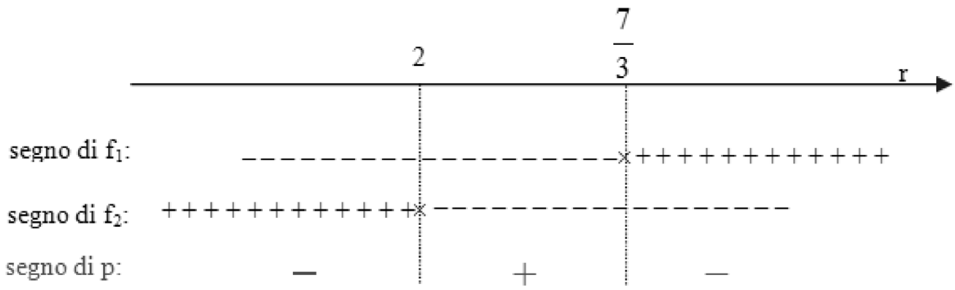
La disequazione equivale a determinare i valori che attribuiti alla variabile x rendono positivo il polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$.

Studiamo separatamente il segno dei due fattori:

F_1: $3x-7>0 \rightarrow x>\frac{7}{3}$

F_2: $2-x>0 \rightarrow x<2$

Per risolvere la disequazione iniziale ci è di particolare aiuto un grafico che sintetizzi la situazione. Applicando poi la regola dei segni otteniamo il segno del polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$.



Ricordiamo che la disequazione che stiamo risolvendo $(3x-7)\cdot(2-x)>0$ è verificata quando il polinomio $p=(3x-7)\cdot(2-x)$ è positivo, cioè nell'intervallo in cui abbiamo ottenuto il segno "+".

Possiamo concludere $I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 2<x<\frac{7}{3}\right\}$.

Esempio

- $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x)>0$

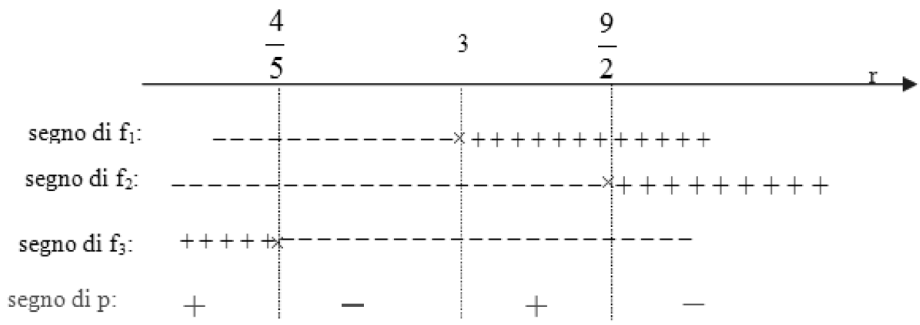
Determiniamo il segno di ciascuno dei suoi tre fattori:

$F_1: x-3>0 \rightarrow x>3$

$F_2: 2x-9>0 \rightarrow x>\frac{9}{2}$

$F_3: 4-5x>0 \rightarrow x<\frac{4}{5}$

Costruiamo la tabella dei segni:



La disequazione è verificata negli intervalli dove è presente il segno "+"

$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\frac{4}{5} \vee 3<x<\frac{9}{2}\right\}$.

<u>Esempio</u>

- $4x^3+4x^2 \le 1+x$

La disequazione è di terzo grado; trasportiamo al primo membro tutti i monomi:

$4x^3+4x^2-1-x \le 0$

Possiamo risolverla se riusciamo a scomporre in fattori di primo grado il polinomio al primo membro: ù

$4x^3+4x^2-1-x \le 0 \ \rightarrow \ 4x^2(x+1)-(x+1) \le 0 \ \rightarrow \ (x+1)(2x-1)(2x+1) \le 0$

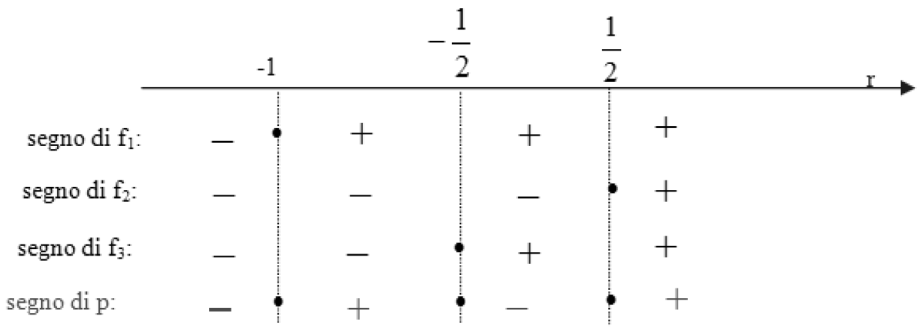
Studiamo ora il segno di ciascun fattore, tenendo conto che sono richiesti anche i valori che annullano ogni singolo fattore (legge di annullamento del prodotto):

$F_1: x+1 \ge 0 \ \rightarrow \ x \ge -1$

$F_2: 2x-1 \ge 0 \ \rightarrow \ x \ge \frac{1}{2}$

$F_3: 2x+1 \ge 0 \ \rightarrow \ x \ge -\frac{1}{2}$

Possiamo ora costruire la tabella dei segni



Ricordiamo che la disequazione di partenza $4x^3+4x^2 \le 1+x$ è verificata dove compare il segno “-”:

$I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1 \ \ oppure \ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right\}$

<u>Procedura per determinare I.S. Di una disequazione polinomiale di grado superiore al primo</u>

- scrivere la disequazione nella forma p≤0, p≥0, p<0, p>0;
- scomporre in fattori irriducibili il polinomio;
- determinare il segno di ciascun fattore, ponendolo sempre maggiore di zero, o maggiore uguale a zero a seconda della richiesta del problema;
- si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri del polinomio;
- si determinano gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto

Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni

267	$(x+2)(3-x) \le 0$	$x \le -2 \lor x \ge 3$
268	$x(x-2) > 0$	$x < 0 \lor x > 2$
269	$(3x+2)(2-3x) < 0$	$x < -\frac{2}{3} \lor x > \frac{2}{3}$
270	$-3x(2-x)(3-x) \ge 0$	$x \ge 0 \lor 2 \le x \le 3$
271	$(x+1)(1-x)\left(\frac{1}{2}x-2\right) \ge 0$	$x \le 4$
272	$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$	$1 < x < 2 \lor 3 < x < 4$
273	$x^2-16 \le 0$	$-4 \le x \le 4$
274	$4x^2-2x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$
275	$x^4-81 \ge 0$	$x \le -3 \lor x \ge 3$
276	$x^2+17x+16 \le 0$	$-16 \le x \le -1$
277	$16-x^4 \le 0$	$x \le -2 \lor x \ge 2$
278	$x^2+2x+1 < 0$	$\emptyset$

279 $x^2+6x+9\geq 0$ $\mathbb{R}$

280 $x^2-5x+6<0$ $2<x<3$

281 $x^2+3x-4\leq 0$ $-4\leq x\leq 1$

282 $x^3>x^2$ $x>1$

283 $x^2(2x^2-x)-(2x^2-x)<0$ $-1<x<0\vee\frac{1}{2}<x<1$

284 $x^2-2x+1+x(x^2-2x+1)<0$ $x<-1$

285 $x^3-2x^2-x+2\geq 0$ $-1\leq x\leq 1\vee x\geq 2$

286 $x^4+4x^3+3x^2>0$ $x<-3\vee x>-1\wedge x\neq 0$

287 $(6x^2-24x)(x^2-6x+9)<0$ $0<x<4\wedge x\neq 3$

288 $(x^3-8)(x+2)<(2-x)(x^3+8)$ $-2<x<2$

289 $(2a+1)(a^4-2a^2+1)<0$ $a<-\frac{1}{2}\wedge a\neq -1$

290 $x^3-6x^2+11>1-3x$ $-1<x<2\vee x>5$

291 $x^6-x^2+x^5-6x^4-x+6<0$ $-3<x<-1\vee 1<x<2$

292 Determinare i valori che attribuiti alla variabile y rendono positivi entrambi i polinomi seguenti:
$p_1=y^4-13y^2+36$; $p_2=y^3-y^2-4y+4$ $-2<y<1\vee y>3$

293 Determinare i valori di a che rendono $p=a^2+1$ minore di 5. $-2<a<2$

Determinare I.S. dei seguenti sistemi di disequazioni:

294 $\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ x^2-7x+10<0 \end{cases}$ $3\leq x<5$

295 $\begin{cases} x^2+3x-12\geq 0 \\ 12x^2+12x+3>0 \end{cases}$ $x\leq -6\vee x\geq 3$

296 $\begin{cases} 49a^2-1\geq 0 \\ 9a^2<1 \\ 1-a>0 \end{cases}$ $-\frac{1}{3}<a\leq -\frac{1}{7}\vee\frac{1}{7}\leq a<\frac{1}{3}$

297 $\begin{cases} 16x^4-1<0 \\ 16x^3+8x^2\geq 0 \end{cases}$ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

298 $\begin{cases} 2x^2-13x+6<0 \\ (2x^2-5x-3)(1-3x)>0 \\ x^2+7>1 \end{cases}$ $-6<x<-\frac{1}{2}$

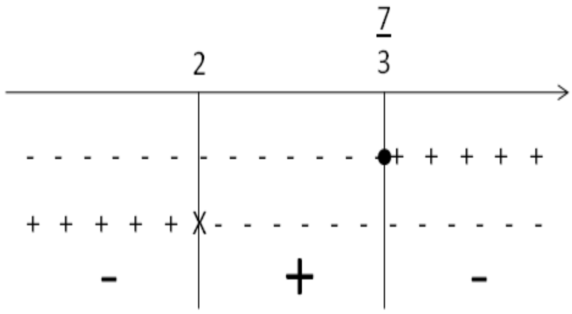
►7. Disequazioni frazionarie

Un'espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha come risultato una frazione algebrica. Con la condizione di esistenza che il denominatore della frazione sia diversa da zero la ricerca del segno di una frazione algebrica viene effettuata con la stessa procedura seguita per il prodotto di due o più fattori.

Esempio

■ $\frac{3x-7}{2-x} \geq 0$

Poniamo innanzi tutto la C.E. $2-x \neq 0$ cioè $\boldsymbol{x \neq 2}$ e procediamo studiando il segno del numeratore e del denominatore. Terremo conto della C.E. Ponendo il denominatore semplicemente maggiore di zero e non maggiore uguale.



$N \geq 0 \;\rightarrow\; 3x-7 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq \frac{7}{3}$

$D > 0 \;\rightarrow\; 2-x > 0 \;\rightarrow\; x < 2$

Analogamente a quanto fatto per il prodotto, dalla tabella dei segni otteniamo $I.S. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq \frac{7}{3} \right\}$ in cui vediamo già compresa la C.E. che inizialmente avevamo posto.

Procedura per determinare I.S. di una disequazione frazionaria

- applicare il primo principio e trasportare tutti i termini al primo membro;
- eseguire i calcoli dell'espressione al primo membro per arrivare a una disequazione nella forma

$[\frac{N(x)}{D(x)} > 0]$ oppure $[\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0]$ oppure $[\frac{N(x)}{D(x)} < 0]$ oppure $[\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0]$

- studiare il segno del numeratore e del denominatore, ponendo N(x)>0 (oppure N(x)≥0 a secondo della richiesta) e D(x)>0;
- costruire la tabella dei segni, segnando con un punto in grassetto gli zeri del numeratore;
- determinare gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto.

Esempio

■ $\frac{x-1}{2x+2} + \frac{2x+1}{4x-2} > \frac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro

$$\frac{x-1}{2x+2} + \frac{2x+1}{4x-2} - \frac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2} > 0$$

Scomponiamo in fattori i denominatori, determiniamo il minimo comune multiplo e sommiamo le frazioni per arrivare alla forma $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$:

$$\frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{2x+1}{2(2x-1)} - \frac{4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)} > 0$$

$$\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)+(2x+1)(2x+1)(x+1)-4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)} > 0$$

$$\frac{4x+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)} > 0 \quad (*)$$

Studiamo separatamente il segno di tutti i fattori che compaiono nella frazione, sia quelli al numeratore sia quelli al denominatore e costruiamo la tabella dei segni:

$$N>0\rightarrow 4x+1>0\rightarrow x>-\frac{1}{4}$$

$$D>0\begin{cases} x+1>0\rightarrow x>-1 \\ 2x-1>0\rightarrow x>\dfrac{1}{2} \\ 2x+1>0\rightarrow x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

r		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	
segno N:	– – –		– – –		– – –	×	+ + +		+ + +
D: segno di d_1:	– – –	×	+ + +		+ + +		+ + +		+ + +
D: segno di d_2:	– – –		– – –		– – –		– – –	×	+ + +
D: segno di d_3:	– – –		– – –	×	+ + +		+ + +		+ + +
segno di f:	+		–		+		–		+

Non abbiamo posto le C.E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore.
Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo come richiesto dalla disequazione (*):

$$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1\vee -\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}\vee x>\frac{1}{2}\right\}$$

<u>Esempio</u>

■ $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2x-3}{x-1}+\dfrac{10x-3}{6x-6}\leq\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2+2}{3x-2}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro :

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{10x-3}{6x-6}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2+2}{3x-2}\leq 0$$

Eseguiamo le operazioni per semplificare la frazione e ridurla alla forma $\dfrac{N(x)}{D(x)}\leq 0$:

$$\frac{x}{2}-\frac{4x-6}{3(x-1)}+\frac{10x-3}{6(x-1)}-\frac{3x^2+6}{2(3x-2)}-\frac{1}{3(x-1)(3x-2)}\leq 0$$

$$\frac{3x(x-1)(3x-2)-2(4x-6)(3x-2)+(10x-3)(3x-2)-3(3x^2+6)(x-1)-2}{6(x-1)(3x-2)}\leq 0$$

$$\frac{11x-2}{6(x-1)(3x-2)}\leq 0 \quad (*)$$

Studiamo il segno del numeratore e dei fattori del denominatore

$$N\geq 0 \;\rightarrow\; 11x-2\geq 0 \;\rightarrow\; x\geq\frac{2}{11}$$

$$D>0\rightarrow\begin{cases} d_1>0\rightarrow x-1>0\rightarrow x>1 \\ d_2>0\rightarrow 3x-2>0\rightarrow x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

r		$\frac{2}{11}$		$\frac{2}{3}$		1	
segno N:	–	•	+		+		+
D: segno d_1:	–		–		–	×	+
D: segno d_2:	–		–	×	+		+
segno f:	–		+		–		+

Non abbiamo posto le C.E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore.
Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo o nullo come dalla disequazione (*):

$$I.S.=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq\frac{2}{11}\vee\frac{2}{3}<x<1\right\}$$

299 Studia il segno della frazione $f=\dfrac{x^3+11x^2+35x+25}{x^2-25}$.

Traccia di svolgimento
Scomponi in fattori numeratore e denominatore, otterrai

$$f=\frac{(x+5)^2(x+1)}{(x+5)(x-5)}$$

Poniamo le C.E. e semplifica la frazione: … … … …

Studia separatamente il segno di tutti i fattori che vi compaiono. Verifica che la tabella dei segni sia:

		-5		-1		5	r
N: segno n_1:	$-$	×	$+$		$+$		$+$
N: segno n_2:	$-$		$-$	•	$+$		$+$
segno D:	$-$		$-$		$-$	×	$+$
segno f:	$-$		$+$		$-$		$+$

Risposta

La frazione assegnata, con la $C.E.\ x\neq -5\ e\ x\neq 5$, si annulla se $x=-1$; è positiva nell'insieme $I^+=\{x\in\mathbb{R} \mid -5<x<-1 \vee x>5\}$, è negativa in $I^-=\{x\in\mathbb{R} \mid x<-5 \vee -1<x<5\}$.

Determinate I.S. delle seguenti disequazioni fratte:

300 $\dfrac{x-2}{3x-9}>0$ $\quad x<2 \vee x>3$ $\qquad$ $\dfrac{3x+12}{(x-4)(6-3x)}\geq 0$ $\quad x\leq -4 \vee 2<x<4$

301 $\dfrac{x+2}{x-1}<2$ $\quad x<1 \vee x>4$ $\qquad$ $\dfrac{4-3x}{6-5x}\geq -3$ $\quad x<\dfrac{6}{5} \vee x\geq \dfrac{11}{9}$

302 $\dfrac{x+8}{x-2}\geq 0$ $\quad x\leq -8 \vee x>2$ $\qquad$ $\dfrac{3x+4}{x^2+1}\geq 2$ $\quad -\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2$

303 $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{2}{x-3}\leq 0$ $\quad x<-4 \vee \dfrac{2}{3}\leq x<3$ $\qquad$ $\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{6}{x+9}\geq 0$ $\quad -45\leq x<-9 \vee x>-3$

304 $\dfrac{3}{2-x}\leq \dfrac{1}{x-4}$ $\quad 2<x\leq \dfrac{7}{2} \vee x>4$ $\qquad$ $\dfrac{2}{x-2}>\dfrac{2x-2}{(x-2)(x+3)}$ $\quad x<-3 \vee x>2$

305 $\dfrac{x-3}{x^2-4x+4}-1<\dfrac{3x-3}{6-3x}$ $\quad x<2 \vee 2<x<\dfrac{5}{2}$

306 $\dfrac{2}{4x-16}<\dfrac{2-6x}{x^2-8x+16}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<\dfrac{8}{13}\right\}$

307 $\dfrac{5}{2x+6}\geq \dfrac{5x+4}{x^2+6x+9}$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3 \vee -3<x\leq \dfrac{7}{5}\right\}$

308 $\dfrac{(x+3)(10x-5)}{x-2}<0$ $\quad I.S.=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-3 \vee \dfrac{1}{2}<x<2\right\}$

309 $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+1}\leq 0$ $\quad -1<x\leq 1$

310 $\dfrac{4-3x}{x-2}<\dfrac{3x+1}{x-2}$ $\quad x<\dfrac{1}{2} \vee x>2$

311 $\dfrac{5x-4}{3x-12}\geq \dfrac{x-4}{4-x}$ $\quad x\leq 2 \vee x>4$

312 $\dfrac{2-x}{5x-15}\leq \dfrac{5x-1}{2x-6}$ $\quad x\leq \dfrac{1}{3} \vee x>3$

313 $\dfrac{(3x-12)(6-x)}{(24-8x)(36-18x)}\leq 0$ $\quad x<2 \vee 3<x\leq 4 \vee x\geq 6$

314 $\dfrac{(x-2)(5-2x)}{(5x-15)(24-6x)}\geq 0$ $\quad x\leq 2 \vee \dfrac{5}{2}\leq x<3 \vee x>4$

315 $\dfrac{(x-2)(x+4)(x+1)}{(x-1)(3x-9)(10-2x)}\leq 0$ $\quad x\leq -4 \vee -1\leq x<1 \vee 2\leq x<3 \vee x>5$

316 $\dfrac{(5-x)(3x+6)(x+3)}{(4-2x)(x-6)x}\leq 0$ $\quad -3\leq x\leq -2 \vee 0<x<2 \vee 5\leq x<6$

317 $\dfrac{(x-5)(3x-6)(x-3)}{(4-2x)(x+6)x}\leq 0$ $\quad x<-6 \vee 0<x\leq 3 \vee x\geq 5\ con\ x\neq 2$

318 $\dfrac{(x-3)(x+2)(15+5x)}{x^2-5x+4}\geq 0$ $\quad -3\leq x\leq -2 \vee 1<x\leq 3 \vee x>4$

319 $\frac{(x-4)^2(x+3)}{x^2+5x+6} \geqslant 0$ $\quad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x>-2\}$

320 $\frac{x}{1-x^2} > \frac{1}{2x+2} - \frac{2}{4x-4}$ $\quad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x<-1\}$

321 $\frac{3-x}{x-2} < \frac{x-1}{x+3} + \frac{2}{x^2+x-6}$ $\quad x<-3 \vee -1<x<2 \vee x>\frac{5}{2}$

322 $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{2x+2}$ $\quad I.S.=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \ \vee \ -2<x<-1\}$

323 $\frac{3}{2x-1} \leq \frac{2x^2}{2x^2-x} - \frac{x+1}{x}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<0 \ \vee \ \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}\right\}$

324 $\frac{2x^2}{2x^2-x} > 1$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<\frac{1}{2} \ con \ x \neq 0\right\}$

325 $\frac{2x}{2x-1} + \frac{x+2}{2x+1} > \frac{3}{2}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{10} \ \vee \ x>\frac{1}{2}\right\}$

326 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} \leq 1$ $\quad x<4 \wedge x \neq 3$

327 $\frac{\frac{2}{x+1}}{x^2-1} < 0$ $\quad x<-1 \vee -1<x<1$

328 $\frac{x}{x+1} - \frac{4-x}{x+2} \geq \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ $\quad x<-2 \vee x \geq \frac{5}{2}$

329 $\frac{3}{2x^2-4x-6} - \frac{x-2}{3x+3} < \frac{x-1}{2x-6}$ $\quad x<-1 \vee 0<x<2 \vee x>3$

330 $\frac{1}{2-2x} \cdot \left(\frac{x(x-2)}{x-1} - \frac{3}{3-3x}\right) > -1$ $\quad x<1 \vee x>1$

331 $-\frac{2}{27-3x^2} - \frac{x+1}{2x-6} + \frac{3-2x}{6x-18} < -\frac{3}{x^2-9} + 4\frac{x-3}{18-2x^2}$ $\quad x<-3 \vee x>3$

332 $\frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{x}{x-2} < \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{3x-x^2-2} + \frac{2-x}{4x-4}$ $\quad x<0 \vee 1<x<\frac{12}{7} \vee x>2$

333 $\frac{(x-2)(x+4)(x^2+5x+6)}{(x^2-9)(-4-7x^2)(x^2-6x+8)(x^2+4)} < 0$ $\quad x<-4 \vee -2<x<2 \vee 2<x<3 \vee x>4$

334 Dopo aver ridotto ai minimi termini la frazione $f=\frac{3x^4-2x^3+3x^2-2x}{6x^2-x-7}$, completa

$f>0$ per $x<-1$ oppure …………………………………..

$f=0$ per ………………………………………………….

$f<0$ per ………………………………………………….

335 Determinate il segno delle frazioni, dopo averle ridotte ai minimi termini:

$f_1=\frac{1-a^2}{2+3a}$; $\quad f_2=\frac{a^3-5a^2-3+7a}{9-6a+a^2}$ $\quad f_3=\frac{11m-m^2+26a}{(39-3m)(m^2+4m+4)}$

Determinare I.S. dei seguenti sistemi di disequazioni:

336 $\begin{cases} \left(1-\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{2}{x}+1\right)>\frac{13}{2} \\ \frac{7+x}{2x}>\frac{2-x}{1-2x} \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0<x<\frac{7}{17} \ \vee \ \frac{1}{2}<x<2\right\}$

337 $\begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-x-1} \geq 0 \\ \frac{4x-1-3x^2}{x^2-4} \leq 0 \end{cases}$ $\quad I.S.=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<-2 \ \vee \ \frac{1}{3} \leq x<1 \ \vee \ x \geq 3\right\}$

338 $\begin{cases} x^2-3x+2\leq 0 \\ \dfrac{6}{2+x}-\dfrac{x+2}{x-2}>\dfrac{x^2}{4-x^2} \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x<2\}$

339 $\begin{cases} x+1\leq -2x^2 \\ 3x-1<2\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$ $I.S.=\emptyset$

340 $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3x^2+x}\geq 0 \\ x^2-x-6\geq 0 \\ x^2-4\leq 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid x=-2\}$

341 $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{9-x^2}>0 \\ x^2-3x\leq 0 \end{cases}$ $I.S.=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leq x<3 \;\; con \;\; x\neq 2\}$

342 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+2}<0 \\ \dfrac{2-x}{5x-15}\leq\dfrac{5x-1}{2x-6} \end{cases}$ $x<-2$

343 $\begin{cases} \dfrac{4}{8-4x}-\dfrac{6}{2x-4}<0 \\ \dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x^3-8}>1 \end{cases}$ $x>2$

344 $\begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)\left(1-\dfrac{2}{x-2}\right)<\dfrac{x-4}{2-x} \\ \left(\dfrac{2-x}{x^2-6x+9}+\dfrac{2+x}{x^2-9}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{2x}>0 \end{cases}$ $1<x<3\wedge x\neq 2$

345 Motivare la verità o la falsità delle seguenti proposizioni riferite alle frazioni:

$f_1=\dfrac{a^3-81a}{81-a^2}$ $\quad f_2=\dfrac{7a^2+7}{3+3a^4+6a^2}$ $\quad f_3=\dfrac{20a-50a^2-2}{4a-20a^2}$

$f_4=\dfrac{a^4}{2a^4+a^2}$ $\quad f_5=\dfrac{1-4a^2}{2-8a+8a^2}$ $\quad f_6=\dfrac{2a^2+a^3+a}{2a^2-a^3-a}$

a) f_1 per qualunque valore positivo della variabile è negativa V F

b) f_2 è definita per qualunque valore attribuito alla variabile V F

c) f_3 è positiva nell'insieme $I.S.=\left\{a\in\mathbb{R} \mid a<0 \vee a>\dfrac{1}{5}\right\}$ V F

d) f_4 è positiva per qualunque valore reale attribuito alla variabile V F

e) nell'intervallo $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ f_5 non si annulla V F

a) f_6 è negativa per qualunque valore dell'insieme $K=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ V F

3. SISTEMI DI EQUAZIONI

►1. Definizione di equazione lineare in due incognite

Problema

Determinare due numeri naturali la cui somma sia 18.

L'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Indicati con x e y i due numeri richiesti dal quesito, il problema si formalizza con l'equazione $x+y=18$, equazione in due incognite, di primo grado.

DEFINIZIONI. Una equazione di primo grado in due incognite si chiama **equazione lineare**.

Procediamo per determinare l'Insieme Soluzione del problema proposto:

L'obiettivo è trovare $x \in \mathbb{N}$ *e* $y \in \mathbb{N}$ *tali che* $x+y=18$ oppure $(x\,;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tali che* $x+y=18$

Le coppie di numeri naturali che sono soluzioni dell'equazione sono facilmente determinabili e sono tutte quelle riportate nella tabella:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

L'Insieme Soluzione del problema posto è dunque formato dalle 19 coppie di numeri naturali sopra elencate.

Riformuliamo il problema cercando coppie di numeri razionali la cui somma sia 18.

In simboli scriviamo $x \in \mathbb{Q}$ *e* $y \in \mathbb{Q}$ *tali che* $x+y=18$ oppure $(x\,;y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *tali che* $x+y=18$

Possiamo subito dire che tutte le coppie precedenti sono soluzione del problema, ma ce ne sono infinite altre, ad esempio la coppia $(-7\,;+25)$ è soluzione del problema perché sostituendo a x il valore -7 e a y il valore $+25$ si ha $(-7)+(+25)=18$. Dal procedimento si capisce che anche la coppia $(+25\,;-7)$ è soluzione del problema perché $(+25)+(-7)=18$.

Se attribuiamo un valore arbitrario a x, l'altro elemento della coppia soluzione si può ottenere sottraendo da 18 il valore di x: $y=18-x$.

Completa tu

- se $x=-3$ allora y= 18-(-3) = … …, dunque la coppia (… ...; … ...) è soluzione dell'equazione;
- se $x=\frac{3}{2}$ allora y = … … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione;
- se x = … ... allora y = … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione;
- se x = … ... allora y = … … … …, la coppia (… …; … …) è soluzione dell'equazione.

Quindi, se l'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{Q}$, troviamo infinite coppie di numeri razionali che soddisfano il problema.

E ancora, se formuliamo il problema nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, troveremo tutte le infinite coppie soluzione del problema: basta assegnare all'incognita x valori reali arbitrari e determinare di conseguenza il corrispondente valore di $y=18-x$.

Se $x=\sqrt{2} \rightarrow y=18-\sqrt{2}$ e la coppia $(\sqrt{2}\,;\;18-\sqrt{2})$ è soluzione dell'equazione

Completa tu:

- se $x=-2\sqrt{3}+1$ allora y = … … … ... … … … … … …
- se $x=18+\frac{3\sqrt{5}}{2}$ allora y = … … … … … … … … … …

DEFINIZIONE. Si chiama **Insieme Soluzione (I.S.)** di un'equazione di primo grado in due incognite, l'**insieme delle coppie ordinate di numeri reali** che sostituiti rispettivamente a x e a y rendono vera l'uguaglianza.

Completa la tabelle delle coppie di soluzioni dell'equazione indicata

346 $x+2y-1=0$

x		-1	0		$\frac{1}{2}$			2,25	
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	2		1,5

347 $3x-2y=5$

x		0	1		$\frac{1}{6}$			$-\sqrt{2}$	0,25
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$		

348 $3x-2\sqrt{2}\,y=0$

x		0			$\frac{1}{6}$		$\sqrt{2}$
y	0		1	-1		$\sqrt{2}$	

►2. Rappresentazione di un'equazione lineare sul piano cartesiano

Esempio

Determinare l'insieme soluzione dell'equazione $3y-x+1=0$ *con* $x \in \mathbb{R}$ *e* $y \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione assegnata ha due incognite ed è di primo grado; l'insieme soluzione sarà formato dalle infinite coppie ordinate $(x\,;\,y)$ di numeri reali tali che $3y-x+1=0$.

Possiamo verificare che la coppia $(1\,;0)$ è soluzione dell'equazione, ma come facciamo a determinare tutte le coppie che soddisfano quella equazione?

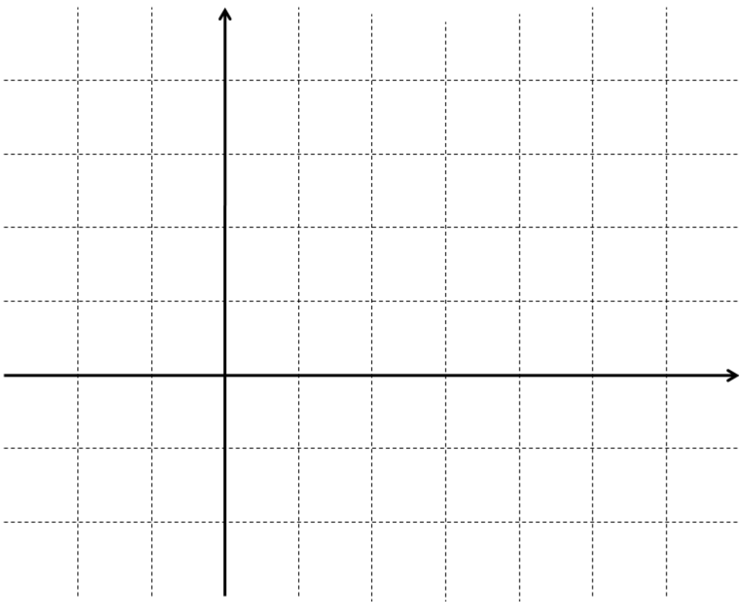
Fissiamo l'attenzione sull'incognita y, pensiamo l'equazione come un'equazione nella sola y, ricaviamo y come abbiamo fatto nelle equazioni di primo grado ad una sola incognita, applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$3y-x+1=0 \;\rightarrow\; 3y=x-1 \;\rightarrow\; \frac{3y}{3}=\frac{x-1}{3} \;\rightarrow\; y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

Ora al variare di x in $\mathbb{R}$, si ottengono tutte le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.

Prova a determinarne alcune:

x	y	coppia
0	… … …	(0; …)
1	… … …	(1; …)
-1	… … …	(-1; …)



In verità non possiamo trovare tutte le infinite coppie che risolvono quella equazione, ma possiamo darne una rappresentazione grafica.

La formula $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ rappresenta una funzione lineare; riportiamo le coppie trovate in un riferimento cartesiano ortogonale e tracciamo la retta che rappresenta la funzione.

Una qualunque equazione lineare $a\,x+b\,y+c=0$ ammette infinite soluzioni, costituite da coppie ordinate di numeri reali; esse sono le coordinate cartesiane dei punti della retta grafico della funzione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

La formula $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ si chiama **equazione esplicita della retta**.

Esempio

Risolvi graficamente l'equazione $y+\frac{2}{3}x-2=0$ *con* $x\in\mathbb{R}$ *e* $y\in\mathbb{R}$

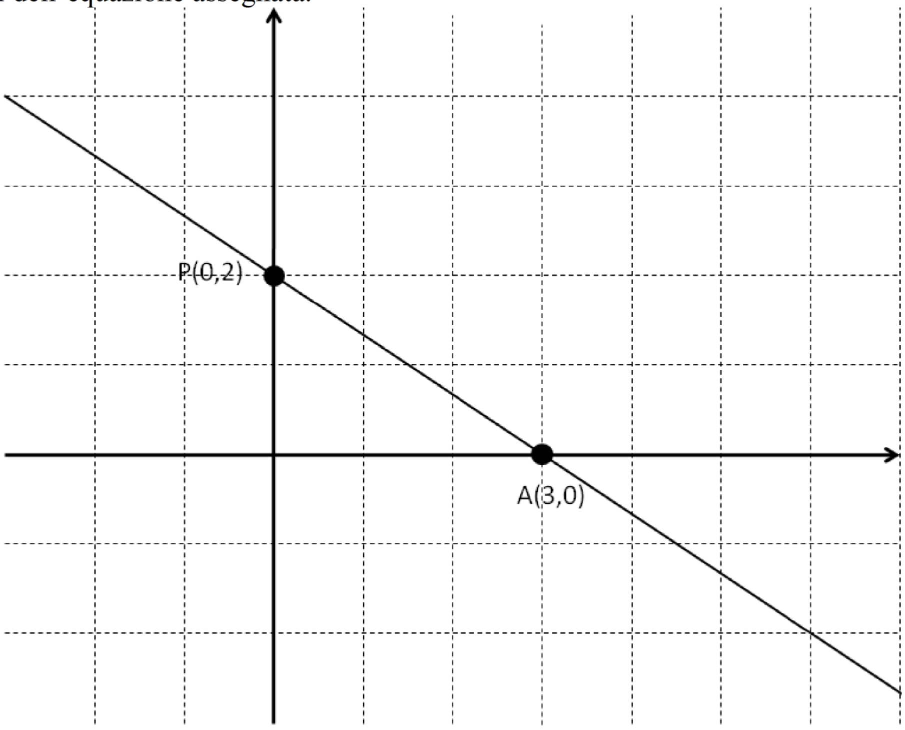
L'equazione assegnata è in due incognite, di primo grado, è cioè una equazione lineare. Nel riferimento cartesiano ortogonale essa rappresenta una retta.

Troviamo l'equazione esplicita della retta: $y+\frac{2}{3}x-2=0 \;\rightarrow\; y=-\frac{2}{3}x+2$

Individuiamo l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y: $q=2$ quindi $P(0\,;2)$ è un punto della retta.

Troviamo un altro punto appartenente alla retta: se x=3 allora y=0, quindi $A(3\,;0)$ è un punto della retta.

Disegniamo la retta nel piano cartesiano: le coppie (x;y), coordinate dei punti della retta tracciata, sono le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.



Risolvi graficamente le seguenti equazioni, seguendo i passi sopra descritti:

349 $2x-2y+3=0$ $\qquad$ $-\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}y+1=0$

350 $x+2y+\frac{7}{4}=0$ $\qquad$ $\sqrt{2}\,x+\sqrt{6}\,y=0$

351 $-2x+4y-1=0$ $\qquad$ $2y+\frac{2}{3}x+6=0$

352 $-2y+3=0$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}y+\sqrt{6}=-x$

*Stabilisci quali coppie appartengono all'**I**nsieme **S**oluzione dell'equazione.*

353 $5x+7y-1=0$ $\qquad$ $\left(-\frac{7}{5};0\right)$, $\left(-\frac{1}{5};-1\right)$, $\left(0;\frac{1}{7}\right)$, $\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right)$

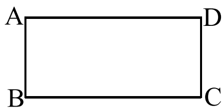
354 $-x+\frac{3}{4}y-\frac{4}{3}=0$ $\qquad$ $(0;-1)$, $\left(\frac{1}{12};\frac{17}{9}\right)$, $\left(-\frac{4}{3};0\right)$, $(-3;4)$

355 $-x-y+\sqrt{2}=0$ $\qquad$ $(\sqrt{2};0)$, $(0;-\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};-1)$, $(1;-1-\sqrt{2})$

►3. Definizione di sistema di equazioni

Problema

Nel rettangolo ABCD, la somma del doppio di AB con la metà di BC è di 98m; aumentando AB di 3m e BC di 2m il perimetro del rettangolo diventa di 180m. Determinare l'area in m^2 del rettangolo.



Dati: Obiettivo: Area

$2\,\overline{AB}+\frac{1}{2}\,\overline{BC}=98\ m.$

$2(\overline{AB}+3\,m+\overline{BC}+2\,m)=180\ m.$

Soluzione:

Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni $Area=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$ che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB}=x$ e $\overline{BC}=y$ otteniamo le due equazioni

$$2\,x+\frac{1}{2}\,y=98 \qquad\qquad 2(x+3+y+2)=180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

DEFINIZIONE. Si definisce **sistema di equazioni** l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene associando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

DEFINIZIONI

L'Insieme Soluzione (I.S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di numeri reali che rendono vere tutte le equazioni contemporaneamente.

Si chiama **grado di un sistema** il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama **sistema lineare**.

La **forma normale o canonica** di un sistema lineare è: $\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a_1\,x+b_1\,y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Il problema proposto si formalizza dunque con il sistema: $\begin{cases} 2\,x+\frac{1}{2}\,y=98 \\ 2(x+3+y+2)=180 \end{cases}$ composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 ed è un sistema lineare. La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione, si ottiene $\begin{cases} 2\,x+\frac{1}{2}\,y=98 \\ 2x+2y=170 \end{cases}$

►4. Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

Esempi

- Scrivere in forma canonica il sistema: $\begin{cases} 4\,x^2-(y+2\,x)^2=x+1-y(4\,x+y-1) \\ \dfrac{x-2}{2}+\dfrac{y+3}{3}=0 \end{cases}$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:

$\begin{cases} 4\,x^2-y^2-4\,x^2-4\,xy=x+1-4\,xy-y^2+y \\ 3\,x-6+2\,y+6=0 \end{cases}$

Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili:

$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ che è la forma canonica cercata.

■ Determinare la forma canonica del sistema: $\begin{cases} \dfrac{1}{y}=2\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x}=-2 \end{cases}$

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre la **C**ondizioni di **E**sistenza e individuare il **D**ominio del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà

C.E. $y \neq 0$ e $x \neq 0$ per cui $D=\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y}=2\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x}=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{2x}{y}-1 \\ 5x+4y+19=-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 7x+4y=-19 \end{cases}$$ Il sistema è lineare.

Determinare la forma canonica dei seguenti sistemi

356 $\begin{cases} 3x-\dfrac{3}{4}(2y-1)=\dfrac{13}{4}(x+1) \\ \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{1+y}{2}-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} y-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{4}=0 \\ \dfrac{2x+1}{1-x}+\dfrac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$

►5. Metodo di sostituzione

La **forma canonica** di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto, $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali. **Risolvere il sistema** significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.

Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'**I**nsieme **S**oluzione, cominciamo dal **metodo di sostituzione**.

Esempio

■ $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$.

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

- 1° passo: scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita.

Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita y

$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

- 2° passo: sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui è uguale.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2(2+3x)=7 \end{cases}$

- 3° passo: svolgiamo i calcoli nella seconda equazione.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases}$

- 4° passo: risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile.

Nel nostro esempio, ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \rightarrow x=-11 \end{cases}$

- 5° passo: sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata, avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione.

Nel nostro esempio $\begin{cases} y = 2 + 3x \\ -x = 7 + 4 \Rightarrow x = -11 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = -11 \\ y = -31 \end{cases}$

- 6° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio $I.S. = \{(-11 ; -31)\}$

In conclusione, **il sistema è determinato**, la coppia ordinata $(-11 ; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Esempio

■ $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+3\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} \\ y\left(1+\frac{2}{5}\right)-2=\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5} \end{cases}$

Il sistema non si presenta nella forma canonica.

Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica: $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x+7y=15 \end{cases}$

Ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di x con facilità e senza frazioni:

Sostituiamo nella prima equazione al posto di x l'espressione trovata: $\begin{cases} 3\cdot(15-7y)+18y=-2 \\ x = 15-7y \end{cases}$

Risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita y: $\begin{cases} 3y=-47 \Rightarrow y=-\frac{47}{3} \\ x = 15-7y \end{cases}$

Sostituiamo il valore di y nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\frac{344}{3} \\ y=-\frac{47}{3} \end{cases}$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni: $I.S. = \left\{\left(\frac{344}{3} ; -\frac{47}{3}\right)\right\}$

In conclusione, **il sistema è determinato;** la coppia ordinata $\left(\frac{344}{3} ; -\frac{47}{3}\right)$ verifica le due equazioni del sistema.

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione

357 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

358 $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ *R.* $(1,-1)$ $\begin{cases} x+4y-1=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+1=-\frac{x}{6}-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

359 Risolvere il sistema che formalizza il problema del paragrafo 3: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+3y=170 \end{cases}$, concludere il problema determinando l'area del rettangolo.

360 Determinare due numeri reali x e y tali che il triplo della loro somma sia uguale al doppio del primo aumentato di 10 e il doppio del primo sia uguale al prodotto del secondo con 5.

►6. Metodo del confronto

Presentiamo questo secondo metodo applicandolo direttamente a un

esempio

■ $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

- 1° passo: ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita.

Nel nostro esempio ricaviamo la y contemporaneamente da entrambe le equazioni: $\begin{cases} y=2+3x \\ y=\dfrac{5x-7}{2} \end{cases}$

- 2° passo: poiché il primo membro di entrambe le equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una solo incognita.

Nel nostro esempio $2+3x=\dfrac{5x-7}{2}$

- 3° passo: si risolve l'equazione trovata e si determina il valore di una delle due incognite

Nel nostro esempio $4+6x=5x-7 \rightarrow x=-11$

- 4° passo: si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita.

Nel nostro esempio $\begin{cases} x=-11 \\ y=2+3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$

- 5° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio: $I.S.=\{(-11;-31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata (-11;-31) verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi

361 $\begin{cases} x+y=x \\ 2x+y=2 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

362 $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+2y=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

363 $\begin{cases} y-\dfrac{3x-4}{2}=1-\dfrac{y}{4} \\ 2y-2x=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$ *R.* $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$

364 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{6}x=5-\dfrac{6x+10}{8} \\ 8(x-2)+3x=40-6\left(y-\dfrac{1}{6}\right) \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

365 In un triangolo isoscele la somma della base con il doppio del lato è 168m e la differenza tra la metà della base e 1/13 del lato è 28m. Indicata con x la misura della base e con y quella del lato, risolvete con il metodo del confronto il sistema lineare che formalizza il problema. Determinate l'area del triangolo.

►7. Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A=B$ e $C=D$ possiamo dedurre da queste la nuova equazione $A+C=B+D$

$$\begin{cases} A=B \\ C=D \end{cases} \rightarrow \quad A+C=B+D$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

Esempi

- $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x-5y)+(2x+5y)=1-4$

I termini in y si eliminano perché opposti, sommando i monomi simili si ha $5x=-3 \rightarrow x=-\frac{3}{5}$.

- $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otterremmo $8x-9y=-3$ che non è in una sola incognita.
Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite 'sparisce'.
Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicare questo metodo in ogni caso. Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo trasformare opportunamente le due equazioni affinché l'incognita x appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.
Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per –3, otteniamo:

$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} 15x-25y=5 \\ -15x+12y=12 \end{cases}$; sommiamo le due equazioni

$(15x-25y)+(-15x+12y)=5+12 \quad \rightarrow \quad -13y=17 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{17}{13}$.

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita. Oppure possiamo moltiplicare le equazioni per opportuni coefficienti numerici in modo che si elimini l'altra incognita.
Nel nostro esempio moltiplichiamo come segue:

$\begin{matrix} +4 \\ -5 \end{matrix}\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} 12x-20y=4 \\ -25x+20y=20 \end{cases}$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x=24 \rightarrow x=-\frac{24}{13}$

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $\left(-\frac{24}{13};-\frac{17}{13}\right)$.

- $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

Osserviamo che l'incognita y ha coefficienti di segno opposto nelle due equazioni: moltiplichiamo la prima equazione per 2 e lasciamo in variata la seconda:

$\begin{cases} -6x+2y=4 \\ 5x-2y=7 \end{cases} \rightarrow -6x+2y+5x-2y=4+7 \rightarrow -x=11 \rightarrow x=-11$.

Per eliminare la x, moltiplichiamo la prima equazione per 5 e la seconda per 3

$\begin{cases} -15x+5y=10 \\ 15x-6y=21 \end{cases} \rightarrow -15x+5y+15x-6y=10+21 \rightarrow -y=31 \rightarrow y=-31$

$I.S.=\{(-11;-31)\}$.

Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a_1\,x+b_1\,y=c_1 \end{cases}$ $con\ \ a\,,b\,,c\,,a_1,b_1,c_1\ \ numeri\ \ reali$; dal momento che è sempre possibile moltiplicare un’equazione per un qualunque numero diverso da zero, ottenendo un’equazione equivalente alla data, in ogni caso possiamo ottenere, sommando le equazioni del sistema, un’equazione in cui manca l’incognita x e un’equazione dove manca la y:

- 1° passo: per eliminare y moltiplichiamo la prima per b_1 e la seconda per $-b$:
  $\begin{cases} ab_1\,x+bb_1\,y=cb_1 \\ -a_1\,b\,x-bb_1\,y=-bc_1 \end{cases}$
- 2° passo: sommiamo le due equazioni: $ab_1\,x-a_1\,bx=cb_1-bc_1 \ \rightarrow\ (ab_1-a_1\,b)\,x=cb_1-bc_1$ in cui compare solo l’incognita x
- 3° passo: ricaviamo l’incognita x: $x=\dfrac{c\,b_1-b\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b}\ \ con\ \ a\,b_1-a_1\,b\neq 0$ (*)
- 4° passo: per eliminare x moltiplichiamo la prima per $-a_1$ e la seconda per a:
  $\begin{cases} -a\,a_1\,x+b\,a_1\,y=-a_1\,c \\ a\,a_1\,x+a\,b_1\,y=a\,c_1 \end{cases}$
- 5° passo: sommiamo le due equazioni:
  $-a_1\,b\,y+a\,b_1\,y=-a_1\,c+a\,c_1 \ \rightarrow\ (a\,b_1-a_1\,b)\,y=a\,c_1-a_1\,c$ in cui compare solo l’incognita y
- 6° passo: ricaviamo l’incognita y: $y=\dfrac{a\,c_1-a_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b}\ \ con\ \ a\,b_1-a_1\,b\neq 0$ (**)

La soluzione è $\left(\dfrac{c\,b_1-b\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b}\,;\dfrac{a\,c_1-a_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b}\right)\ con\ \ a\,b_1-a_1\,b\neq 0$.

Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione

366 $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2\,x+y=1 \\ 2\,x-y=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

367 $\begin{cases} 2\,x+y=1+y \\ 4\,x+y=2 \end{cases}$ *R.* $\left(\dfrac{1}{2}\,;y=0\right)$ $\qquad \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ *R.* $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$

368 $\begin{cases} x-y=0 \\ -2\,x+3\,y=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2\,x=3-x \\ 2\,x+y=3 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

369 $\begin{cases} \dfrac{4}{3}x-\dfrac{4\,y-x}{2}+\dfrac{35}{12}-\dfrac{x+y}{4}=0 \\ \dfrac{3(x+y)}{2}-\dfrac{1}{2}(5\,x-y)=\dfrac{1}{3}(11-4\,x+y) \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

370 Il segmento AB misura 80cm; il punto P lo divide in due parti tali che il quadruplo della parte minore uguagli il triplo della differenza fra la maggiore e il triplo della minore. Determinare $\overline{AP}\ \ e\ \ \overline{PB}$, formalizzando il problema con un sistema lineare che risolverete con il metodo di riduzione.

►8. Metodo di Cramer

DEFINIZIONE. Si chiama **matrice del sistema lineare** di due equazioni in due incognite la tabella $\begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama **determinante della matrice** il numero reale $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1$ ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione

$$\left(\frac{c\,b_1-b\,c_1}{a\,b_1-a_1\,b};\frac{a\,c_1-a_1\,c}{a\,b_1-a_1\,b}\right)\ con\ \ a\,b_1-a_1\,b\neq 0$$

possiamo dedurre che:

Un **sistema lineare** è **determinato**, ammette cioè una sola coppia soluzione **se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero**.

371 Stabilire se il sistema $\begin{cases}(x-1)(x+1)-3(x-2)=2(x-y+3)+x^2 \\ x(x+y-3)+y(4-x)=x^2-4x+y\end{cases}$ è determinato.

372 Verificare che il determinante della matrice del sistema $\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}y=10^5 \\ 6x-7y=5^{10}\end{cases}$ è nullo.

La regola di Cramer, dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752), ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

- D il determinante della matrice del sistema: $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1$
- D_x il determinante $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della prima colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (*)
- D_y il determinante $D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della seconda colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (**)

Con la condizione $D\neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$x=\frac{D_x}{D};\quad y=\frac{D_y}{D}$$

Esempio

- $\begin{cases}2x+3y=4 \\ 4x-3y=2\end{cases}$

Calcoliamo i determinanti

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \rightarrow D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot 4=-6-12=-18$

Poiché $D\neq 0$ il sistema è determinato

$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-3\cdot 2=-12-6=-18$

$D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1 \rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 4=4-16=-12$

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-18}=1$

$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-12}{-18}=\frac{2}{3}$.

Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi

373 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{13}{12};\frac{5}{12}\right)$

374 $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$ $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ R. $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

375 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$ R. $(21,-12)$ $\begin{cases} \frac{y}{5}-\frac{x}{2}=10 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{240}{19};\frac{350}{19}\right)$

376 $\begin{cases} 2(x-2y)+3x-2(y+1)=0 \\ x-2(x-3y)-5y=6(x-1) \end{cases}$ R. $\left(\frac{34}{37};\frac{16}{37}\right)$

377 $\begin{cases} 4-2x=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{2x+3y}{2}=\frac{7+2x}{2} \end{cases}$ R. $\left(1;\frac{7}{3}\right)$

378 Risolvi col metodo di Cramer il sistema $\begin{cases} 25x-3y=18 \\ \frac{3(y+6)}{5}=5x \end{cases}$. Cosa osservi?

►9. Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ ricordando che:

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=a\cdot b_1-b\cdot a_1 \quad D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}=c\cdot b_1-b\cdot c_1 \quad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}=a\cdot c_1-c\cdot a_1$$

- Se $D\neq 0$ il sistema è **determinato**, esiste una sola coppia soluzione $x=\frac{D_x}{D};\quad y=\frac{D_y}{D}$
- Se $D=0$ si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se $D_x=0$ e $D_y=0$ il sistema è **indeterminato**, tutte le coppie di numeri reali verificano entrambe le equazioni, $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **;**
  - 2° caso: se $D_x\neq 0$ e $D_y\neq 0$ il sistema è **impossibile**, non esiste alcuna coppia che soddisfa entrambi le equazioni e $I.S.=\emptyset$

Esempi

- $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot(-3)=-6-9=-15\neq 0$ il sistema è determinato.

- $\begin{cases} 8x-6y=2 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)-4\cdot(-6)=-24+24=0$ il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x=\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-(-6)\cdot 1=-6+6=0 \quad D_y=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot 1-2\cdot 4=8-8=0$

Il sistema è indeterminato.

- $\begin{cases} 8x-6y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=8\cdot(-3)-4\cdot(-6)=-24+24=0$ il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-(-6)\cdot 2=-3+12=+9 \quad D_y=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=8\cdot 2-1\cdot 4=16-4=12$

Il sistema è impossibile.

Osserviamo che se D=0 si ha $a \cdot b_1 - b \cdot a_1 = 0 \rightarrow a \cdot b_1 = b \cdot a_1 \rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$. Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi D_x=0 si ha $c \cdot b_1 - b \cdot c_1 = 0 \rightarrow c \cdot b_1 = b \cdot c_1 \rightarrow \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$. Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ il sistema è indeterminato.

Se invece $D_x \neq 0$, cioè $\frac{c}{c_1} \neq \frac{b}{b_1}$ il sistema è impossibile.

379 Distingui tra i seguenti sistemi quello determinato da quello impossibile o indeterminato:

A $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-8y=12 \end{cases}$ B $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ C $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$

Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

380 $\begin{cases} \frac{1}{7}x - \frac{4}{5}y = 0 \\ \frac{5}{4}x - 7y = \frac{19}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 4 - 2y \\ x + y = 2 \end{cases}$

381 $\begin{cases} -40x + 12y = -3 \\ 17x - 2y = 100 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

382 $\begin{cases} -x + 3y = -\frac{8}{15} \\ 5x - 15y = \frac{2^3}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{2} = -\frac{y}{2} + 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

383 La somma di due numeri reali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri.

384 Stabilisci per quale valore di a il sistema $\begin{cases} ax + y = -2 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$ è determinato. Se $a = -\frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile?

385 Perché se $a = \frac{1}{3}$ il sistema $\begin{cases} x + ay = 2a \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ è indeterminato?

►10. Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

Concetto algebrico	Concetto geometrico
Coppia ordinata di numeri reali	Punto del piano dotato di riferimento cartesiano
Equazione lineare	Retta
Coppia soluzione dell'equazione $ax + by + c = 0$	Punto della retta di equazione $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Problema

Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

Indichiamo con x e y i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni:

$$x+y=6 \quad \text{e} \quad 2x+\frac{1}{2}y=6$$

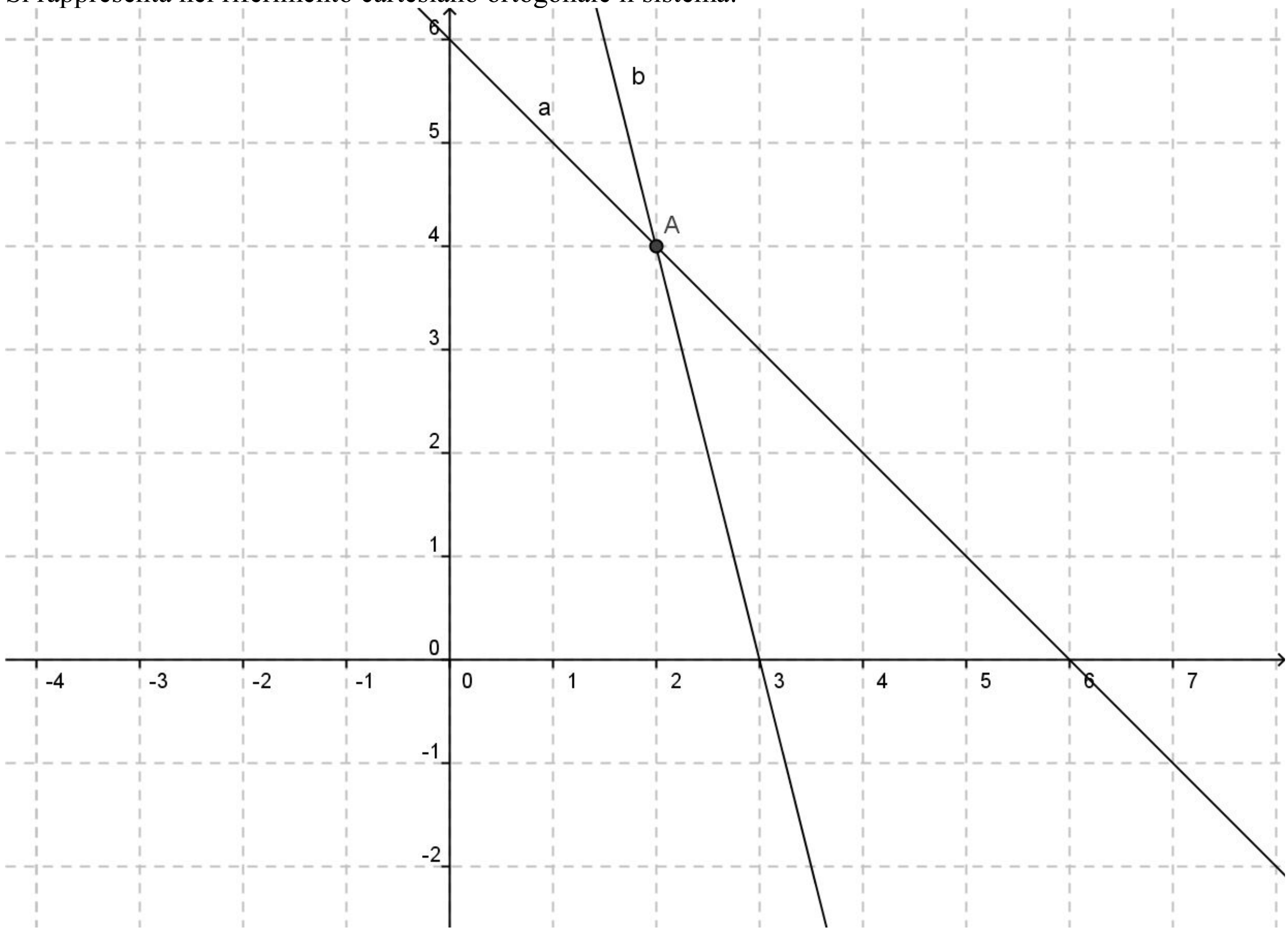
Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

Il punto di vista algebrico:

La coppia di numeri reali x e y che risolve il problema è quella che risolve il sistema $\begin{cases} x+y=60 \\ 2x+\frac{1}{2}y=6 \end{cases}$.

Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene x=2 e y=4.

Il punto di vista geometrico:
Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione, quindi il punto di intersezione delle due rette.
Si rappresenta nel riferimento cartesiano ortogonale il sistema:



La retta *a* è quella di equazione $x+y=6$, che passa per i punti (6,0) e (0,6).

La retta *b* è quella di equazione $2x+\frac{1}{2}y=6$, che passa per i punti (3,0) e (0,12).

Il punto A(2,4) è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.

Esempio

- $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:
Portiamo in forma canonica il sistema, otteniamo:

$\begin{cases}2x-3y=7\\x+y+6=5(x-y+1)\end{cases} \to \begin{cases}2x-3y=7\\x+y+6=5x-5y+5\end{cases} \to \begin{cases}2x-3y=7\\-4x+6y=-1\end{cases}$

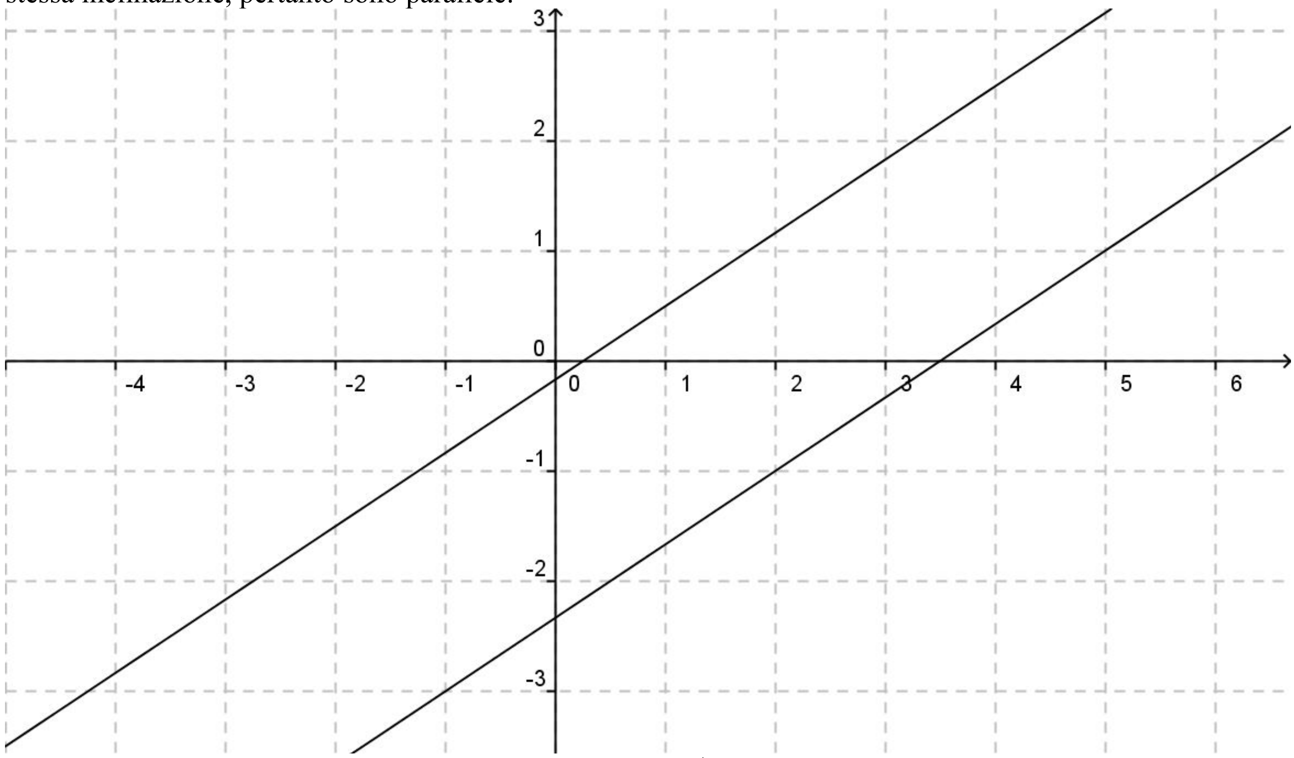
Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione: $\frac{a}{a_1}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$;

$\frac{b}{b_1}=\frac{-3}{+6}=-\frac{1}{2}$, mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione $\frac{c}{c_1}=\frac{7}{-1}$ quindi il sistema è impossibile: $I.S.=\emptyset$.

Il punto di vista geometrico

Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\\y=\frac{2}{3}x-1\end{cases}$ le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, il coefficiente della x e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele.



Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2=\emptyset$, il sistema è impossibile $I.S.=\emptyset$.

Esempio

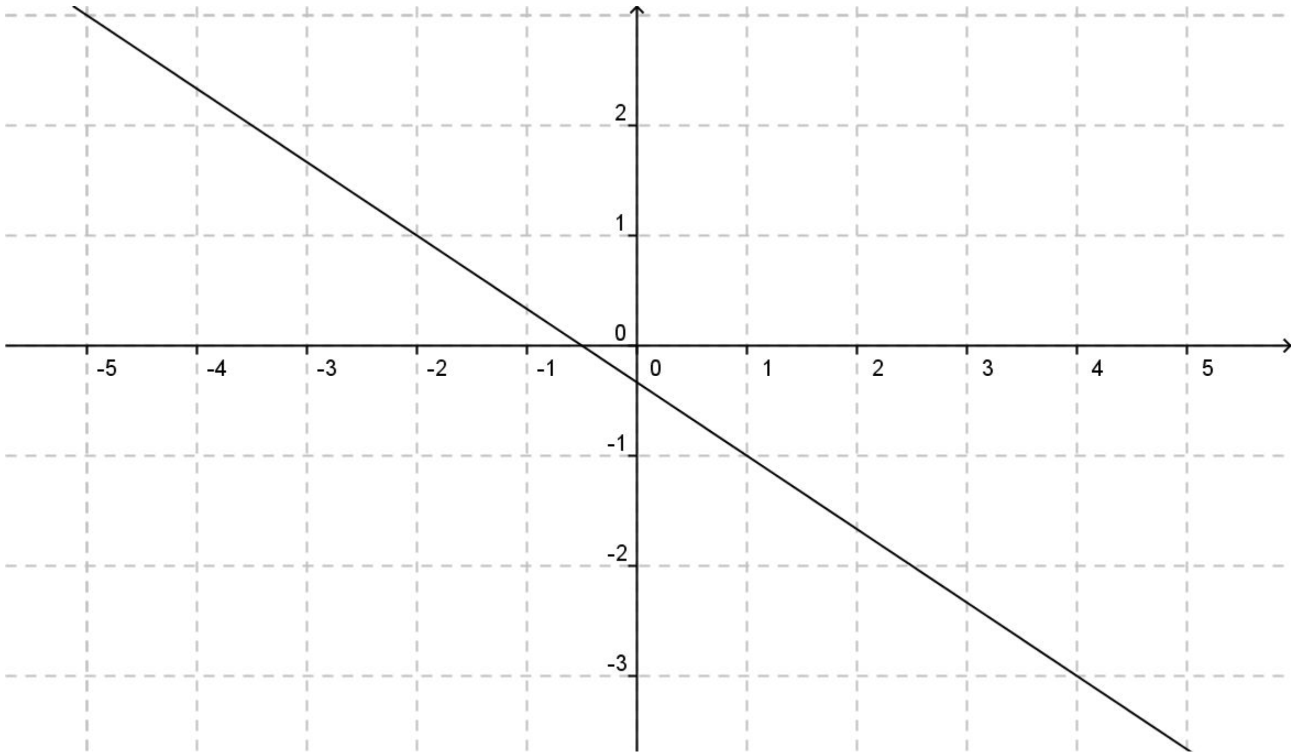
■ $\begin{cases}2x+3y+1=0\\y+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x\end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases}2x+3y=-1\\2x+3y=-1\end{cases}$. Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie (x, y) che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda: $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Il punto di vista geometrico:

Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. E' semplice rendersi conto che le due rette coincidono: tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell’altra; $r_1 \cap r_2=r_1=r_2$.



Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato:

386 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ I.S. = …….

387 $\begin{cases} y=2x-2 \\ y=3x+1 \end{cases}$ I.S. = …….

388 $\begin{cases} y=x-1 \\ 2y=2x-2 \end{cases}$ I.S. = …….

389 $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 2y-x=2 \end{cases}$ I.S. = …….

390 $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=-\dfrac{y}{3}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$ I.S. = …….

391 $\begin{cases} y-\dfrac{3-2x}{3}=\dfrac{x-y}{3}+1 \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{5}{4}=y+\dfrac{2-3x}{4} \end{cases}$ I.S. = …….

392 $\begin{cases} 3(x-4)=-\dfrac{4y}{5} \\ 7(x+y)+8\left(x-\dfrac{3y}{8}-2\right)=0 \end{cases}$ I.S. = …….

393 $\begin{cases} \dfrac{2}{5}(y-x-1)=\dfrac{y-x}{3}-\dfrac{2}{5} \\ (x-y)^2-x(x-2y)=x+y(y-1) \end{cases}$ I.S. = …….

394 $\begin{cases} 2x-3(x-y)=-1+3y \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$ I.S. = …….

395 Rispondi:

Risolvere graficamente un sistema lineare significa trovare il punto di intersezione di due rette	V	F
Un sistema lineare, determinato ha una sola coppia soluzione	V	F
Un sistema lineare è impossibile quando le due rette coincidono	V	F

396 Completa:

se $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = P$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ allora il sistema è ………………………………

Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente

397 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=1+3y \\ -y-2x=3 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

398 $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{7}{5};\frac{6}{5}\right)$ $\begin{cases} 5x-y=2 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{5}{17};-\frac{9}{17}\right)$

399 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ *R.* $(1;1)$ $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$

400 $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{7}{19};\frac{1}{19}\right)$ $\begin{cases} 7x-2y=4 \\ 8x-6y=9 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{3}{13};-\frac{31}{26}\right)$

401 $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{22}{13};\frac{7}{13}\right)$ $\begin{cases} 3x-y=7 \\ x-2y=5 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$

402 $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-2x=7 \\ -x-2y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{7}{3};-\frac{11}{12}\right)$

403 $\begin{cases} \frac{2}{3}x-2y=-\frac{1}{6} \\ -y-\frac{2}{3}y=\frac{3}{2} \end{cases}$ *R.* $\left(-\frac{59}{20};-\frac{9}{10}\right)$ $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y+1=0 \\ 9y-2x-6=0 \end{cases}$ indeterminato

404 $\begin{cases} -\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0 \\ 3x-\frac{1}{5}y+\frac{3}{2}=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\frac{123}{266} \\ y=\frac{75}{133} \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{2}{3}y+3x=y \\ x-\frac{1}{2}y+3=0 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-30 \\ y=-54 \end{cases}$

405 $\begin{cases} 5y+\frac{3}{2}x=-2 \\ 3x+10y-3=0 \end{cases}$ impossibile $\begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=\frac{1}{2} \\ 3(y-2)+x=0 \end{cases}$ *R.* $\left(\frac{13}{3};\frac{5}{9}\right)$

406 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)-y=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{3}{2}(y-2)+x=6\left(x+\frac{1}{3}\right) \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\frac{50}{47} \\ y=-\frac{10}{47} \end{cases}$

407 $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{2}-y+5}{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}=x-\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}{2} \\ -x-\dfrac{\frac{y}{3}-x}{2}=1 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=-\frac{92}{27} \\ y=\frac{38}{9} \end{cases}$

408 $\begin{cases} x^2+\frac{y}{4}-3x=\frac{(2x+1)^2}{4}-\frac{y}{2} \\ (y-1)^2=-8x+y^2 \end{cases}$ *R.* $\begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=1 \end{cases}$

409 $\begin{cases} \dfrac{x+4y}{6}-3=0 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

410 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x+1}{2}-y}{2}=y-20x \\ x-\dfrac{y}{4}=\dfrac{x-y}{6} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{21} \\ y=-\dfrac{10}{21} \end{cases}$

411 $\begin{cases} \dfrac{4y-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{5}{6}}=x-2y \\ x=3y \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{27}{26} \\ y=\dfrac{9}{26} \end{cases}$

►11. Sistemi fratti

Nel seguente sistema $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$ di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema fratto o frazionario** il sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

DEFINIZIONE. Si chiama **Dominio** (**D**) o **Insieme di Definizione** (**I.D.**) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diverso da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

Esempi

■ $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$

1° passo: scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il m.c.m.

$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y-2}=\dfrac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases} \rightarrow \quad m.c.m.=(x+1)(y-2)$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio del sistema:

$C.E.\ x\neq -1 \ e \ y\neq 2 \ \rightarrow \ D=I.S.=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\neq -1 \ e \ y\neq 2\}$.

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione, svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y=11 \\ 11x+15y=6 \end{cases}$

4° passo: risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $\left(-\dfrac{123}{152};\dfrac{151}{152}\right)$ che è accettabile.

■ $\begin{cases} \dfrac{3x+y-1}{x}=3 \\ \dfrac{2x+3y}{y-1}=7 \end{cases}$

1°passo: per la prima equazione si ha $m.c.m.=x$; per la seconda $m.c.m.=y-1$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio:
$C.E.\ x\neq 0\ e\ y\neq 1 \ \rightarrow \ D=I.S.=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\neq 0\ e\ y\neq 1\}$

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione: $\begin{cases}3x+y-1=3x\\2x+3y=7y-7\end{cases}$

4° passo: determiniamo la forma canonica: $\begin{cases}y-1=0\\2x-4y=-7\end{cases}$

5° passo: determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione: $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ che non accettabile poiché contraddice la C.E. e quindi non appartiene al dominio. Il sistema assegnato è quindi impossibile $I.S.=\emptyset$ **.**

412 $\begin{cases}\dfrac{4y+x}{5x}=1\\\dfrac{x+y}{2x-y}=2\end{cases}$

Completa la traccia di soluzione
1° passo: per la prima equazione si ha $m.c.m.=\ldots\ldots$; per la seconda $m.c.m.=\ldots\ldots$
2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio:
$C.E.\ x\ldots\ldots\ e\ y\neq 2\text{x} \ \rightarrow \ D=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\ldots\ldots\ e\ y\neq 2\text{x}\}$
3° passo: riduciamo allo stesso denominatore le equazioni: … … … … … … … … … …
4° passo: otteniamo la forma canonica: $\begin{cases}4y-4x=0\\3x-3y=0\end{cases}$
Risolvendo con qualunque metodo otteniamo che il sistema è indeterminato: ci sono infinite coppie che verificano il sistema.
Quali delle seguenti coppie risolvono il sistema?

[A] $(0;0)$ [B] $(1,-1)$ [C] $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ [D] $(3;4)$ [E] $(1;1)$ [F] $\left(\frac{3}{4};-\frac{4}{5}\right)$

413 La coppia soluzione del sistema $\begin{cases}y=\dfrac{4x-9}{12}\\\dfrac{y+2}{y-1}+\dfrac{1+2x}{1-x}+1=0\end{cases}$ è accettabile?

414 Verifica che la somma dei quadrati degli elementi della coppia soluzione del sistema $\begin{cases}\dfrac{x-y+1}{x+y-1}=2\\\dfrac{x+y+1}{x-y-1}=-2\end{cases}$ è uguale a 1.

415 Spiega perché gli elementi della coppia soluzione del sistema $\begin{cases}\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{y-3}\\\dfrac{1}{y+3}=\dfrac{-1}{2-x}\end{cases}$ non possono rappresentare la misura dei lati di un rettangolo.

416 Scarta, tra quelle proposte, la coppia che <u>non</u> appartiene all'**I**nsieme **S**oluzione di alcuno dei seguenti sistemi:

$a)\ \begin{cases}2x-y-11=0\\\dfrac{y+1}{x-1}+\dfrac{3-y}{5x-5}-\dfrac{2}{3}=0\end{cases};\quad b)\ \begin{cases}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{y+2}{y-2}\\\dfrac{3x-1}{3x-2}=\dfrac{1+y}{y-2}\end{cases};\quad c)\ \begin{cases}\dfrac{2}{5x-y}=\dfrac{-3}{5y-x}\\\dfrac{1}{4x-3y}=\dfrac{2x+y-1}{3y-4\text{x}}\end{cases}$

$\left(\frac{6}{5};\frac{34}{5}\right);\ (14;-26);\ (-3;14);\ (7;3)$

417 È vero che gli elementi della coppia soluzione del sistema $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{y-\sqrt{3}}=0\\\dfrac{1}{x-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2(y+2\sqrt{2})}=0\end{cases}$ sono opposti?

Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi:

418 $\begin{cases} 2+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{3x}{y}-1=\dfrac{-2}{y} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{11} \\ y=\dfrac{7}{11} \end{cases}$

419 $\begin{cases} \dfrac{y}{2x-1}=-1 \\ \dfrac{2x}{y-1}=1 \end{cases}$ impossibile

420 $\begin{cases} \dfrac{3x}{y}-\dfrac{7}{y}=1 \\ \dfrac{2y}{x}+\dfrac{5}{x}=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{8}{5} \end{cases}$

421 $\begin{cases} \dfrac{2x}{3y}-\dfrac{1}{3y}=1 \\ \dfrac{3}{y+2x}=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

422 $\begin{cases} \dfrac{x}{9y}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3y} \\ \dfrac{9y}{2x}-1-\dfrac{3}{x}=0 \end{cases}$ indeterminato

423 $\begin{cases} \dfrac{x}{2-\dfrac{y}{2}-2}=1 \\ \dfrac{x-y}{x+\dfrac{3}{2}y-1}=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

424 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}-\dfrac{1}{6}}{x+y-2}=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=39 \\ y=-38 \end{cases}$

425 $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{\dfrac{x-y}{2}+2x}{4} \\ \dfrac{x}{\dfrac{y}{3}+1}=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

►12. Sistemi letterali

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema letterale** il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con x e y, compaiono altre lettere dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione

A. Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

Esempio

■ $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$

E' un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.
Per **discussione del sistema letterale** s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato.
Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=4a+2$
- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero:
  $4a+2\neq 0 \rightarrow a\neq 0-\frac{1}{2}$. Se $a\neq -\frac{1}{2}$ il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione
  $D_x=\begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix}=a\cdot(a-1)$ $D_y=\begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix}=2a^2$ $\rightarrow$ $x=\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}$; $y=\frac{2a^2}{4a+2}$
- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=-\frac{1}{2}$ **;** poiché per questo valore di a i determinanti D_x e D_y sono diversi da zero si ha che per $a=-\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a\neq -\frac{1}{2}$	$I.S=\left\{\left(\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}; \frac{2a^2}{4a+2}\right)\right\}$	determinato
$a=-\frac{1}{2}$	$I.S.=\emptyset$	impossibile

B. Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

Esempio

■ $\begin{cases} \frac{y+a}{3}-\frac{a-x}{a-1}=a \\ \frac{x+2a}{a}-3=\frac{y}{2}-a \end{cases}$

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme R quei valori che annullano il denominatore.
Se $a=1$ oppure $a=0$ ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema.
Con le condizioni di esistenza $C.E.\ a\neq 1\ e\ a\neq 0$ possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x+(a-1)y=2a^2+a \\ 2x-ay=2a-2a^2 \end{cases}$

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 3 & (a-1) \\ 2 & -a \end{vmatrix}=2-5a$

- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2-5a\neq 0 \rightarrow a\neq \frac{2}{5}$

  Se $a\neq \frac{2}{5}$ il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$$D_x=\begin{vmatrix} 2a^2+a & -(a-1) \\ 2a-2a^2 & 3 \end{vmatrix}=a\cdot(2a-5),\quad D_y=\begin{vmatrix} 3 & 2a^2+a \\ 2 & 2a-2a^2 \end{vmatrix}=2a\cdot(2-5a)$$

$$x=\frac{a\cdot(2-5a)}{2-5a};\ y=\frac{2a\cdot(2-5a)}{2-5a}\quad \text{e semplificando } (a\,;\,2a)$$

- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=\frac{2}{5}$ **;** poiché anche i determinanti D_x e D_y si annullano si ha

  Se $a=\frac{2}{5}$ il sistema è indeterminato.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a=0 \vee a=1$		privo di significato
$a\neq \frac{2}{5}$ **e** $a\neq 1$ e $a\neq 0$	$I.S=\{(a\,;\,2a)\}$	determinato
$a=\frac{2}{5}$	$I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	indeterminato

C. Il sistema è frazionario

Esempio

■ $\begin{cases} \frac{y-a}{x}=\frac{2}{a} \\ x+y=1 \end{cases}$

Il sistema letterale è fratto e nel denominatore oltre al parametro compare l'incognita x:
Se $a=0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato; per poter procedere alla ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza $C.E.\ a\neq 0$. (*)
Essendo fratto dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema $D=\{(x\,;\,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ (**)

- 1° passo: portiamo nella forma canonica: $\begin{cases} -2x+ay=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ $con\ a\neq 0\ e\ x\neq 0$
- 2° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-a=-(2+a)$
- 3° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2-a\neq 0\rightarrow a\neq -2$
  Se a ≠ −2 il sistema è determinato.
- 4° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione
  $D_x=\begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot(a-1)$ $D_y=\begin{vmatrix} -2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-a^2=-(2+a^2)$ $\rightarrow$ $x=-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a};\ y=\frac{a^2+2}{2+a}$

  è la coppia soluzione accettabile se $x=-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a}\neq 0$ per quanto stabilito in (**); essendo $a\neq 0$ per la (*) la coppia soluzione è accettabile se $a\neq 1$.
- 5° passo: il determinante D è nullo se $a=-2$; essendo i determinanti D_x e D_y diversi da zero si ha: se $a=-2$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Condizioni sulle incognite	Insieme Soluzione	Sistema
	$x\neq 0$		
$a=0$			privo di significato
$a\neq -2\ e\ a\neq 0$		$I.S=\left\{\left(-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a};\frac{a^2+2}{2+a}\right)\right\}$	determinato
$a\neq -2\ e\ a\neq 0\ e\ a\neq 1$		accettabile	
$a=-2$			impossibile

426 Risolvere e discutere il sistema: $\begin{cases} x+ay=2a \\ \frac{x}{2a}+y=\frac{3}{2} \end{cases}$; per quali valori di *a* la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi? [R. a>0]

427 Perché se il sistema $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{2x-y}{x+1}=\frac{1}{a} \end{cases}$ è determinato la coppia soluzione è accettabile?

428 Nel sistema $\begin{cases} \frac{a-x}{a^2+a}+\frac{y-2a}{a+1}=-1 \\ 2y=x \end{cases}$ è vero che la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi se $a>2$?

429 Spiegate perché non esiste alcun valore di *a* per cui la coppia (0;2) appartenga a I.S. del sistema:
$\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{2x-y}{x+1}=\frac{1}{a} \end{cases}$

430 Nel sistema $\begin{cases} \frac{y}{x}-\frac{y-a}{3}=\frac{1-y}{3} \\ a(x+2)+y=1 \end{cases}$ determinate i valori da attribuire al parametro a affinché la coppia soluzione accettabile sia formata da numeri reali positivi. $\left[R. -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}\right]$

►13. Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Problema

Determinare tre numeri reali x, y, z (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità.

Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

- il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo $\rightarrow 2x=-y$
- la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla $\rightarrow x-3z=0$
- la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità $\rightarrow y+z=x+4$

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado $\begin{cases} 2x=-y \\ x-3z=0 \\ y+z=x+4 \end{cases}$ di tre equazioni in tre incognite.

Osserviamo dalla prima equazione si può ricavare facilmente la y che possiamo sostituire nelle altre due equazioni: $\begin{cases} y=-2x \\ x-3z=0 \\ -2x+z=x+4 \end{cases}$

ottenendo due equazioni nelle sole due incognite x e z: $\begin{cases} y=-2x \\ x-3z=0 \\ -3x+z=4 \end{cases}$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di z $\begin{cases} y=-2x \\ x=3z \\ -3x+z=4 \end{cases}$

Sostituiamo il valore di x nell'ultima equazione $\begin{cases} y=-2x \\ x=3z \\ -3(3z)+z=4 \end{cases}$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita $\begin{cases} y=-2x \\ x=3z \\ z=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Sostituiamo il valore ottenuto di z nella seconda equazione $\begin{cases} y=-2x \\ x=3\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \\ z=-\frac{4}{9} \end{cases}$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di x nella prima equazione $\begin{cases} y=3 \\ z=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$

La terna di numeri cercata è $\left(-\frac{3}{2};3;-\frac{1}{2}\right)$.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} 3x+y-z=7 \\ x+3y+z=5 \\ x+y-3z=3 \end{cases}$

Procediamo con il metodo di riduzione con l'obiettivo di eliminare l'incognita z.
Sommiamo le prime due equazioni: $4x+4y=12$
Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza: $3(x+3y+z)+x+y=3\cdot 5+3=4x+10y=18$

Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite x e y: $\begin{cases} 4x+4y=12 \\ 4x+10y=18 \end{cases}$

Moltiplichiamo la seconda equazione per –1 e sommiamo le due equazioni:
$\begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y=-18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y+4x+4y=-18+12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -6y=-6 \rightarrow y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$;

la terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x+2y-3z=6-3y \\ 2x-y+4z=x \\ 3x-z=y+2 \end{cases}$

Riscriviamo il sistema in forma normale $\begin{cases} x+2y+3y-3z=6 \\ 2x-x-y+4z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x+5y-3z=6 \\ x-y+4z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$

Ricaviamo una delle variabili da una equazione e sostituiamo la sua espressione nelle altre due equazioni; conviene ricavare una variabile che ha coefficiente 1 o -1, proviamo ricavando x dalla prima equazione:
$\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ x-y+4z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ -5y+3z+6-y+4z=0 \\ 3(-5y+3z+6)-y-z=2 \end{cases}$ quindi $\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ -6y+7z=-6 \\ -16y+8z=-16 \end{cases}$

Risolviamo il sistema formato dalla due ultime equazioni nelle incognite y, z:
$\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ sostituiamo i valori trovati nella prima equazione e ricaviamo x: $\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

La soluzione del sistema è la terna: $x=1, y=1, z=0$.

Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi

431 $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-y=2 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-3y+6z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$ *R.* $\left(3;\frac{8}{9};\frac{1}{9}\right)$

432 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-4z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};-\frac{2}{7};-\frac{1}{14}\right)$ $\begin{cases} x-3y+6z=1 \\ x+y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-5 \\ y=6 \\ z=4 \end{cases}$

433 $\begin{cases} x-4y+6z=2 \\ x+4y-z=2 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-y-2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

434 $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-6y+8z=2 \\ 3x-4y+8z=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

435 $\begin{cases} 4x-6y-7z=-1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+6z=1 \end{cases}$ $\left(\frac{9}{31};\frac{17}{31};-\frac{5}{31}\right)$ $\begin{cases} 4x-3y+z=4 \\ x+4y-3z=2 \\ y-7z=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{6};\frac{7}{30};\frac{1}{30}\right)$

436 $\begin{cases} 3x-6y+2z=1 \\ x-4y+6z=5 \\ x-y+4z=10 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-y-7z=-12 \\ x+3y+z=-4 \\ 2x-y+6z=5 \end{cases}$ $\left(-\frac{60}{43};-\frac{53}{43};\frac{47}{43}\right)$

437 $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ $\left(\frac{10}{3};-3;\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} 3x-y+z=-1 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=6 \\ y=11 \\ z=-8 \end{cases}$

438 $\begin{cases} x-4y+2z=7 \\ -3x-2y+3z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ $\left(-5;-\frac{33}{4};-\frac{21}{2}\right)$ $\begin{cases} -2x-2y+3z=4 \\ 2x-y+3z=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ $\left(-\frac{5}{2};6;\frac{11}{3}\right)$

439 Quale condizione deve soddisfare il parametro *a* affinché il sistema $\begin{cases} x+y+z=\frac{a^2+1}{a} \\ ay-z=a^2 \\ y+ax=a+1+a^2z \end{cases}$ non sia privo di significato? Determina la terna soluzione assegnando ad a il valore 2.

440 Determina il dominio del sistema e stabilisci se la terna soluzione è accettabile:

$$\begin{cases} \frac{5}{1-x}+\frac{3}{y+2}=\frac{2x}{xy-2+2x-y} \\ \frac{x+1-3(y-1)}{xyz}=\frac{1}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz} \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

441 Verifica se il sistema è indeterminato $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=5 \\ x+z+2=0 \end{cases}$

442 Determina il volume del parallelepipedo retto avente per base un rettangolo, sapendo che le dimensioni della base e l'altezza hanno come misura (rispetto al cm) i valori di x, y, z ottenuti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x+1=2y+3z \\ 6x+y+2z=7 \\ 9(x-1)+3y+4z=0 \end{cases}$$

►14. Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Alcuni che non si presentano come sistemi lineari posso essere ricondotti a sistemi lineare per mezzo di sostituzioni nelle variabili.

Esempio

- $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-1 \end{cases}$

Applichiamo la seguente sostituzione di varibili $\begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ v=\frac{1}{y} \end{cases}$ (*)

Il sistema iniziale diventa $\begin{cases} u+2\text{v}=3 \\ 2\text{u}-4\text{v}=-1 \end{cases}$ che è un sistema lineare.

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione $\begin{cases} 2\text{u}+4\text{v}=6 \\ 2\text{u}-4\text{v}=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni abbiamo l'equazione $4\text{u}=5$,

dalla quale possiamo determinare l'incognita $u=\frac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita v moltiplichiamo la prima equazione per -2, otteniamo $\begin{cases} -2\text{u}-4\text{v}=-6 \\ 2\text{u}-4\text{v}=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni abbiamo $-8\text{v}=-7$ da cui $v=\frac{7}{8}$.

Avendo trovato i valori delle incognite *u* e *v* possiamo ricavare x e y applicando il sistema (*), dove andiamo a sostituire i valori di u e v trovati:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}=\frac{1}{x} \\ \frac{7}{8}=\frac{1}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{8}{7} \end{cases} .$$

Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili

443 $\begin{cases} \frac{1}{2\text{x}}+\frac{1}{y}=-4 \\ \frac{2}{3\text{x}}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ sostituire $u=\frac{1}{x};\ v=\frac{1}{y}$ R. $\left(-\frac{1}{27};\frac{2}{19}\right)$

444 $\begin{cases} \frac{5}{2\text{x}}-\frac{2}{y}=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1 \end{cases}$ R. $\left(\frac{7}{6};14\right)$

445 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}=4 \end{cases}$ R. $(1;1)$

446 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=-3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$ R. $(2;-1)$

447 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{y-1}=3 \end{cases}$ R. $\left(-\dfrac{1}{4};-2\right)$

448 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=-3 \end{cases}$ R. $\left(1;-\dfrac{5}{8};-\dfrac{5}{7}\right)$

449 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ sostituire $u=x^2;\ \ v=y^2$ R. $(3;2),(-3;2),(3;-2),(-3;-2)$

450 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ 2x^3-y^3=-6 \end{cases}$ R. $(1;2)$

451 $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2-3y^2=12 \end{cases}$ Nessuna soluzione reale

452 $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=2 \\ \dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases}$ R. $(1;1;1),(-1;1;1),(1;-1;1),(1;1;-1),$
$(-1;-1;1);(-1;1;-1),$
$(1;-1;-1),(-1;-1;-1)$

453 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=1 \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{5}{x-y}=2 \end{cases}$ sostituire $u=\dfrac{1}{x+y};v=...$ R. $\left(\dfrac{55}{9};-\dfrac{44}{9}\right)$

►15. Problemi da risolvere con i sistemi

454 Determina due numeri sapendo che la loro somma è 37, la loro differenza è 5.

455 In un rettangolo di perimetro 120cm, la base è 2/3 dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [*864*]

456 Determina le misure dei tre lati x, y, z di un triangolo sapendo che il perimetro è 53cm, inoltre la misura z differisce di 19cm dalla somma delle altre due misure e che la misura x differisce di 11cm dalla differenza tra y e z.

457 Aumentando la base di un rettangolo di 5cm e l'altezza di 12cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 120cm che è più lungo di 12cm del perimetro del rettangolo iniziale. [*impossibile*]

458 Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6. [18*; 18*]

459 In un triangolo isoscele di perimetro 64cm, la differenza tra la base e la metà del lato obliquo è 4cm. Determina la misura della base e del lato obliquo del triangolo. [*16cm, 24cm*]

460 Un segmento AB di 64cm viene diviso da un suo punto P in due parti tali che il triplo della loro differenza è uguale al segmento minire aumentato di 20cm. Determina le misure dei due segmenti in cui resta diviso AB dal punto P. [*7cm; 16cm*]

461 Determina due numeri sapendo che la loro somma è pari al doppio del primo aumentato di 1/4 del secondo, la loro differenza è pari a 1/3 del primo. [*27; 36*]

462 Determina due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del più grande diminuito della metà del più grande è 49. [*26; 31*]

463 Determina tre numeri si sa che: il triplo del primo lato è uguale al doppio del secondo aumentato di 10m; la differenza tra il doppio del terzo lato e il doppio del secondo lato è uguale al primo lato aumentato di 12; la somma dei primi due lati è uguale al terzo lato. [12, 13, 25]

464 Giulio e Giulia hanno svuotato i loro salvadanai per comparsi una bici. Nel negozio c'è una bella bici che piace a entrambi, costa 180€ e nessuno dei due ha i soldi sufficienti per comprarla. Giulio dice: "Se mi dai la metà dei tuoi soldi compro io la bici". Giulia ribatte: "se mi dai la terza parte dei tuoi soldi la bici la compro io". Quanti soldi hanno rispettivamente Giulio e Giulia? [108; 144]

465 A una recita scolastica per beneficienza vengono incassati 216€ per un totale di 102 biglietti venduti. I ragazzi della scuola pagano 1€, i ragazzi che non sono di quella scuola pagano 1,5€, gli adulti pagano 3€. Quanti sono i ragazzi della scuola che hanno assisitto alla recita?

466 Da un cartone quadrato di lato 12cm, si taglia prima una scriscia parallela a un lato e di spessore non noto, poi si taglia dal lato adiacente una striscia parallela al lato spessa 2 cm in più rispetto alla striscia precedente. Sapendo che il perimetro del rettangolo rimasto è 33,6cm, calcola l'area del rettangolo rimasto.

467 Al bar per pagare 4 caffè e 2 cornetti si spendono €4,60, per pagare 6 caffé e 3 cornetti si spendono €6,90. E' possibile determinare il prezzo del caffé e quello del cornetto? [*indeterminato*]

468 Al bar Mario offre la colazione agli amici perché è il suo compleano: per 4 caffé e 2 cornetti paga €4,60. Subito dopo arrivano tre altri amici che prendono un caffè e un cornetto ciascuno, questa volta paga €4,80. Quanto costa un caffé e quanto un cornetto? [0,7 e 0,9]

469 Determina tre numeri la cui somma è 81. Il secondo supera il primo di 3. Il terzo numero è dato dalla somma dei primi due. [18,75; 21,75; 40,5]

470 Un cicloturista percorre 218km in tre giorni. Il secondo giorno percorre il 20% in più del primo giorno. Il terzo giorno percorre 14km in più del secondo giorno. Qual è stata la lunghezza delle tre tappe? [*60; 72; 86*]

471 In un parcheggio ci sono moto e auto. In tutto si contano 43 mezzi e 140 ruote. Quante sono le auto e quante le moto? [*27, 16*]

472 Luisa e Marisa sono due sorella. Marisa, la più grande è nata 3 anni prima della sorella; la somma dele loro età è 59. Qual è l'età delle due sorelle?

473 Mario e Lucia hanno messo da parte del denaro. Lucia ha 5 € in più di Mario. Complessivamente potrebbero comprare 45 euro di schede prepagate per i cellulari. Quanto possiede Mario e quanto possiede Lucia?

474 Determina il numero intero di due cifre di cui la cifra delle decine supera di 2 la cifra delle unità e la somma delle cifrè è 12. [75]

475 Determina un numero di due cifre sapendo che la cifrà delle dicine è il doppio di quella delle unità e scambiando le due cifre si ottiene un numero più piccolo di 27 del precedente. [63]

476 Una macchina per giaccio produce 10 cubetti di giaccio al minuto, mentre una seconda macchina per giacchio produce 7 cubetti al minuto. Sapendo che in tutto sono stati prodotti 304 cubetti e che complessivamente le macchine hanno lavorato per 22 minuti, quanti cubetti ha prodotto la prima macchina e quindi ne ha prodotti la seconda.

477 In un parcheggio ci sono automobili, camion e moto, in tutto 62 mezzi. Le auto hanno 4 ruote, i camion ne hanno 6 e le moto ne hanno 2. In totale le

ruote sono 264. Il numero delle ruote delle auto è uguale al numero delle ruote dei camion. Determina quante auto, quanti camion e quante moto ci sono nel parcheggio. [30; 20; 12]

478 Un rettangolo di perimetro 80cm ha la base che è i 2/3 dell'altezza. Calcolare l'area del rettangolo.

479 Un trapezio isoscele ha il perimetro di 72cm. La base minore è i 3/4 della base maggiore; il lato obliquo è pari alla somma dei 2/3 della base minore con i 3/2 della base maggiore. Determina le misure delle basi del trapezio. $\left[\frac{288}{23}cm\,;\ \frac{216}{23}cm\right]$

480 Calcola l'area di un rombo le cui diagonali sono nel rapporto 3/2. Si sa che la differenza tra le due diagonali è 16cm. $\left[1536\,cm^2\right]$

481 In un triangolo rettangolo i 3/4 dell'angolo acuto maggiore sono pari ai 24/13 dell'angolo acuto minore. Determinare l'ampiezza degli angoli. [*26°; 64°*]

482 Al bar degli studenti, caffè e cornetto costano €1,50; cornetto e succo di frutta costano €1,80, caffè e succo di frutta costano €1,70. Quanto costano in tutto 7 caffè, 5 cornetti e 3 succhi di frutta? [*€11,90*]

483 In un triangolo, un angolo supera di 16° un secondo angolo; il terzo angolo è pari ai 29/16 della somma dei primi due. Determina le misure degli angoli del triangolo. [24°; 40°; 116°]

MATEMATICA C3 - ALGEBRA 1

7. INTRODUZIONE ALLA STATISTICA

Lego People

Photo by: Joe Shlabotnik

Taken from: http://www.flickr.com/photos/joeshlabotnik/305410323/

►1. Indagine statistica

Il termine statistica significa *scienza dello stato.* Questo termine venne usato per la prima volta nel XVI secolo per indicare lo studio dei dati utili al governo degli stati, prevalentemente relativi a fenomeni di carattere demografico (nascite, morti, etc). Negli anni poi la statistica si è estesa ai campi più disparati: dalla fisica alla psicologia, alla ricerca di mercato. E' nata essenzialmente con lo scopo di descrivere i fenomeni (statistica descrittiva) ed è successivamente divenuta uno strumento utile per fare previsioni (statistica inferenziale).
La statistica è la scienza che si occupa della raccolta e dell'analisi dei dati relativi ad un certo gruppo di persone, animali o oggetti al fine di descrivere in maniera sintetica un fenomeno che li riguarda e fare eventualmente previsioni sul suo andamento futuro.

DEFINIZIONE. L'insieme di elementi oggetto dell'indagine statistica è detta **popolazione** o **universo** , mentre ciascun elemento della popolazione è detto **unità statistica**.

Sono esempi di popolazioni gli abitanti di una città in un certo anno, i prezzi di un determinato bene, le temperature massime registrate in una giornata in un particolare luogo, i ciclomotori circolanti in Italia, gli alunni di una scuola.

DEFINIZIONE. Per ogni unità statistica si possono studiare una o più caratteristiche ed ognuna di tali caratteristiche costituisce un **carattere** della popolazione. I caratteri oggetto dell'indagine possono essere di tipo qualitativo o quantitativo.

Sono esempi di caratteri qualitativi il colore degli occhi, il colore dei capelli, il tipo di scuola frequentato, il gradimento di un certo programma televisivo. Sono invece caratteri quantitativi l'età, l'altezza, il numero di auto prodotte da una fabbrica.
I caratteri qualitativi sono a loro volta suddivisi in **ordinabili** (il tipo di scuola frequentato è ordinabile a partire dalla scuola dell'infanzia fino alla laurea, il gradimento di un programma televisivo è ordinabile a partire dalla completa mancanza di gradimento fino al gradimento massimo) e **non ordinabili** o sconnessi (colore degli occhi, colore dei capelli).
I caratteri quantitativi possono invece essere di tipo **discreto**, quando assumono solo valori puntuali, oppure di tipo **continuo**, quando possono assumere tutti gli infiniti valori compresi (o meno) in un determinato intervallo. Sono esempi di caratteri quantitativi discreti il numero di figli in una famiglia, i pezzi prodotti in una catena di montaggio; sono esempi di caratteri continui l'altezza di una persona, il peso di una persona, la lunghezza di un fiume.

1 In una indagine su alcune famiglie si sono rilevati i seguenti caratteri; indicane il tipo ponendo una crocetta nella casella opportuna, per i caratteri quantitativi indica se sono discreti o continui, per i caratteri qualitativi indica se sono ordinabili o sconnessi:

	quantitativo		qualitativo	
carattere	discreto	continuo	ordinabile	sconnesso
Reddito mensile del capofamiglia				
Titolo di studio del capofamiglia				
Familiari a carico				
Settore lavorativo				
Luogo di nascita del capofamiglia				
Tempo impiegato per raggiungere il luogo di lavoro				

L'indagine statistica può riguardare l'intera popolazione (in tal caso si parla di **censimento**) oppure solo una sua parte (in tal caso si parla di indagine a **campione**).
Supponiamo di voler effettuare un'indagine sulle persone che fumano in Italia.
Il fenomeno collettivo in esame è il fumo, la popolazione di riferimento è costituita dalla popolazione italiana in età adulta, l'unità statistica è rappresentata da ogni cittadino oggetto dell'indagine, i caratteri oggetto dell'indagine possono essere “fumatore / non fumatore”, “numero di sigarette fumate”, che cosa si fuma: pipa, sigaro, sigaretta. Data l'elevata numerosità della popolazione di riferimento la tipologia di

indagine preferibile è quella a campione.
A sua volta, l'indagine a campione può essere effettuala su un **campione casuale**, quando si scelgono a caso i campioni all'interno della popolazione o su un **campione stratificato**, quando si suddivide la popolazione in classi o strati senza specifici criteri e per ogni strato si prende a caso un campione.

►2. Fasi di un'indagine statistica

Affinché un'indagine statistica sia rigorosa è necessario che sia strutturata secondo le seguenti fasi:

1. Studio del problema e impostazione dell'indagine statistica
In questa fase si deve individuare in maniera precisa lo scopo della ricerca, il fenomeno sul quale indagare, la popolazione statistica di riferimento, le singole unità statistiche ed il carattere/i oggetto dell'indagine

2. Rilevazione dei dati statistici
La rilevazione non è altro che la raccolta dei dati statistici riguardanti ogni elemento della popolazione e relativi al fenomeno che si vuole analizzare. La rilevazione può avvenire secondo diverse modalità:

a) **rilevazione diretta o globale**: viene eseguita direttamente su tutte le unità statistiche che formano la popolazione;
b) **rilevazione indiretta o parziale**: eseguita solo su una parte della popolazione. Si deve scegliere in tal caso un sottoinsieme della popolazione, detto **campione** che deve essere rappresentativo della popolazione di riferimento.

3. Spoglio delle schede e tabulazione
Contemporaneamente o successivamente al rilevamento, i dati raccolti vengono ordinati, suddivisi in classi omogenee e riassunti tramite tabelle dette **tabelle statistiche.**

4. Rappresentazione dei dati statistici.
La rappresentazione può avvenire attraverso diversi tipi di grafico:

- **diagramma cartesiano**: rappresentazione nel piano cartesiano dei valori della variabile sull'asse orizzontale e della relative frequenze sull'asse verticale;
- **ideogramma:** si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo;
- **diagramma a nastri o a bastoni**: utilizzata prevalentemente per addetti ai lavori;
- **areogramma:** grafico a forma di cerchio composto da settori circolari con aree direttamente proporzionali alle frequenze;
- **istogramma:** grafico composto da rettangoli aventi area proporzionale alla frequenza.

5. Elaborazione dei dati
Vengono elaborati i dati tabulati al fine di costruire opportuni indici di sintesi.

6. Interpretazione dei risultati
Attraverso i grafici e gli indici è possibile descrivere le caratteristiche peculiari del fenomeno analizzato.
Analizziamo in dettaglio le singole fasi.

►3. Spoglio delle schede e tabulazione

Dopo aver raccolto i dati per ciascuna modalità del carattere o per ciascuna classe individuata si deve determinare:

- la **frequenza assoluta**, cioè il numero di volte con cui si presenta una modalità del carattere indagato;
- la **frequenza relativa**, cioè il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale dei casi presi in esame;
- la **frequenza percentuale**, cioè la frequenza relativa moltiplicata per 100.

Per poi compilare una tabella di frequenza che sintetizza la raccolta, come nell'esempio seguente.

Esempio

La tabella seguente fornisce la *distribuzione di frequenze assolute* degli alunni di una classe rispetto al carattere sesso.

Sesso	**Numero di alunni**
Femmine	15
Maschi	12
Totale	27

Per costruirla, si è operata la classificazione della popolazione degli alunni della classe rispetto ad un determinato carattere (il sesso), sono state individuate le **modalità** con cui questo si è manifestato (femmina, maschio) ed è stato effettuato il conteggio delle unità in corrispondenza di ciascuna modalità (**frequenza assoluta**).

Dalle frequenze assolute si ricavano le **frequenze relative**: 15 alunni su 27 sono femmine: la frazione è $\frac{15}{27}$ di femmine sul totale degli alunni. Dall'operazione 15 diviso 27 otteniamo 0,56 (approssimando a due cifre decimali) che è la frequenza relativa.

La frazione può essere espressa in forma percentuale: 0,56 equivale a dire 56 su 100 ed è consuetudine scriverlo in forma percentuale 56% , esso indica la **frequenza percentuale**. Ripetendo lo stesso procedimento per i maschi si ottiene la seguente tabella delle frequenze:

Sesso	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
Femmine	15	0,56	56%
Maschi	12	0,44	44%

Si può concludere che la classe è formata per il 56% da femmine e per il restante 44% da maschi.

Esempio

Supponiamo che i voti elencati di seguito siano quelli riportati in matematica a fine trimestre nella tua classe:

5 4 6 8 8 7 7 6 5 5 6 7

Per poter effettuare una lettura più agevole si costruisce una tabella in cui vengono riportati sulla prima colonna i singoli valori rilevati in ordine crescente (modalità del carattere), nella seconda la frequenza assoluta, cioè quante volte compare quel determinato voto e nella terza quella relativa:

Voto riportato	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
4	1	$\frac{1}{12}=0{,}083$	8,30%
5	3	$\frac{3}{12}=0{,}25$	25,00%
6	3	$\frac{3}{12}=0{,}25$	25,00%
7	3	$\frac{3}{12}=0{,}25$	25,00%
8	2	$\frac{2}{12}=0{,}167$	16,70%
Totale	**12**	**1**	**100,00%**

Per determinare la frequenza percentuale è sufficiente moltiplicare per 100 la frequenza relativa.

2 Compila una tabella relativa alla distribuzione degli studenti della tua classe in relazione a:
a) colore dei capelli (nero, castano, biondi, rosso);
b) anno di nascita;
c) città di residenza.

3 In una certa nazione in un dato anno si sono vendute 10540 biciclette, 7560 scooter, 2300 moto e 6532 automobili. Completa la tabella

Mezzi di trasporto venduti	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
Biciclette			
Scooter			
Moto			
Automobili			
Totale			

Esempio

Misurando l'altezza di un gruppo di cani di razza Pastore italiano si sono ottenute le seguenti misure in cm

57,1	60,8	60,7	56,2	59,5	62,4	56,1	61,2	54,5	64,5	57,5	58,3	55,2
58,7	57,2	56,1	58,9	57,7	53,2	59,2	58,9	54,5	55,3	62,1	59,0	58,3
61,3	60,1	56,4	60,2	61,7	57,3	58,3	59,5	62,6	59,4	58,3	59,4	59,4
59,3	57,6	60,0	60,7	56,7	61,1	59,8	55,3	63,9	58,0	55,2	54,9	53,8

Il carattere indagato nella popolazione cani Pastore italiano è di tipo quantitativo continuo; con questo tipo di dati è praticamente impossibile calcolare le frequenze se le altezze non si raggruppano in classi.
Vediamo come procedere: osservando i dati ottenuti si nota che il valore minore è 53,8 mentre il valore maggiore è 64,7. Possiamo allora suddividere i dati in gruppi partendo da 53,0cm fino a 65,0 centimetri. Si potrebbero allora formare classi di ampiezza 1cm.
Si ottiene la seguente tabella:

Classe cm	**Frequenza assoluta**	**Frequenza percentuale**
53,0 – 53,9	2	3,85%
54,0 – 54,9	3	5,77%
55,0 – 55,9	4	7,69%
56,0 – 56,9	5	9,61%
57,0 – 57,9	6	11,54%
58,0 – 58,9	8	15,38%
59,0 – 59,9	9	17,31%
60,0 – 60,9	6	11,54%
61,0 – 61,9	4	7,69%
62,0 – 62,9	3	5,77%
63,0 – 63,9	1	1,92%
64,0 – 64,9	1	1,92%
totale	**52**	

4 Dall'analisi delle paghe settimanali dei dipendenti di un'industria automobilistica si è ottenuta la seguente distribuzione di frequenza, suddivisa in classi *(la parentesi indica che l'estremo della classe considerato è incluso nella classe stessa, la parentesi tonda indica che l'estremo della classe considerato è escluso dalla classe).*Determina per ogni classe di reddito frequenza relativa e percentuale.

Classi di reddito (in Euro)	**Frequenza assoluta**	**Frequenza relativa**	**Frequenza percentuale**
[50-100)	50		
[100-200)	70		
[200-300)	30		
≥ 300	50		

5 Da un'indagine sulla distribuzione delle altezze in un gruppo di studenti sono stati rilevati i seguenti dati grezzi (espressi in cm):

175	168	169	173	160	165	170	172	177	172	170	173	182
164	174	185	188	164	175	160	177	176	184	180	176	168
174	175	177	183	174	166	181	173	166	172	174	165	180
190	175	176	188	171	172	181	185	184	183	175	173	181

Raggruppa i dati in classi di ampiezza 5cm e costruisci la distribuzione di frequenza.
Calcola poi frequenza relativa e percentuale.

6 Data la seguente distribuzione dei risultati dei test d'ingresso di matematica in una scuola media, Sapendo che l'indagine è stata svolta su 200 alunni, determina frequenze assolute e relative.

Voto	3	4	5	6	7	8	9
Frequenza percentuale	5%	10%	25%	40%	15%	3%	2%
Frequenza assoluta							
Frequenza relativa							

7 Osserva la seguente tabella:

… … … … … … … … …	… … … … … …	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
Infanzia	950.000		
Primaria	2.538.000		
Secondaria di 1° grado	1.700.000		
Secondaria di 2° grado	2.425.000		
totale			

Quale fenomeno descrive la tabella?
Qual è la popolazione statistica oggetto dell'indagine?
Quante sono le unità statistiche?
Qual è stato il carattere indagato?
Completa la tabella calcolando frequenza relativa e frequenza percentuale.

8 In un campione di ginnaste di livello agonistico si è rilevata l’altezza in metri.
Basta questa frase per indicare la popolazione oggetto di indagine e il carattere rilevato?
Il carattere analizzato è di tipo qualitativo o quantitativo?
L’indagine ha dato i seguenti risultati:

Altezza	1,49	1,50	1,55	1,58	1,61	1,64	1,67	1,70	1,71
Numero ginnaste	1	6	11	4	6	4	2	2	3

Quante sono le unità statistiche?
Determina in percentuale il numero delle ginnaste la cui altezza è non inferiore a 1,60m.

9 La tabella allegata mostra dati relativi ad una popolazione di 20 famiglie italiane; le informazioni in essa contenute stabiliscono alcuni aspetti o caratteri dei membri della popolazione: numero di componenti, reddito annuo, titolo di studio del capofamiglia, residenza per area geografica. Osserva la tabella e rispondi alle domande che seguono.

Famiglia	Numero di componenti	Reddito annuo in migliaia di euro	titolo di studio	residenza
1	2	28	Elementare	Nord
2	1	35	Media inferiore	Centro
3	3	50	Media inferiore	Nord
4	1	45	Media superiore	Nord
5	1	40	Laurea	Sud
6	2	30	Media inferiore	Sud
7	3	55	Media inferiore	Centro
8	4	80	Media superiore	Centro
9	5	60	Laurea	Sud
10	6	85	Laurea	Nord
11	7	90	Laurea	Nord
12	1	52	Media superiore	Centro
13	2	62	Media superiore	Sud
14	3	75	Media superiore	Sud
15	5	60	Elementare	Nord
16	4	45	Media inferiore	Nord
17	3	42	Media inferiore	Centro
18	2	28	Elementare	Nord
19	8	70	Media superiore	Sud
20	2	38	Laurea	Sud

1. Cosa si intende, in statistica, per popolazione?
2. Quali sono le unità statistiche di cui sono trascritti i dati nella tabella precedente?
3. Quali caratteri riportati nella tabella sono qualitativi e quali quantitativi?
4. Quali sono le modalità dei caratteri qualitativi indagati?
5. Bastano le informazioni della precedente tabella per stabilire:
5a. dove risiede la maggior parte delle famiglie oggetto di questa indagine? Se sì, come lo stabilite?
5b. il numero di famiglie il cui capo-famiglia ha come titolo di studio quello di Scuola Media Superiore? Se sì, come lo stabilite?

Costruire la tabella

Titolo di studio	elementare	Media inferiore	Media superiore	Laurea
Numero di famiglie				

E' vero che ¼ dei capifamiglia, cioè il 25%, è laureto?

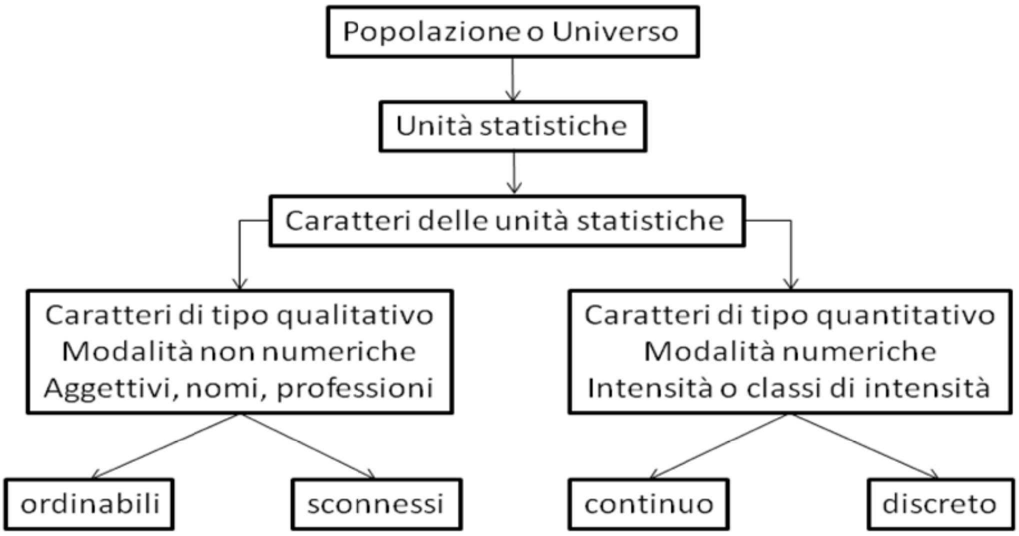
Costruire un'altra tabella, sul modello della precedente, in cui è riportato il numero di famiglie aventi 1, 2, 3 ecc. E' vero che 1/3 delle famiglie è costituito da più di 5 persone?

Individua il reddito minimo e quello massimo, completa la tabella delle frequenze in modo che il carattere reddito sia suddiviso in classi di ampiezza 5, come indicato a fianco.

Quante famiglie hanno un reddito compreso tra 46 e 90 mila euro? Indica la risposta anche in percentuale.

Classi di reddito	Frequenza assoluta
26-30	
31-35	

Riassumendo



►4. Rappresentazione grafica

La **rappresentazione grafica dei dati statistici** facilita notevolmente lo studio delle caratteristiche del fenomeno statistico che si sta esaminando; infatti dopo aver impostato l'indagine, raccolto, classificato ed elaborato i dati nelle tabelle, i dati non sempre si presentano in una forma di facile lettura ed il loro significato e la loro interpretazione rimane poco chiara. Attraverso la rappresentazione grafica, i risultati dell'indagine emergono immediatamente, in maniera diretta e sintetica.
La rappresentazione grafica può avvenire utilizzando diversi tipi di grafico a seconda delle caratteristiche da analizzare.

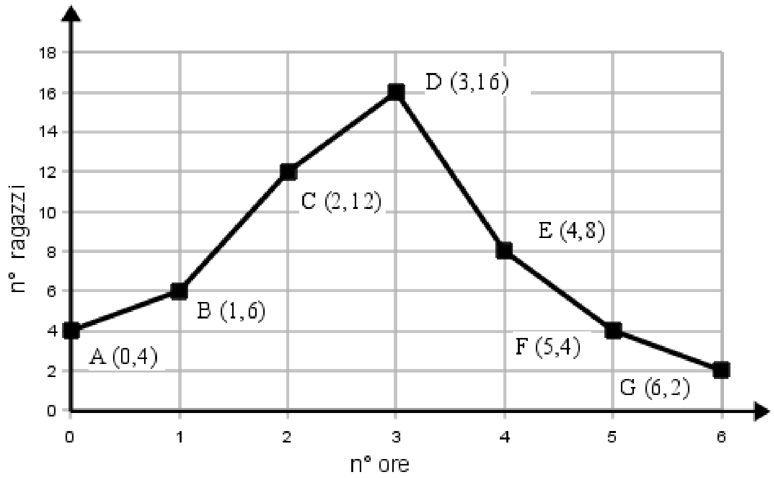
Diagramma cartesiano

La rappresentazione grafica attraverso diagramma cartesiano dà, in modo immediato, informazioni sull'andamento globale del fenomeno e viene utilizzato prevalentemente per la rappresentazione di serie storiche (per esempio, per rappresentare il numero di auto prodotte per anno da una fabbrica) oppure quando si hanno due caratteri quantitativi e si vuol analizzare il tipo di legame esistente fra di essi.

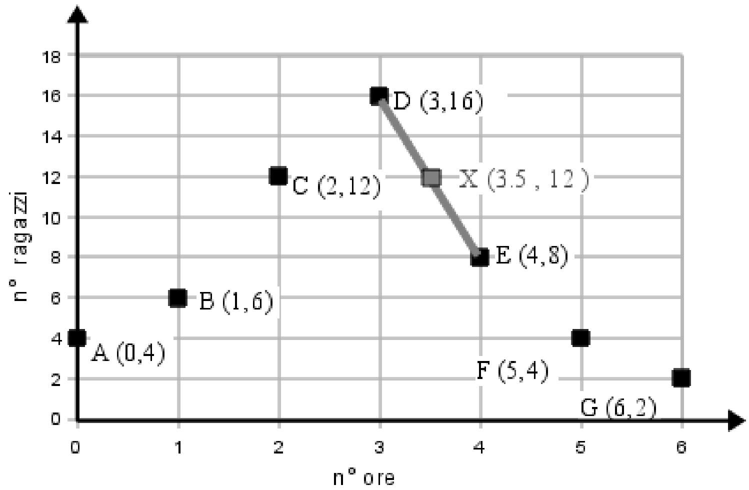
Esempio

Numero di ore	Numero di ragazzi
0	4
1	6
2	12
3	16
4	8
5	4
6	2

Consideriamo la tabella statistica relativa alla domanda “quante ore al giorno passi al computer?”, posta ad un campione di 50 ragazzi dai 16 ai 24 anni. Rappresentiamo la tabella attraverso un diagramma cartesiano costruito tracciando due rette perpendicolari, agli assi, quello verticale orientato verso l'alto e quello orizzontale orientato verso destra. Riportiamo sull'asse orizzontale il numero di ore e sull'asse verticale il numero di ragazzi e determiniamo i punti aventi come coordinate (numero ore; numero ragazzi).
Il punto A avrà come coordinate n° ore 0 e n° ragazzi 4, il punto B avrà come coordinate 1 e 6 e così via. Uniamo poi tutti i punti e otteniamo il diagramma cartesiano.
Precisamente A(0;4), B(1;6), C(2;12), D(3;16), E(4;8), F(5;4), G(6;2).



Dal grafico si può notare immediatamente che la maggior parte dei ragazzi trascorrono dalle 2 alle 3 ore al computer dato che il picco più alto si ha proprio nei punti C e D.



Si può notare che, ad esempio, il punto X di coordinate (3.5; 12), appartenente al segmento di congiunzione tra i punti D ed E, non ha significato reale, dato che le sue coordinate non sono riportate nella tabella statistica del fenomeno da studiare.

10 Rappresenta con un diagramma cartesiano la seguente serie storica relativa alla produzione di olio di oliva in Puglia, scegliendo una opportuna unità di misura (Fonte Wikipedia):

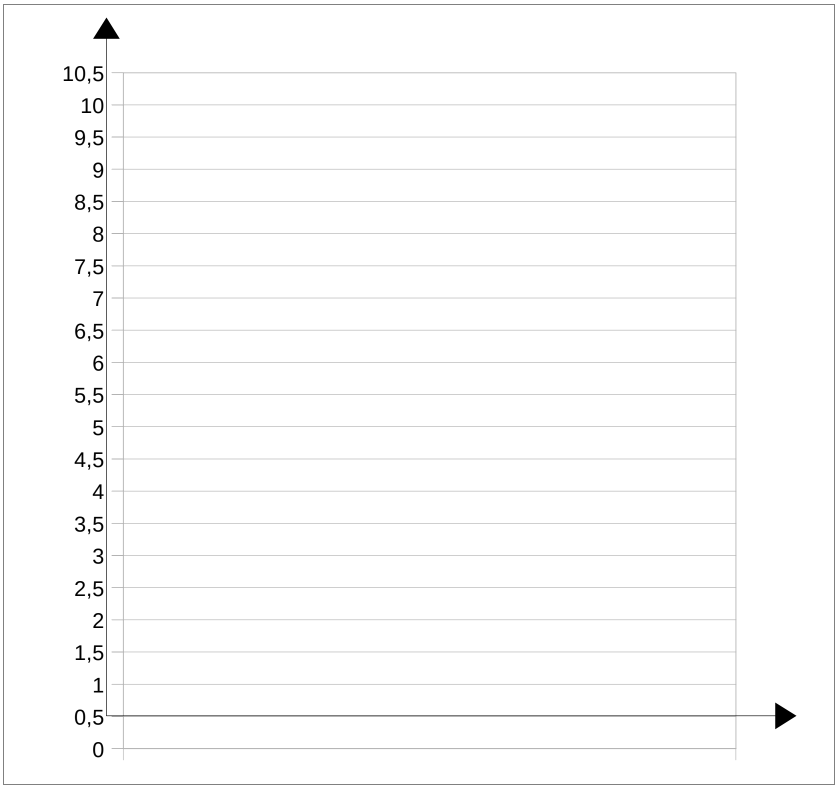
Anno	2006	2005	2004	2003
Produzione olio (in quintali)	1.914.535	2.458.396	2.678.201	2.508.084

11 Rappresenta con un diagramma cartesiano la seguente serie storica, relativa al numero di società quotate in borsa, dal 1975 al 1984 (Fonte ISTAT):

Anno	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Società	154	156	156	148	145	141	141	148	150	155

12 Rappresenta graficamente mediante diagramma cartesiano la seguente tabella che riporta le temperature misurate a Lecce durante una giornata invernale.

Ore	**Temperatura in °C**
0	5
2	5,5
4	5,5
6	6
8	7,5
10	10
12	16
14	18
16	16,5
18	12
20	8
22	6,5



Ideogramma

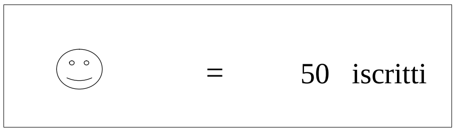
Nella rappresentazione grafica attraverso **ideogramma** si rappresenta un certo numero di dati con un simbolo che si assume come **unità grafica**; il simbolo richiama l'oggetto dell'indagine e dà quindi una visione immediata del fenomeno.
Ad esempio si può considerare un uomo stilizzato per rappresentare un dato riguardante il numero di persone che vivono in un determinato territorio, una macchina per la produzione annua di automobili in una fabbrica, e così via.
Tale tipo di rappresentazione è spesso usata in campo pubblicitario perché di largo impatto visivo.

Esempio

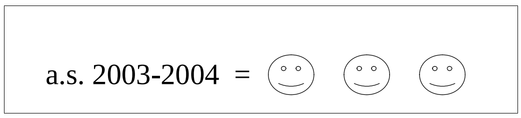
Un istituto scolastico ha visto aumentare i suoi iscritti, dall'anno scolastico 2003-2004 all'anno 2008-2009 secondo questa tabella:

Anno scolastico	2003-2004	2004-2005	2005-2006	2006-2007	2007-2008	2008-2009
Iscritti	150	200	200	325	375	450

Possiamo rappresentare mediante ideogramma i dati contenuti nella tabella statistica.
Consideriamo una faccina stilizzata come unità grafica assegnandole il valore di 50 ragazzi iscritti.

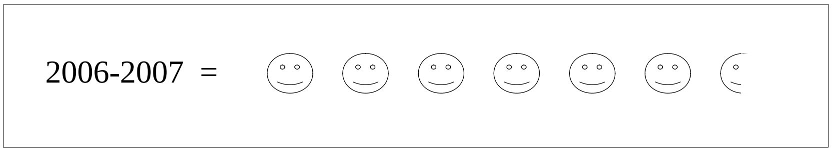


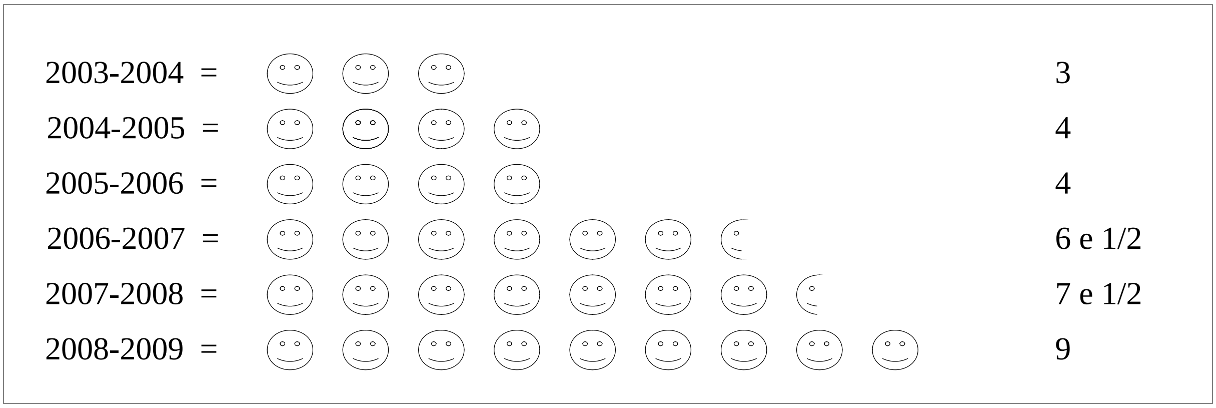
Il numero degli iscritti di ogni anno scolastico sarà rappresentato da tante unità grafiche quanti sono i gruppi di 50 iscritti.
Per avere il grafico relativo all'anno 2003-2004 si devono usare tre faccine, in quanto 150 : 50 = 3.



Se la divisione del numero degli iscritti per 50 dà resto, esso si dovrà rappresentare disegnando solo una parte dell'unità grafica, corrispondente alla frazione tra resto e 50. Ad esempio nell'a.s. 2006-2007 ci sono stati 325 iscritti; 325:50 = 6 col resto di 25, quindi 325 sarà uguale a 6 unità grafiche e $\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$ unità grafica, cioè mezza faccina.

Il grafico completo sarà:





13 Rappresenta attraverso un ideogramma la seguente tabella statistica, che indica le ore di studio giornaliere di uno studente, usando 2 ore come unità di misura, scegli un simbolo opportuno.

Giorno	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Ore di studio	2	6	5	2	3	4	0

14 Costruisci un ideogramma a partire dai dati della seguente tabella:

Regione	**Produzione vino (in quintali)**
Toscana	20500
Veneto	18000
Campania	14500
Puglia	15500
Molise	8000

Diagramma a barre o a colonne

Questo tipo di rappresentazione, detta anche diagramma a nastri o a bastoni, viene usata quando si vuole fornire un'idea delle frequenze delle diverse modalità di un fenomeno, in genere si usa per caratteri qualitativi o quantitativi discreti. Per poter valutare il significato statistico della lunghezza dei nastri o delle colonne è necessario scegliere opportunamente una scala di riferimento: la larghezza del nastro è arbitraria ma uguale per tutti i nastri, la lunghezza è proporzionale alla caratteristica che si deve rappresentare. I nastri e le colonne possono inoltre essere suddivisi in parti di colori diversi per indicare le singole componenti o i singoli fenomeni che si vogliono analizzare.

La differenza fra la rappresentazione a barre e quella a colonne, detta anche istogramma, consiste soltanto nell'orientamento del grafico: nel diagramma a nastri si indicano le modalità del carattere sull'asse verticale e le frequenze sull'asse orizzontale, mentre in quello a colonne le modalità del carattere sono riportate sull'asse orizzontale e le frequenze su quello verticale.

Di seguito vengono riportate le due tipologie di grafico accompagnate dalla tabella di riferimento:

Materia preferita	Maschi	Femmine
Italiano	5	3
Storia	4	7
Geografia	4	2
Matematica	2	3
Scienze	6	4
Educazione Fisica	5	5
Totale	26	24

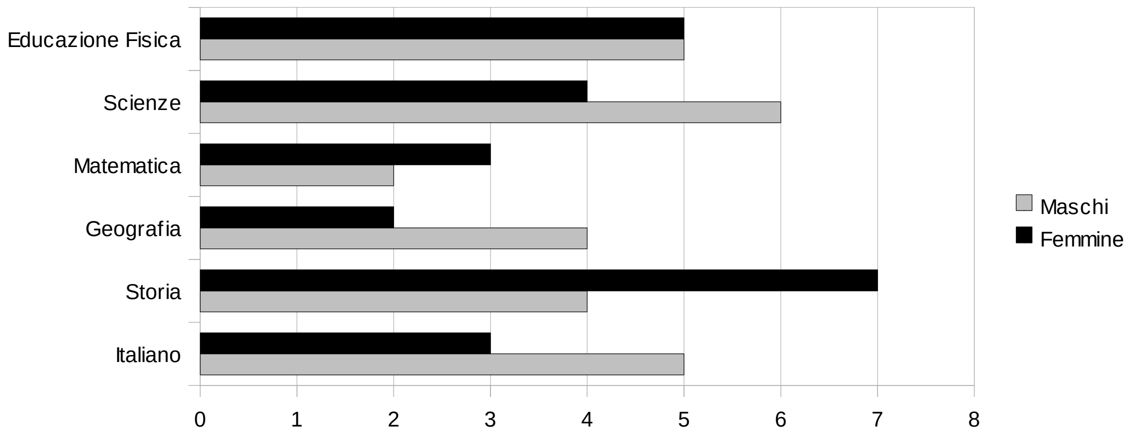


Diagramma a barre

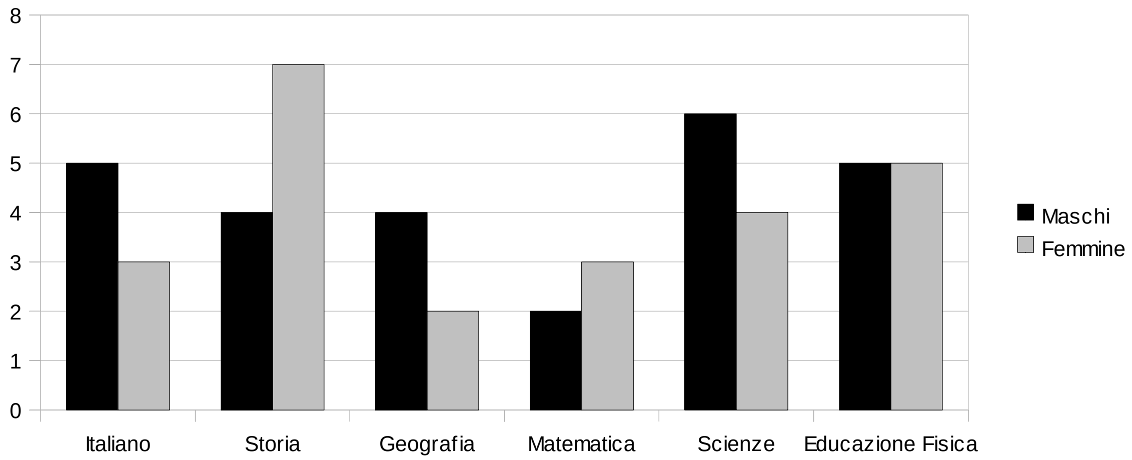


Diagramma a colonne

15 La seguente tabella rappresenta i risultati di un'indagine sulla capitale europea preferita da un gruppo di studenti universitari. Rappresenta i dati utilizzando un diagramma a nastro.

Capitale preferita	Frequenza
Parigi	25
Roma	42
Londra	30
Vienna	10
Amsterdam	28

16 Rappresenta con un diagramma a colonne i dati riportati nella seguente tabella relativi alla vendita di automobili da un concessionario nell'anno 2009.

Marca automobile	**Auto vendute**
Renault	50
Fiat	270
Ford	120
Toyota	40
Alfa Romeo	30

Areogramma

Questo tipo di rappresentazione viene utilizzato quando si vuole evidenziare le parti che compongono un fenomeno, per esempio per indicare come si dividono gli alunni di una classe in maschi e e femmine, o per rappresentare in che modo le varie voci di spesa incidono sul bilancio familiare.
Il grafico si ottiene dividendo un cerchio in settori circolari con aree direttamente proporzionali alle frequenze che rappresentano. Per disegnare l'areogramma, si disegna una circonferenza di diametro arbitrario e si fa corrispondere l'angolo al centro di 360°, con il 100% di frequenza percentuale; per ottenere gli angoli corrispondenti a frequenze percentuali minori, si risolve la proporzione $360°: X° = 100 : X$
Si suddivide così la circonferenza negli angoli ottenuti, mediante un goniometro e si colorano o retinano diversamente i settori circolari ottenuti.

Esempio

Consideriamo la seguente tabella statistica che indica gli studenti, divisi per classe, della sezione A di un dato istituto scolastico, in un dato anno. Nella tabella sono indicate le frequenze assolute; calcoliamo ora le frequenze percentuali degli studenti.

Per la 1° classe si ha: $\frac{320}{1010} = 0{,}32$ arrotondato alla seconda cifra decimale, che equivale al 32% e così via per le classi successive.

Classe	**Studenti**
1°	320
2°	230
3°	212
4°	152
5°	96
Totale	1010

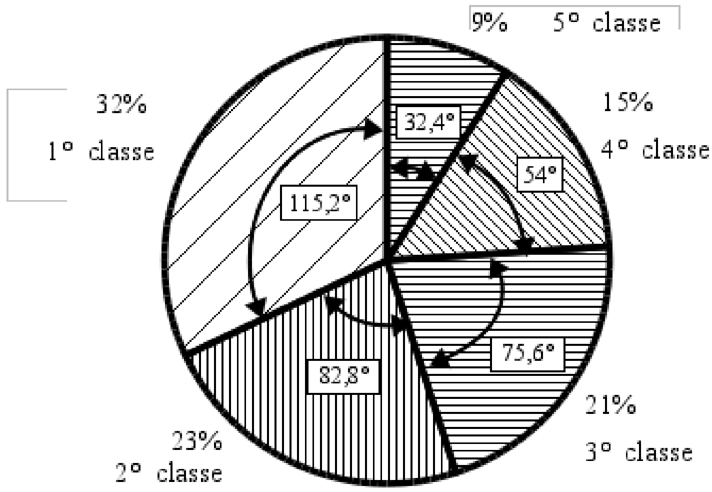
Classe	**Frequenze percentuali**
1°	32,00%
2°	23,00%
3°	21,00%
4°	15,00%
5°	9,00%
Totale	100%

Rappresentiamo graficamente mediante areogramma i dati contenuti nella tabella precedente.
Per ottenere l'angolo relativo alla frequenza percentuale della 1°classe si fa:

$$360° \times \frac{32}{100} = 115.2°$$

per la 2° classe: $360° \times \frac{23}{100} = 82.2°$

e cosi via per le altre classi.



Dal grafico si può notare immediatamente che l'area più grande è quella degli studenti della 1° classe, quindi la classe frequentata di più è la prima.

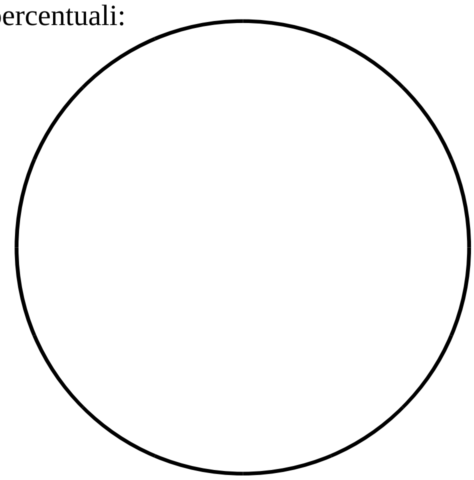
17 Consideriamo la seguente tabella statistica che indica le frequenze percentuali di forza lavoro per settore economico rilevata nel 2006 in Italia:

Forza lavoro per settore economico	**Frequenza percentuale**
Forza lavoro occupata nell'agricoltura	4,20%
Forza lavoro occupata nell'industria	30,70%
Forza lavoro occupata nei servizi	65,10%
Tasso di disoccupazione	8,00%

Rappresentare graficamente mediante **areogramma** i dati contenuti nella tabella.

18 Rappresentare attraverso un istogramma la seguente tabella statistica, che indica le altezze di 100 studenti maschi di una data scuola dopo aver calcolato le frequenze percentuali:

Altezze (in m)	**Numero di studenti**	**Frequenze percentuali**
1,50 - 1,55	11	
1,60 - 1,65	18	
1,70 - 1,75	42	
1,80 - 1,85	22	
1,90 - 1,95	6	
Totale	**100**	



Istogramma

La rappresentazione grafica attraverso istogramma si utilizza quando il carattere analizzato è di tipo quantitativo ed i dati sono raggruppati in classi.
Prima di tutto si distribuiscono i dati in classi o gruppi e si determina il numero di individui appartenenti a ciascuna classe, questo numero è detto frequenza della classe. Riportando tali dati in una tabella si ottiene la distribuzione delle frequenze. Poiché le classi potrebbero avere ampiezze diverse si calcola la densità d frequenza, definita come rapporto fra la frequenza della classe e la relativa ampiezza.
Per disegnare un istogramma si tracciano due assi; sull'asse verticale, orientato verso l'alto, si fissa un segmento unitario e si riportano le frequenze. L'asse orizzontale, orientato verso destra, è invece suddiviso in tanti segmenti la cui ampiezza è pari a quella delle singole classi. Il grafico consiste in un insieme di rettangoli aventi per base ogni classe e altezza la densità di frequenza corrispondente. In tal modo l'area di ogni rettangolo rappresenta la frequenza corrispondente a ciascuna classe.

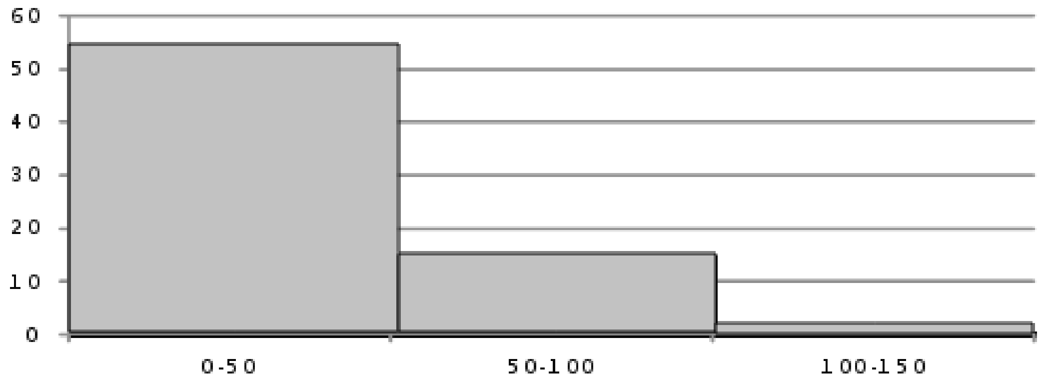
Esempio

Costruiamo un istogramma a partire dalla distribuzione di frequenza riportata nella seguente tabella:

Diametro crateri lunari (km)	**Numero di crateri**
0-50	1088
50-100	745
100-150	20

Innanzitutto dobbiamo determinare per ogni classe la densità di frequenza che si ottiene dividendo la frequenza assoluta per l'ampiezza della classe:

Diametro crateri lunari (km)	**Densità**
0-50	1088/20=54,4
50-100	745/50=14,9
100-150	20/50=0,4



Esempio

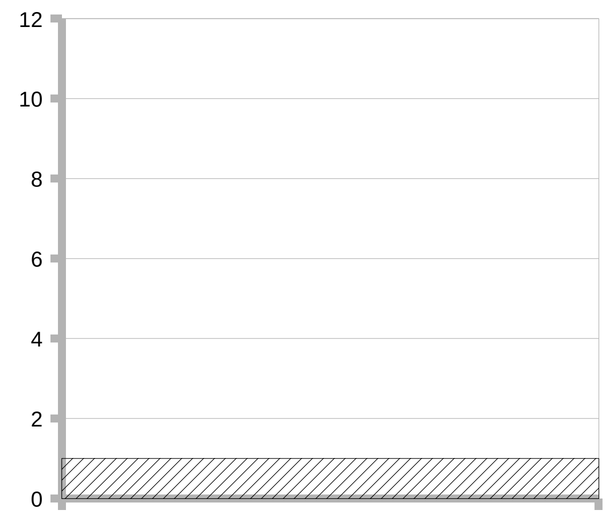
Consideriamo la seguente tabella statistica che riporta i giorni di pioggia di ogni mese, in un dato anno e in una data città.

	Mesi	**Giorni di pioggia**
Inverno	Gennaio	15
	Febbraio	10
	Marzo	14
Primavera	Aprile	8
	Maggio	5
	Giugno	2
Estate	Luglio	1
	Agosto	3
	Settembre	3
Autunno	Ottobre	5
	Novembre	9
	Dicembre	11

Dividiamo i mesi dell'anno in classi, e precisamente raggruppandoli in stagioni. Luglio, Agosto e Settembre appartengono alla classe dell'estate e la frequenza di questa classe è data dalla somma delle frequenze di ogni mese. Cioè 1 + 3 + 3 = 7.

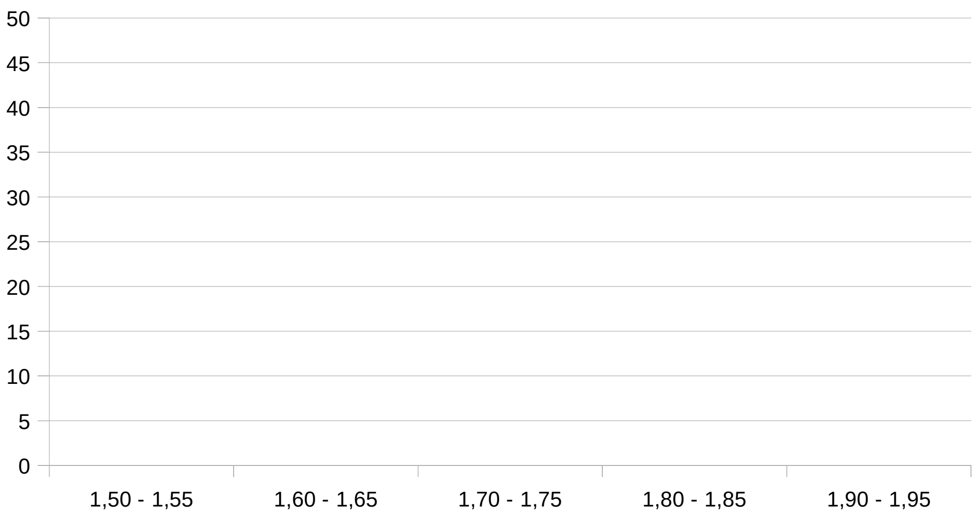
Si prosegue in questo modo per ogni classe ottenendo cosi la distribuzione delle frequenze che riportiamo nella tabella a fianco.
Costruiamo ora l'istogramma corrispondente alla tabella precedente riportando sull'asse orizzontale le classi e su quello verticale le frequenze:

Stagioni	**Giorni di pioggia**
Estate	7
Autunno	25
Inverno	39
Primavera	15



19 Rappresentare attraverso un istogramma la seguente tabella statistica, che indica le altezze di 100 studenti maschi di una data scuola:

Altezze (in m)	Numero di studenti
1,50 - 1,55	11
1,60 - 1,65	18
1,70 - 1,75	43
1,80 - 1,85	22
1,90 - 1,95	6



20 Uno studente universitario di Matematica ha superato 20 esami con queste valutazioni:

18	25	26	23	30	21	24	20	29	28	24	21	23	28
28	24	22	25	24	27	24	21	23	28	18	25	26	23

Organizza i dati in una tabella suddividendoli in classi e rappresentali tramite un istogramma.

►5. Indici di posizione

Gli indici di posizione vengono utilizzati per sintetizzare i dati di una distribuzione di frequenza per mezzo di un solo numero. A seconda del tipo di carattere oggetto dell'indagine statistica posso essere utilizzati valori medi diversi.

Moda

DEFINIZIONE. La **moda** è il valore della variabile che si presenta più frequentemente.

In una successione di n dati $x_1, x_2, ..., x_n$ con le relative frequenze $f_1, f_2, ..., f_n$, la moda è il dato che ha la frequenza maggiore.
Questo valore può essere calcolato per qualunque tipo di carattere, sia qualitativo che quantitativo.
Se il carattere è quantitativo continuo con dati raggruppati in classi non è possibile determinare con esattezza la moda, ci si limita ad individuare la classe modale definita come la classe cui è associata la massima densità di frequenza.

Esempi

- Nella seguente tabella sono riportati i numeri degli studenti, divisi per classe, della sezione A di un dato Istituto, in un dato anno. Si può osservare che la 1° classe presenta la frequenza massima di 320 studenti, quindi la moda è la prima classe.

Classe	**Studenti**
1°	320
2°	230
3°	212
4°	152
5°	96
Totale	1010

- La tabella che segue raccoglie i dati relativi alla domanda “quante ore la settimana pratichi sport?”, posta ad un campione di 50 ragazzi dai 18 ai 25 anni. Si può osservare che le 12 e le 18 ore presentano la frequenza massima 14, quindi si hanno due mode 12 è 18.

Numero di ore	**Numero di ragazzi**
0	4
4	1
8	3
12	14
16	8
18	14
22	6
Totale	50

- La tabella seguente è relativa alla distribuzione delle altezze di un gruppo di studenti:

Poiché le classi hanno ampiezza diversa è necessario calcolare la densità di frequenza.
La massima densità di frequenza si ha in corrispondenza della classe 170-175, essa rappresenta quindi la classe modale.

Altezza	Numero di studenti
160-165	5
165-170	8
170-175	15
175-185	10
185-200	2
Totale	40

Altezza	Densità di frequenza
160-165	0,13
165-170	0,2
170-175	0,38
175-185	0,25
185-200	0,05

21 Un concessionario di moto vende delle moto di diversa cilindrata come descritto nella tabella: Determinare la moda.

Modello moto	Numero moto vendute
250	34
350	30
500	45
750	100
1000	42

22 Calcolare la moda della seguente tabella statistica

Dati	3	6	8	9	12	24
Frequenze	23	78	67	78	89	100

23 Calcolare la classe modale della seguente distribuzione:

Abitanti	Numero comuni
0-1000	750
1000-2000	1100
2000-5000	950
5000-10000	2500
10000-20000	3000

Mediana

DEFINIZIONE. La **mediana** di una successione di dati disposti in ordine crescente è il dato che occupa la posizione centrale se il numero dei dati è dispari; se il numero dei dati è pari è la media aritmetica dei dati della coppia centrale.

Poiché per calcolare la mediana i dati devono essere ordinati è bene sottolineare che tale valore medio non può essere calcolato se il carattere in esame è di tipo qualitativo non ordinabile.

Esempio

Supponiamo di avere 7 dati disposti in ordine crescente: 5, 8, 10, 14, 18, 20, 25
Allora la mediana è il valore centrale, quello che occupa la quarta posizione, il 14.
Supponiamo di avere 8 dati disposti in ordine crescente: 1, 5, 8, 10, 14, 18, 20, 25.
La mediana è la media aritmetica dei dati che occupano la 4° e 5° posizione, cioè $\frac{10+14}{2}=12$.

Supponiamo di avere invece la distribuzione di frequenza riportata nella tabella a fianco.
Il numero di osservazioni è pari, quindi la mediana è il valore della variabile che corrisponde alla media dei due valori centrali, rispettivamente quelli che nella serie ordinata occupano il 13° e il 14° posto.
E' necessario in questo caso determinare le **frequenze cumulate**, esse si ottengono sommando le frequenze che hanno un valore della variabile minore o uguale alla modalità corrispondente.
La frequenza cumulata relativa al voto 3 rimane 2, quella relativa al voto 4 si ottiene sommando la frequenza del 3 e la frequenza del 4, cioè 2+2=4, la frequenza cumulata relativa al voto 5 si ottiene dalla somma della frequenza del 3, del 4 e del 5, e così via.
Il 14° posto corrisponde al voto 6, mentre il 15° posto è il voto 7. La mediana è 6,5.

Voto	**Frequenza**	**Frequenza cumulata**
3	2	2
4	4	4+2=6
5	3	2+4+3=9
6	5	2+4+3+5=14
7	7	2+4+3+5+7=21
8	2	23
9	2	25
10	1	26
Totale	26	

24 Trovare la mediana delle seguenti serie di osservazioni:

3, 4, 6, 7, 10 [R.6]
6, 7, 8, 12, 15, 22 [R.10]
34, 53, 45, 67, 87, 91, 100, 123, 129, 135 [R.89]

25 In una classe di 15 ragazzi sono stati rilevati i seguenti pesi in kg:

50, 43, 62, 41, 70, 55, 76, 43, 46, 50, 78, 62, 49, 55, 48.

Calcola la mediana del peso dei ragazzi. [R.43]

26 Dati i seguenti tempi di risposta ad un test sostenuto da gruppo di 8 studenti ad un concorso in un ente pubblico 19, 25, 20, 15, 8, 5, 12, 15. Calcola la mediana. [R.15]

27 Calcola la classe mediana sulla base dei dati riportati nella tabella seguente relativa agli occupati nel settore agricolo suddivisi per età:

età	20-25	25-30	30-35	35-40	Oltre 40
frequenza	500	750	230	400	350

Media aritmetica

DEFINIZIONE. La **media aritmetica** semplice o media aritmetica, è il valore ottenuto sommando tutti i dati e dividendo tale somma per il numero dei dati.

Se abbiamo a n dati $x_1, x_2, \dots, x_n$ la media aritmetica semplice M è:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \Sigma x_i$$

Esempio

Riprendiamo in esame la tabella relativa agli studenti, divisi per classe, della sezione A di un dato istituto scolastico, in un dato anno. Calcoliamo la media aritmetica semplice.

classe	1a	2a	3a	4a	5a	totale
studenti	320	230	212	152	96	1010

Per calcolare la media aritmetica semplice degli studenti, sommiamo tutti gli studenti delle cinque classi e dividiamo tale somma per il numero delle classi: $M = \frac{320+230+212+152+96}{5} = \frac{1010}{5} = 202$

Si può notare che il numero effettivo degli studenti di ogni classe non si discosta di molto dal valore della media. Perciò possiamo dire che *in media* si hanno 202 studenti per ogni classe.

DEFINIZIONE. La **media aritmetica ponderata** è il valore ottenuto moltiplicando ciascun dato con la propria frequenza, sommando tutti i prodotti fra loro e dividendo tale somma per il numero totale dei dati.

Essa si usa nel caso in cui i dati sono molti ed è già stata fatta la tabella delle frequenze.
In questo caso, avendo n dati $x_1, x_2, .., x_n$ con le relative frequenze $f_1, f_2, \ldots, f_n$, la media aritmetica ponderata M è:

$$M = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + ... + x_n \cdot f_n}{n} = \frac{1}{n} \Sigma x_i \cdot f_i$$

Esempio

Riprendiamo la tabella dell'esempio precedente relativa alla domanda "quante ore al giorno passi al computer?", posta ad un campione di 50 ragazzi dai 16 ai 24 anni. Calcoliamo la media aritmetica ponderata.

Numero di ore	0	1	2	3	4	5	6	totale
Numero di ragazzi	4	6	12	16	8	4	2	50

Per calcolare la media aritmetica ponderata eseguiamo:

$$M = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{50} = \frac{142}{50} = 2{,}84$$

Possiamo dire che 'in media' i 50 ragazzi passano 2,84 ore al computer.

28 Trovare la media aritmetica semplice delle seguenti serie di osservazioni:

3, 4, 6, 7, 10 [R.6]
6,7,8,12,15,22 [R.11,7]
34,53,45,67,87,90,100,123 [R.75]

29 In una classe di 15 ragazzi sono stati rilevati i seguenti pesi in kg:
50, 43, 62, 41, 70, 55, 76, 43, 46, 50, 78, 62, 49, 55, 48.
a)Calcola la media aritmetica semplice del peso dei ragazzi. [R.55,2]
b)Costruisci la tabella delle frequenze.
c)Calcola la media aritmetica ponderata del peso dei ragazzi. Che cosa osservi?

30 In un insieme di numeri compaiono quattro volte il 3, cinque volte il 5, tre volte il 6, due volte il 10, due volte il 15. Calcolare la media aritmetica. [R.21]

31 Calcola la media aritmetica della seguente distribuzione di frequenza:
(Ipotizza che le frequenze siano concentrate sul valore centrale di ciascuna classe). [R.28]

Classe	21-25	26-30	31-35
Frequenza assoluta	4	6	4

32 Calcola la media della seguente distribuzione di frequenza [R.7,1]

Classe	2	4	6	7	12	14
Frequenza assoluta	2	4	5	4	3	2

33 Una rivista di auto fornisce i seguenti punteggi per tre diversi modelli di automobili.

	Funzionalità	**volumetria**	**prestazioni**	**sicurezza**	**economia**
Modello 1	2,5	4	3,2	3,5	2,5
Modello 2	2,5	3	4	3,5	2
Modello 3	2,7	3	3,5	3,8	2,5

Quale tipo di auto viene considerato mediamente migliore se si da lo stesso peso alle singole caratteristiche?

34 Un insegnante di fisica, per mostrare che le misure di uno stesso oggetto sono soggette ad errori che dipendono dall'osservatore, ha fatto misurare la lunghezza di una cattedra con un metro a ciascun alunno della propria classe. I risultati sono stati i seguenti:

Lunghezza	100,8	100,9	101,2	101,5	102
Frequenza	2	8	5	4	1

Qual è la lunghezza media della cattedra?

►6. Indici di variabilità

Gli indici di variabilità vengono calcolati per analizzare in che modo i termini di una distribuzione si concentrano intorno ad un valore medio.

DEFINIZIONE. Il **campo di variazione** è la differenza fra il valore massimo ed il valore minimo assunti dalla variabile. $CVAR = x_{max} - x_{min}$

Tale indice dà un'informazione molto grossolana perché tiene conto solo del primo e dell'ultimo termine della distribuzione e non tiene conto di tutti i valori intermedi. Si considerino ad esempio le seguenti distribuzioni di stature:

Gruppo A (statura in cm)	150	155	155	160	165	180	175
Gruppo B (statura in cm)	150	160	175	170	170	170	180

Entrambe le distribuzioni hanno lo stesso valore massimo e lo stesso valore minimo e quindi lo stesso campo di variazione, ma mentre nella prima i valori sono concentrati verso il valore minimo nella seconda si concentrano intorno al valore massimo.
L'indice non dà quindi alcuna indicazione su quest'ultima informazione. Né può essere utilizzato come indice di variabilità la media degli scarti fra le singole osservazioni e la loro media aritmetica perché tale valore è sempre uguale a zero.
L'indice più utilizzato è la varianza.

DEFINIZIONE. La **varianza** è la media dei quadrati degli scarti fra le singole osservazioni e la loro media aritmetica. $VAR = \frac{((x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + ... + (x_n - M)^2)}{n} = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - M)^2$

Se i dati si presentano sotto forma di distribuzione di frequenza la media deve essere ponderata con le singole frequenze, cioè:

$$VAR = \frac{((x_1 - M)^2 \cdot f_1 + (x_2 - M)^2 \cdot f_2 + ... + (x_n - M)^2 \cdot f_n)}{n} = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - M)^2 \cdot f_i$$

La varianza assume valore zero quando tutti i valori coincidono con la media ed è tanto più grande quanto più i singoli valori si discostano dalla media. Poiché tale indice è influenzato sia dal valore della media che dall'unità di misura utilizzato spesso si utilizza un indice detto **coefficiente di variazione**.

DEFINIZIONE. Il **coefficiente di variazione** è uguale al rapporto fra scarto quadratico medio (radice quadrata della varianza) e media aritmetica. $CV = \frac{VAR}{M}$

Tale indice risulta di particolare utilità per confrontare distribuzioni diverse.

<u>Esempio</u>

E' dato l'elenco delle stature, in cm, dei ragazzi di una classe:

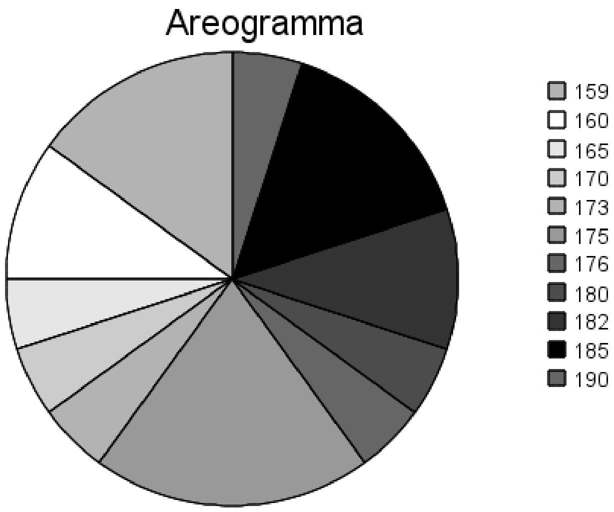
165, 182, 159, 173, 160, 175, 185, 190, 175, 180, 159, 185, 176, 170, 175, 160, 175, 182, 159, 185.

a) Ordina i dati in una tabella delle frequenze.
b) Rappresenta i dati graficamente dopo averli raggruppati in classi.
c) Calcola la media, la mediana e la moda.
d) Calcola la varianza e il coefficiente di variazione

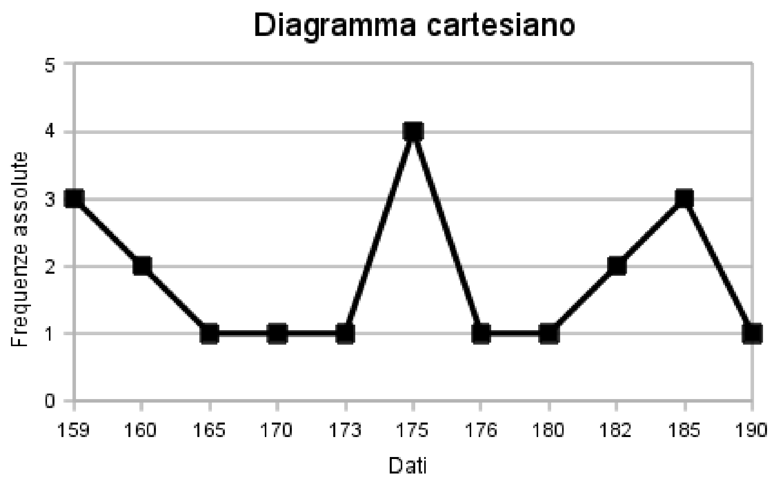
a) Tabella delle frequenze

Dati	**Frequenze assolute**	**Frequenze relative**	**Frequenze percentuali**
159	3	0,15	0%
160	2	0,1	10%
165	1	0,05	5%
170	1	0,05	5%
173	1	0,05	5%
175	4	0,2	20%
176	1	0,05	5%
180	1	0,05	5%
182	2	0,1	10%
185	3	0,15	15%
190	1	0,05	5%
Totale	20	1	100%

- La somma delle frequenze assolute indica il numero totale dei dati.
- La somma delle frequenze relative deve avvicinarsi il più possibile a 1.
- La somma delle frequenze percentuali deve avvicinarsi il più possibile a 100.



b) Grafici



c) Calcolo della media, mediana e moda:

- Media aritmetica

$$M = \frac{165+182+159+173+160+175+185+190+175+180+159+185+176+170+175+160+175+182+159+185}{20} = 173.5$$

- Per determinare la mediana si devono ordinare in modo crescente i dati:
  159, 159, 159, 160, 160, 165, 170, 173, 175, 175, 175, 175, 176, 180, 182, 182, 185, 185, 185, 190
  Essendo i dati in numero pari si determina la media dei due dati centrali:
  $$Mediana = \frac{175+175}{2} = 175$$
  (Se i dati sono molti è possibile individuare quale è o quali sono i dati centrali utilizzando la tabella delle frequenze opportunamente costruita, cioè con i dati scritti in ordine crescente.)

- La moda è il dato più ricorrente, cioè quello con la frequenza più alta: *Moda* = 175

35 Calcola la varianza ed il coefficiente di variazione per ciascuna serie di valori dell'esercizio 24 del paragrafo precedente.

36 Calcola la varianza della distribuzione dei pesi dell'esercizio 25 del paragrafo precedente.

37 Calcola la varianza sulla base dei dati dell'esercizio 30 del paragrafo precedente.

38 Calcola il campo di variazione e la varianza della seguente distribuzione: 6 ,8 ,10 ,12 ,14.

39 Nella seguente tabella sono indicati i consumi bimestrali d'acqua, espressi in metri cubi, di una certa famiglia in due anni consecutivi:

Bimestre	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anno 1	70	80	110	120	140	90
Anno 2	80	75	100	130	120	85

Calcola per ciascun anno media, campo di variazione e varianza. Stabilisci infine, giustificando la risposta, in quale anno c'è stata una variabilità maggiore.

40 Scegli la risposta corretta:

a) Se compi un'indagine sul peso degli allievi della tua scuola, da cosa sarà costituita la popolazione scolastica?

- ☐ Dagli allievi della scuola
- ☐ Dai pesi degli allievi della tua scuola
- ☐ Da ciascun allievo della scuola
- ☐ Dal peso di ciascun allievo della scuola

b) Nella stessa indagine, da cosa sarà costituita un'unità statistica?

- ☐ Dagli allievi della scuola
- ☐ Dai pesi degli allievi della tua scuola
- ☐ Da ciascun allievo della scuola
- ☐ Dal peso di ciascun allievo della scuola

c) Un'indagine statistica realizzata intervistando solo una parte della popolazione statistica come viene definita?

- ☐ Incompleta
- ☐ Universo
- ☐ Censimento
- ☐ Per campione

d) La frequenza percentuale si ottiene;

- ☐ Dividendo la frequenza per il totale delle frequenze e moltiplicando il risultato per 100
- ☐ Moltiplicando la frequenza per 100
- ☐ Moltiplicando la frequenza per il totale delle frequenze e dividendo il risultato per 100
- ☐ Dividendo la frequenza per 100

e) La mediana:
- ☐ E’ il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero
- ☐ E’ il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati
- ☐ E’ il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati
- ☐ È il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media

f) La media aritmetica:
- ☐ E’ il valore che si ottiene dividendo la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero
- ☐ E’ il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati
- ☐ E’ il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati
- ☐ È il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media

g) La moda:
- ☐ E’ il valore che si ottiene dividendo la somma la somma dei valori delle singole osservazioni per il loro numero
- ☐ E’ il valore equidistante dagli estremi di un insieme di dati ordinati
- ☐ E’ il valore che si presenta con la massima frequenza in un insieme di dati
- ☐ È il valore che indica la percentuale di dati al di sopra o al di sotto della media

h) Nella seguente distribuzione di dati 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7:
- ☐ La media aritmetica è 5, la moda è 4, la mediana è 6
- ☐ La media aritmetica è 4, la moda è 6, la mediana è 5
- ☐ La media aritmetica è 5, la moda è 6, la mediana è 4
- ☐ La media aritmetica è 5, la moda è 4, la mediana è 5

i) Nella tua classe la mediana dell’altezza è 152 cm. Questo significa che:
- ☐ Non ci sono studenti più bassi di 152 cm
- ☐ 152 cm è l’altezza più comune
- ☐ la metà degli studenti ha un’altezza inferiore a 152 cm, mentre l’altra metà ha un'altezza superiore
- ☐ in media gli studenti sono alti 152 cm

l) Nella tua classe la moda dell’altezza è 152 cm. Questo significa che:
- ☐ Non ci sono studenti più bassi di 152 cm
- ☐ 152 cm è l’altezza più comune
- ☐ la metà degli studenti ha un’altezza inferiore a 152 cm, mentre l’altra metà l’ha superiore
- ☐ in media gli studenti sono alti 152 cm

m) Nella tua classe la media aritmetica dell’altezza è 152 cm. Questo significa che:
- ☐ Non ci sono studenti più bassi di 152 cm
- ☐ 152 cm è l’altezza più comune
- ☐ la metà degli studenti ha un’altezza inferiore a 152 cm, mentre l’altra metà l’ha superiore
- ☐ se tutti gli alunni avessero la stessa altezza questa sarebbe di 152 cm

41 Ad un gruppo di studenti è stato chiesta la valutazione dell’esame di biologia, che è risultato così distribuito: 27 – 25 – 26 – 24 – 24 – 21 – 24 – 20 – 29 – 28 – 28 – 24 –22- 25 – 24 – 22 – 24 – 21 – 23 – 28

a) Organizza i dati in una tabella, indicando anche la frequenza assoluta, quella relativa in frazione e quella percentuale;
b) Rappresenta i dati in un grafico a piacere;
c) Calcola moda, media e mediana dandone una breve interpretazione.
d) Calcola la varianza

42 Una ditta paga 5 persone 165 euro alla settimana, 4 persone 199 euro a settimana e 2 persone a 218 euro a settimana. Trova media aritmetica, moda e mediana. Che percentuale di persone ha la retribuzione che si discosta, sia in positivo che in negativo, di 20 euro dalla media?

43 E’ stata effettuata un’indagine statistica fra le persone presenti in una libreria riguardo al numero di libri letti nella scorsa estate. I dati sono raccolti nella seguente tabella:

N° libri letti	0	1	2	3	4	5	6	7
N° persone	20	35	9	6	3	0	1	1

a) Organizza i dati in una tabella e calcola la frequenza assoluta, quella relativa e quella percentuale;
b) Rappresenta i dati in un grafico scelto a piacere;
c) Calcola moda, media e mediana dandone una semplice interpretazione.
d) Varianza e coefficiente di variazione

44 In un test attitudinale il gruppo dei candidati alla prova di velocità di lettura ha ottenuto i seguenti risultati:

N° di pagine lette in 15 minuti	10	12	11	9	14	13	7
N° di candidati	2	5	2	1	1	3	4

a) Organizza i dati in una tabella indicando frequenza assoluta, frequenza relativa e percentuale.
b) Rappresenta i dati in un diagramma a bastoni.
c) Calcola la moda, la media e la mediana.
d) Quanti candidati in percentuale hanno letto un numero di pagine sopra la media?

45 In un gruppo di ragazzi le stature (espresse in centimetri) risultano distribuite nel seguente modo:

163	169	171	165	173	165	163	168
168	169	171	169	181	165	168	169
169	163	169	168	150	168	172	181
165	169	172	169	192	173	163	168

a) Costruisci una tabella indicando i dati, la loro frequenza, la frequenza relativa e la percentuale.
b) Suddividi i dati in 4 classi, costruisci la distribuzione di frequenza e rappresentali graficamente con un istogramma.
c) Calcola la media, la moda e la mediana.

46 Sono state misurate le pulsazioni al minuto di 20 persone ottenendo i seguenti dati:

79	72	69	69	72
80	73	73	70	66
80	68	70	72	82
75	72	71	74	64

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
b) Rappresenta graficamente i dati.
c) Calcola moda, media e mediana.

47 Ventuno ragazzi sono stati sottoposti a una verifica; i dati seguenti esprimono il numero di errori commessi da ciascuno di loro: 3, 4, 1, 3, 6, 6, 3, 1, 4, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 7, 1, 3, 7, 3, 3

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
b) Rappresenta graficamente i dati.
c) Calcola moda, media e mediana.
d) Quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno di 5 errori?

48 I dati riportati in tabella si riferiscono ai giorni di assenza degli alunni di una classe in un determinato periodo.

Alunno	**N° giorni**	**Alunno**	**N° giorni**	**Alunno**	**N° giorni**	**Alunno**	**N° giorni**
Mauro	5	Romeo	2	Bruna	7	Silvia	2
Antonio	7	Anna	4	Pietro	2	Alessio	2
Paola	5	Luca	4	Nicola	7	Patrizia	9
Luisa	5	Amedeo	5	Aldo	2	Franca	1
Carla	1	Marco	7	Luigi	2	Chiara	7

a) Organizza i dati in una tabella comprensiva di percentuale di frequenze.
b) Rappresenta i dati con un istogramma.
c) Calcola moda, media e mediana.
d) Quanti alunni, in percentuale, hanno fatto meno assenze rispetto alla media.